ZEITSCHRIFT

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896),
B. WITZSCHEL (1856—1859), M. CANTOR (1859—1896), E. KAHL (1860—1892).

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND DR. M. CANTOR.

---

43. BAND.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 7 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Physik.

Angewandte Mathematik und Physik.

Beilage zu Heft 4 und 5: Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik, die im Jahre 1897 in technischen Zeitschriften erschienen sind. Zusammengestellt von **R. Mehmke.**

---

43. Band. 1. Heft.

ZEITSCHRIFT

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896),
B. WITZSCHEL (1856–1859), M. CANTOR (1859–1896), E. KAHL (1860–1892)

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND DR. M. CANTOR.

---

43. BAND. 1. HEFT.

MIT 8 TEXTFIGUREN UND 4 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.

Ausgegeben am 23. Februar 1898.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Über Rollkurven und Rollflächen.

Von

Dr. M. Disteli
in Winterthur.

Hierzu Tafel I Fig. 1—4.

Die in der Kinematik als Rollflächen bekannten krummen Flächen bilden die Grundkörper der sogenannten unrunden Räder,* die dazu dienen, eine gleichförmige Rotationsbewegung der einen Welle in eine ungleichförmige der anderen Welle umzusetzen. Sie sind im allgemeinen Cylinder-, Kegel- oder windschiefe Regelflächen, je nachdem die Axen der Wellen zu einander parallel sind, oder sich im Endlichen schneiden, oder sich kreuzen. Die Übertragung der Bewegung der einen Welle auf die andere geschieht dann in der Weise, dass die beiden Rollflächen R_1 und R_2 sich um ihre Axen o_1 und o_2 drehen und gleichzeitig aufeinander rollen, wobei jedoch im Falle der gekreuzten Axen zu der rollenden noch eine gleitende Bewegung beider Flächen aneinander hinzutreten wird, welcher Bewegungsvorgang als Schroten** der Flächen bezeichnet worden ist. Diese gleitende Bewegung kann dadurch beseitigt werden, dass man eine oder beide Flächen zugleich eine Translationsbewegung längs der Axen ausführen lässt; in diesem Falle gehen dann die eine oder beide Flächen in allgemeine Schraubenregelflächen über, wobei die Punkte kürzester Distanz der Erzeugenden von der Axe Schraubenlinien von veränderlichem Radius und veränderlicher Steigung beschreiben und der Richtungskegel kein Umdrehungskegel mehr ist. Zwei solchermaßen gestaltete Flächen sind dann wieder befähigt, ohne Gleiten zu rollen.

Die Aufgabe, durch gleichförmige Rotationsbewegung einer Welle eine ungleichförmige an einer zweiten Welle hervorzubringen, wird durch die Aufsuchung der entsprechenden Rollflächen kinematisch vollständig gelöst. Zur Übertragung einer bestimmten mechanischen

* Vergl. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1. Bd. 2. Lief. Leipzig 1886. S. 370 flg. und die dort angegebenen Litteraturnachweise.

** Vergl. Reuleaux, Theoretische Kinematik, S. 83 flg.

Arbeit der einen Welle auf die andere sind dagegen beide Grundkörper mit Zähnen zu versehen, die so zu formen sind, dass beim Gleiten entsprechender Zahnflanken aufeinander die Bewegung kontinuierlich und möglichst genau so vor sich geht, als ob eben die Flächen R_1 und R_2 der Grundkörper aufeinander rollen würden.

Die drei Arten von Flächen sollen im Folgenden nach dem nämlichen einheitlichen Gesichtspunkt behandelt werden; immerhin mit besonderem Nachdruck darauf, durch die Untersuchung gleichzeitig auch zur graphischen Darstellung der in Rede stehenden Gebilde zu gelangen.

Teil I.

A. Parallele Axen.

1.

Im Falle paralleler Axen o_1 und o_2 sind R_1 und R_2 Cylinderflächen und ihre Untersuchung beschränkt sich auf diejenige ihrer Normalschnitte. Diese Spurkurven, welche die Teilkreise der runden Räder vertreten, führen den Namen Rollkurven und sollen an Stelle der Cylinder in der Folge durch die Bezeichnung R_1 und R_2 gekennzeichnet werden.

Sollen zwei solche Rollkurven sich in ihrer gemeinschaftlichen Ebene um feste Punkte O_1 und O_2 drehen und gleichzeitig aufeinander rollen, so muss nach einem Euler'schen Theorem die Berührung derselben stets auf der Centralen $O_1 O_2$ stattfinden. Ist P der zwischen O_1 und O_2 liegende momentane Berührungspunkt beider Kurven, so wählen wir $O_1 P$ als positive Richtung einer Polaraxe x_1, ebenso $O_2 P$ als positive Richtung einer Polaraxe x_2; dann können auf o_1 und o_2 stets zwei positive Axenrichtungen z_1 und z_2 so fixiert werden, dass von ihnen aus gesehen beide Scheiben sich gleichzeitig bei Berührung von aussen in positivem Sinne drehen. Bezeichnet jetzt $2a$ die Distanz der Wellenwinkel O_1 und O_2, r_1 und φ_1 ebenso r_2 und φ_2 die Polarkoordinaten entsprechender Punkte P_1 und P_2, d. h. solcher Punkte beider Kurven, die einmal gleichzeitig durch die Centrale gehen, ϑ_1 und ϑ_2 die in positivem Sinn gemessenen Winkel der Radienvektoren gegen ihre Tangenten, so wird bei gleichzeitiger Rotation beider Kurven der Berührungspunkt P die Centrale $O_1 O_2$ durchlaufen und zwar eine Strecke derselben, die ganz innerhalb oder ganz ausserhalb, oder zum Teil innerhalb und zum Teil ausserhalb der begrenzten Strecke $O_1 O_2$ liegt, je nachdem die Berührung beider Scheiben stets von aussen, stets von innen, oder abwechselnd von aussen und innen erfolgt.

Bezeichnet man ferner zwei um O_1 und O_2 beschriebene Kreise, die sich auf der Centrale berühren, als ein Elementenpaar, so be-

stehen zwischen den Polarkoordinaten zweier entsprechender Punkte jedes Paares die Gleichungen:

1) $$r_1 + r_2 = 2a,$$

2) $$r_1 d\varphi_1 - r_2 d\varphi_2 = 0.$$

Die Elemente jedes Paares bilden ein Paar von Rollkurven für konstantes Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 beider Kurven; denkt man sich jetzt die Ebene derselben doppelt und über einander gelegt, so gelangt man zu den allgemeinsten Paaren von Rollkurven nach folgendem Satz:

Durchläuft ein Punkt P die Centrale $O_1 O_2$ nach einem willkürlichen Gesetze, während die mit O_1 und O_2 fest verbundenen Ebenen sich um O_1 und O_2 gegenseitig so drehen, als ob die momentan durch P gehenden Kreise des Paares aufeinander rollen würden, so beschreibt P in beiden Ebenen zwei entsprechende Rollkurven $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$.

Seien w_{1n} und w_{1r}, ebenso w_{2n} und w_{2r} die normal zur Centrale wirkenden resp. in diese fallenden Komponenten der Geschwindigkeiten w_1 und w_2, mit denen bei gleichzeitiger Drehung beide Kurven $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ durch den Punkt P laufen, so ist:

$$w_{1n} = r_1 \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad w_{2n} = r_2 \frac{d\varphi_2}{dt},$$

$$w_{1r} = \frac{dr_1}{dt}, \qquad w_{2r} = \frac{dr_2}{dt},$$

also nach den Gleichungen 1) und 2):

$$w_{1n} - w_{2n} = 0,$$

$$w_{1r} + w_{2r} = 0,$$

somit

$$\frac{w_{1n}}{w_{1r}} + \frac{w_{2n}}{w_{2r}} = \operatorname{tg}\vartheta_1 + \operatorname{tg}\vartheta_2 = 0,$$

d. h.:

3) $$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi.$$

Ferner folgt:

$$w_{1n}^2 + w_{1r}^2 = w_{2n}^2 + w_{2r}^2,$$

d. h.:

4) $$ds_1 = ds_2.$$

Nach 3) berühren sich also $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ in P, nach 4) rollen sie bei der Drehung um O_1 und O_2 aufeinander, folglich genügen die Bedingungsgleichungen 1) und 2), um zwei Kurven als zusammengehörige Rollkurven zu charakterisieren.

Um nun von der angegebenen mechanischen Erzeugungsweise zu einer konstruktiven zu gelangen, denken wir uns zwei Rollkurven mit Berührung von aussen in richtiger Lage. In diesen Kurven entspricht dann der Folge von Radien $a_1, b_1, c_1 \ldots$ der ersten in ganz bestimmter Weise die Folge von Radien $a_2, b_2, c_2 \ldots$ der zweiten; denkt man sich nun die Kurven weg und bringt das zweite Radiensystem derart an

den Punkt O_1, dass die positiven Axen x_2, y_2, z_2 mit den positiven Axen x_1, y_1, z_1 zusammenfallen, so haben wir am Punkte O_1 zwei vereinigte Büschel von gleichem oder entgegengesetztem Drehungssinn, je nachdem Berührung von aussen oder innen vorausgesetzt wird. Um die gegenseitige Abhängigkeit entsprechender Strahlen zu veranschaulichen, bringe man beide Büschel mit einem beliebigen um O_1 beschriebenen Kreise D zum Schnitt, so erhält man auf diesem zwei Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ Verbindet man jetzt entsprechende Punkte durch geradlinige Sehnen, so umhüllt die Gesamtheit derselben eine bestimmte Kurve F und umgekehrt vermittelt jede Kurve F die geometrische Abhängigkeit zweier Strahlsysteme am Punkte O_1.

Bezeichnet aber $A_1' A_2'$ die zu $A_1 A_2$ unendlich benachbarte Sehne, welche ihr also in ihrem Berührungspunkt mit der Enveloppe F begegnet und sind φ_1 und φ_2 die Polarwinkel der Radien $O_1 A_1$ und $O_1 A_2$ gegen eine beliebige Polaraxe x, so besteht beim Kreis bekanntlich die Proportion:

$$\frac{A_1 F}{A_2 F} = \frac{A_1 A_1'}{A_2 A_2'} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}.$$

Teilt man daher die Radien $O_1 A_1$ und $O_1 A_2$ je durch einen Punkt P_1 und P_2 im umgekehrten Verhältnis der Tangentenabschnitte $A_1 F$ und $A_2 F$, indem man $P_1 F$ parallel $O_1 A_2$ und $P_2 F$ parallel $O_1 A_1$ zieht, so ist zunächst für die Radienvektoren r_1 und r_2 der Punkte P_1 und P_2 die Bedingung 2) erfüllt:

$$r_1 d\varphi_1 - r_2 d\varphi_2 = 0.$$

Da jetzt nach Gleichung 1):

$$r_1 + r_2 = 2a$$

sein soll, so hat man dem um O_1 beschriebenen Kreis D den Radius $2a$ zu erteilen. Man gelangt somit zu folgendem Ergebnis:

Ist F eine vollkommen willkürliche Kurve, die in der Ebene eines Kreises D liegt, so bringe man die Tangente irgend eines ihrer Punkte F in A_1 und A_2 mit D zum Schnitt und ziehe $P_1 F$ parallel zum Radius $O_1 A_2$, $P_2 F$ parallel zum Radius $O_1 A_1$. Durchläuft jetzt F die ganze Kurve F, so beschreiben die Punkte P_1 und P_2 entsprechende Rollkurven für O_1 als Drehpunkt und den Radius des Kreises D als Centraldistanz.

Den Kreis D bezeichnen wir fortan als Distanzkreis, die Kurve F als Teilungskurve der Rollkurven R.

2.

Zum Zwecke einer genaueren graphischen Darstellung der Kurven R_1 und R_2 soll jetzt die Konstruktion der Tangente und des Krümmungsradius in den Punkten P_1 und P_2 abgeleitet werden. Sind die Radiensysteme an den Punkt O gebracht, so bezeichne in Fig. 1 (Taf. I) u den Winkel der Normalen n der Teilungskurve gegen die Polaraxe, $2v$ den

Winkel, unter dem die Sehne A_2A_1 von O aus gesehen wird. Ferner seien ω_1, π_1; ω_2, π_2; ω_0, π_0 Winkelgeschwindigkeiten und -Beschleunigungen der Radien OA_1, OA_2 und der Normalen n, so ist zunächst:

$$2u = \varphi_1 + \varphi_2, \quad 2v = \varphi_1 - \varphi_2;$$

also:

$$2\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad 2\pi_0 = \pi_1 + \pi_2.$$

Ist nun A der Mittelpunkt der Tangente A_1A_2, so nehmen wir ihn zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen positive Axe x' von A nach A_1, dessen positive Axe y' von A nach O gerichtet ist. Bezeichnen nun zur Abkürzung die absoluten Längen folgender fünf Strecken mit Buchstaben, nämlich:

$$A_1F = n, \quad A_2F = m, \quad A_2A_1 = 2s, \quad AF = e, \quad AO = f,$$

so erhält jede dieser Strecken durch ihre Bezeichnung zugleich bestimmtes Vorzeichen. Die Tangente A_1A_2 kann nun auf unendlich viele Arten längs der Kurve F bewegt werden, da aber die Bewegungsrichtung der Punkte P_1 und P_2 von dem Bewegungsgesetz der Tangente A_1A_2 durchaus unabhängig sein muss, so kann zur Fixierung bestimmter Verhältnisse die Annahme:

$$\omega_1 = \frac{n}{2a}, \quad \omega_2 = \frac{m}{2a};$$

also:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}, \quad \omega_0 = \frac{s}{2a} = \sin v$$

gemacht werden, nach welcher somit die Winkelgeschwindigkeit der Tangente A_1A_2 ihrer Länge proportional ist.

Auf dem Distanzkreis bewegen sich infolgedessen die Punkte A_1 und A_2 mit den Geschwindigkeiten:

$$W_1 = 2a\omega_1 = n, \quad W_2 = 2a\omega_2 = m.$$

Es sei ferner K der Krümmungsmittelpunkt der Teilungskurve für den Punkt F, Q_1 und Q_2 seien die Schnittpunkte der Normalen n mit OA_1 und OA_2, dann wird für eine unendlich kleine Drehung der Tangente A_1A_2 um den Punkt K in positivem Sinne die Strecke n wachsen, falls K auf der begrenzten Strecke FQ_1 liegt; dagegen die Strecke m wird wachsen, so lange K auf der unbegrenzten Strecke FQ_2 postiert wird. Wenn daher mit P_1 und P_2 die tangentialen Beschleunigungen der Punkte A_1 und A_2 bezeichnet werden, so ist:

$$P_1 = 2a\pi_1 = \frac{dFA_1}{du} \cdot \frac{du}{dt} = KQ_1 \sin v = KL_1,$$

$$P_2 = 2a\pi_2 = \frac{dA_2F}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -KQ_2 \sin v = KL_2,$$

wenn L_1 und L_2 die Fusspunkte der Lote von K auf die Raiend OA_1 und OA_2 bedeuten.*

* Vergl. Mannheim: Géométrie Cinématique, S. 44 flg. Paris 1894.

Es ist daher
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = -\frac{KQ_1}{KQ_2},$$
d. h. P_1 und P_2 haben gleiches und zwar positives Vorzeichen nur so lange K auf der begrenzten Strecke $Q_1 Q_2$ liegt.

Bewegt sich demnach die Tangente $A_1 A_2$ längs der Teilungskurve mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0, welche ihrer Länge proportional ist, so sind die tangentialen Geschwindigkeiten, mit denen ihre Endpunkte auf dem Distanzkreis gleiten, gleich den vom Berührungspunkt gebildeten Abschnitten der Tangente und ihre tangentialen Beschleunigungen der Grösse und dem Sinne nach gleich den Entfernungen des Krümmungsmittelpunktes der Teilungskurve von ihren Radien.

Bedeuten jetzt wieder w_{1n}, w_{1r} und w_{2n}, w_{2r} die normalen und radialen Komponenten der Geschwindigkeiten w_1 und w_2 der Punkte P_1 und P_2, so folgt aus der Gleichung:
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n},$$
$$r_1 = 2a\frac{m}{m+n} = 2a\frac{\omega_2}{\omega_0},$$
$$r_2 = 2a\frac{n}{m+n} = 2a\frac{\omega_1}{\omega_0};$$
also:
$$w_{1n} = r_1\omega_1 = \frac{m \cdot n}{n+m} = \frac{W_1 \cdot W_2}{W_1 + W_2} = P_1 F_1;$$
und da
$$r_1\omega_1 - r_2\omega_2 = 0,$$
$$w_{1n} = w_{2n}.$$

Die doppelten normalen Geschwindigkeitskomponenten der Punkte P_1 und P_2 sind also gleich dem harmonischen Mittel aus den Geschwindigkeiten der Punkte A_1 und A_2 und gleich ihren parallel zur Tangente der Teilungskurve gemessenen doppelten Entfernungen vom Berührungsradius OF.

Aus den oben stehenden Werten von r_1 und r_2 ergeben sich nun auch die radialen Komponenten, nämlich:
$$w_{1r} = \frac{dr_1}{dt} = \frac{a}{2}\,\frac{\omega_1\pi_2 - \omega_2\pi_1}{\omega_0{}^2},$$
$$w_{2r} = \frac{dr_2}{dt} = \frac{a}{2}\,\frac{\omega_2\pi_1 - \omega_1\pi_2}{\omega_0{}^2};$$
d. h.:
$$w_{1r} + w_{2r} = 0.$$

Um diese Ausdrücke zu konstruieren, beachte man, dass
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m};\quad \frac{\pi_1}{\pi_2} = -\frac{KQ_1}{KQ_2};\quad 2\omega_0 = \frac{n+m}{2a}$$
ist, so wird:

$$w_{1r} = -\frac{1}{2}\,\frac{m\,KQ_1 + n\,KQ_2}{n+m} = \frac{1}{2}\,GK = -w_{2r}.$$

Aus der Definitionsgleichung dieser Strecke GK geht aber hervor, dass in allen Fällen der Punkt G der vierte harmonische zum Punkte F in Bezug auf das Punktepaar $Q_1 Q_2$ ist und daher gefunden wird, indem man OG parallel zur Sehne $P_1 P_2$ zieht.

Fällt K mit G zusammen, so sind die radialen Geschwindigkeitskomponenten der Punkte P_1 und P_2 gleich Null, d. h. diese bewegen sich momentan auf Kreisen um den Punkt O. Es ist daher G derjenige Punkt der Ebene, um welchen die Sehne $A_1 A_2$ gedreht werden muss, wenn das Verhältnis ihrer Abschnitte d. h. auch das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sich momentan nicht ändern soll. Mit der Bezeichnung Geschwindigkeitscentrum für den Punkt G ergiebt sich demnach für die Punkte P_1 und P_2:

Die doppelten radialen Geschwindigkeitskomponenten der Punkte P_1 und P_2 sind gleich der Entfernung des Geschwindigkeitscentrums G vom Krümmungsmittelpunkt der Teilungskurve.

Ist demnach die Teilungskurve F sowie ihre Evolute E gegeben, so können für jedes Punktepaar der Rollkurven die Tangenten durch Abstechen zweier Strecken angegeben werden. Es ist aber leicht einzusehen, dass diese Konstruktion, die zunächst kinematisch begründet ist, auch eine geometrische Bedeutung hat.

Es ist nämlich:

$$w_{1n} = \frac{n \cdot m}{n+m} = \frac{FQ_1 \cdot FQ_2}{FQ_1 + FQ_2}\,\operatorname{tg} v = \frac{1}{2}\,FG \cdot \operatorname{tg} v,$$

$$w_{1r} = -\frac{1}{2}\,KG,$$

somit

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta_1}{\operatorname{tg} v} = -\frac{FG}{KG}.$$

Fällt daher K mit F zusammen, so ist $\vartheta_1 = \pi - v$, d. h. wenn die Kurve F eine Spitze besitzt, so steht die Tangente der Rollkurve zur Rückkehrtangente normal. Fällt K mit G zusammen, so ist $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, d. h. die Tangente steht zum Radius r_1 normal; fällt endlich K mit dem unendlich fernen Punkt U von n zusammen, so ist $\vartheta_1 = 0$, d. h. wenn die Teilungskurve eine Wendestelle besitzt, der ein unendlich grosser Krümmungsradius zukommt, so geht die Tangente der Rollkurve durch den Punkt O. Bezeichnet man daher die den Punkten G, U, F, K entsprechenden Tangenten von R_1 mit g, u, f, k, so sagt obige Gleichung nichts anderes aus als die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(gufk) = (GUFK).$$

Es ist also die Reihe der Krümmungsmittelpunkte K auf der Normalen n projektiv zum Büschel der Tangenten am Punkte P_1.

Die Konstruktion der Geschwindigkeit w_1 ist daher nichts anderes als die einfachste Konstruktion dieser Projektivität.

Soll endlich die Linie FP_1 gerade die Tangente der Kurve R_1 in P_1 sein, so bleibt bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes F der Inhalt des Parallelogrammes FP_1OP_2 ungeändert. Es ist dann $\vartheta_1 = \pi - 2v$, oder falls man

$$KG = FG - \varrho$$

setzt, wo ϱ den Krümmungsradius von F bedeutet:

$$\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 v} = \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{FG}},$$

oder

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2} FG}{\cos^2 v}.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Teilungskurve im Punkte F von derjenigen Ellipse oskuliert wird, welche OF zum Durchmesser und $P_1 P_2$ zu Brennpunkten hat.

Wird also ein Parallelogramm OP_1FP_2 derart um die feste Ecke O gedreht, dass Inhalt und Umfang $2a$ konstant bleiben, indessen die Ecken P_1 und P_2 Kurven von gleicher Bogenlänge beschreiben, so sind die Bahnen derselben Ort der Brennpunkte aller Ellipsen von der konstanten Hauptaxe $2a$, welche mit dem Parallelogramm konzentrisch bleiben und fortgesetzt die Bahn der Ecke F oskulieren.

Soll nun im weiteren in dem Punkte P_1 der Kurve R_1 der Krümmungsradius ϱ_1 konstruiert werden, so ist dazu die Kenntnis von vier aufeinanderfolgenden Tangenten der Kurve F, d. h. die Angabe des zweiten Krümmungsmittelpunktes K' erforderlich. Bezeichnet man dann die daraus entspringende Beschleunigung, mit welcher sich P_1 auf dem Radius OA_1 bewegt, durch p_{1r}, so ergiebt sich die Beschleunigung des Punktes P_1 nach dem Coriolis'schen Satze* wie folgt:

Bezeichnet p_{1k} die Beschleunigung des momentan mit P_1 zusammenfallenden Punktes der Geraden OA_1, so ist die Beschleunigung p_1, mit der sich der Punkt P_1 auf seiner Bahn R_1 bewegt, gleich der geometrischen Summe der Beschleunigungen p_{1k} und p_{1r}, vermehrt um die Zusatzbeschleunigung $p_{1z} = 2 w_{1r} \omega_1$, die senkrecht zur Geraden OA_1 steht und mit der um einen rechten Winkel im Sinne von ω_1 gedrehten Geschwindigkeit w_{1r} gleich gerichtet ist.

Um zunächst die Beschleunigung p_{1r} zu finden, bezeichne man (Fig. 1 Taf. I) mit G' den Schnittpunkt der Normalen n'' der vom Punkte G

* Vergl. Burmester a. a. O. Bd. I Lief 3, S. 776.

beschriebenen Kurve G mit der Normalen n' der Evolute E im Punkte K. Um die Lage dieses Punktes G' zu bestimmen, beachte man, dass

$$KG' = \frac{dFG}{du}.$$

Es ist aber

$$FG = 2\frac{FQ_1 \cdot FQ_2}{FQ_1 + FQ_2} = \frac{2}{a} r_1 \cdot r_2 \cos v \cdot = \frac{f \cdot r_1 \cdot r_2}{a^2}.$$

Da aber A die Fusspunktskurve von F beschreibt, so ist:

$$\frac{df}{du} = -e;$$

$$\frac{1}{a}\,\frac{d(r_1 r_2)}{du} = \frac{r_2 - r_1}{\frac{A_1 A_2}{2}} \cdot GK$$

und daher

$$\frac{dFG}{du} = \frac{e}{f} GF + \frac{Q_1 Q_2}{\frac{A_1 A_2}{2}} GK.$$

Also

$$KG' = GG_0 + G_0' G'.$$

Die erste Strecke wird der Grösse und Richtung nach erhalten, indem man durch G die Parallele zu $A_1 A_2$ zieht und mit OF in G_0 zum Schnitt bringt. Die zweite Strecke hat das Vorzeichen von GK, sie ist mit GK proportional, d. h. die Gerade $G_0 G'$ hat eine von der Lage von K unabhängige Richtung, die sich leicht konstruieren lässt, indem man $AQ = Q_1 Q_2$ macht und aus G_0 auf $A_1 Q$ das Lot fällt.

Ist nun G' gefunden, so folgt aus der Gleichung

$$w_{1r} = \frac{1}{2} GK:$$

$$p_{1r} = \frac{1}{2} G'K' \sin v.$$

Fällt K' mit G' zusammen, so ist $p_{1r} = 0$, d. h. G' ist derjenige Punkt, um welchen die Normale n gedreht werden muss, falls die Geschwindigkeitskomponenten w_{1r} und w_{2r} sich momentan nicht ändern sollen. Man kann daher G' das Beschleunigungscentrum nennen.

Das Vorzeichen der Strecke KG' ergiebt sich jedesmal aus der Figur, nämlich als positiv oder negativ bezüglich n' je nachdem FG zunimmt oder abnimmt; ist sodann auf der Normalen n' der Evolute E der Krümmungsmittelpunkt K' gegeben und liegt er wie in Fig. 1 (Taf. I) mit K auf der entgegengesetzten Seite von G', so ist $G'K'$ eine positive Strecke, d. h. p_{1r} eine positive Beschleunigung; liegt K' mit K auf der gleichen Seite von G', so ist $G'K'$ eine negative Strecke, also p_{1r} eine negative Beschleunigung. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich daher:

Die doppelten radialen Beschleunigungskomponenten der Punkte P_1 und P_2 sind gleich den Projektionen der Entfernung des Beschleunigungscentrums G' vom zweiten Krümmungsmittelpunkt K' auf die Radien OA_1 und OA_2.

Zur Bestimmung der Beschleunigung p_{1k} betrachten wir jetzt den momentan mit P_1 zusammenfallenden Punkt der Geraden OA_1, so bewegt sich dieser auf einem mit D konzentrischen Kreise K mit der tangentialen und radialen Beschleunigung:

$$P_1 K_{1n} = K L_1 \cdot \frac{r_1}{2a}, \quad P_1 K_{1r} = r_1 \omega_1^2,$$

welche sofort angegeben werden können. Ferner ergiebt sich als Zusatzbeschleunigung:

$$p_{1s} = 2 w_{1r} \cdot \omega_1 = 2 r_1 \omega_1^2 \cdot \frac{w_{1r}}{w_{1n}} = 2 P_1 K_{1r} \cdot \operatorname{tg} \vartheta_1 = 2 K_{1r} N_1.$$

Die Zusatzbeschleunigung p_{1s} ist also doppelt so gross und gleich gerichtet wie der zwischen r_1 und n_1 liegende Abschnitt der im Punkte K_{1r} auf r_1 errichteten Normalen.

Setzt man daher die beiden radialen und normalen Komponenten zusammen, so sind die Strecken $P_1 P_{1r}$ und $P_1 P_{1n}$ die Komponenten der gesuchten Beschleunigung:

$$p_1 = P_1 P.$$

Bedeutet endlich $p_{1\varrho} = P_1 P_{1\varrho}$ die in die Richtung von n_1 fallende Komponente von p_1, so ist $\varrho_1 = P_1 K_1 = \frac{w_1^2}{p_{1\varrho}}$ der gesuchte Krümmungsradius von R_1 im Punkte P_1. Da die Komponenten von p_1 sich nach Konstruktion linear aus der Strecke GK und $G'K'$ zusammensetzen, so ergiebt sich ohne weiteres, dass der Endpunkt der Beschleunigung, also P und der zweite Krümmungsmittelpunkt K' bei unveränderter Lage der Radien sowie der Punkte F und G zwei zu einander affine Punktebenen erfüllen, sodass der Satz von Coriolis nichts anderes ist als die einfachste geometrische Ausdrucksform für die Konstruktion entsprechender Punktepaare der beiden affinen Ebenen.

Durchläuft der Punkt K die ganze Normale n, so durchläuft der Punkt G' die Gerade $G_0 G'$; fällt daher K mit G zusammen, so deckt sich G' mit G_0 und es haben daher die Kurven G und E in G eine gemeinschaftliche Normale. Man schliesst daher:

Die Kurven E und G berühren sich überall da, wo sie sich schneiden und die gemeinschaftlichen Tangenten der Berührungsstellen treffen die Kurve F in denjenigen Punkten, denen die extremen Werte der Radien r_1 und r_2 entsprechen.

Bestimmten Lagen der Krümmungsmittelpunkte K und K' werden spezielle Werte des Krümmungsradius ϱ_1 entsprechen. Soll nämlich die Komponente $p_{1\varrho}$ den Wert Null erreichen, so kann man auf der Geraden n' einen bestimmten Punkt W angeben, in welchen K' verlegt werden muss, damit dieser Umstand eintritt. Die Gesamtheit dieser Punkte W erfüllt dann eine bestimmte Kurve W, welche der zweiten Evolute E' der Teilungskurve in einer bestimmten Anzahl von Punkten begegnen wird.

Die Schnittpunkte der Kurven E' und W führen somit zu denjenigen Punkten der Teilungskurve, denen ein Wendepunkt der Kurve R_1 entspricht.

Im allgemeinen wird der entsprechende Punkt P_2 der Kurve R_2 kein Wendepunkt sein, vielmehr entspringen die Wendepunkte dieser Kurve aus einer zweiten Kurve W, die in analoger Weise entsteht.

Der Krümmungsradius ϱ_1 nimmt dagegen den Wert Null an, sobald der Punkt K' ins Unendliche rückt, ohne dass gleichzeitig auch K sich im Unendlichen befindet. Man schliesst daraus:

Hat die Kurve F in F eine Spitze zweiter Art, oder einen Wendepunkt, der zugleich auch ein Wendepunkt ihrer Evolute E ist, so haben die Kurven R_1 und R_2 in P_1 und P_2 je eine Spitze erster Art.

Da ferner die beiden Beschleunigungen p_1 und p_2 unter sich ebenfalls in projektiver Abhängigkeit sind, so bestehen auch zwischen ihren Komponenten Beziehungen, die leicht aufzustellen sind.

Projiziert man nämlich den Linienzug $P_1 K_{1r} P_{1r} P P_1$ auf die Tangente und Normale von R_1, so folgt:

$$p_{1t} = \frac{w^2_{1n}}{r_1} \cos \vartheta_1 - (2\omega_1 w_{1r} + r_1 \pi_1) \sin \vartheta_1 + p_{1r} \cos \vartheta_1,$$

$$p_{1\varrho} = \frac{w^2_{1n}}{r_1} \sin \vartheta_1 + (2\omega_1 w_{1r} + r_1 \pi_1) \cos \vartheta_1 + p_{1r} \sin \vartheta_1,$$

und analog für p_{2t} und $p_{2\varrho}$. Da aber

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi; \quad p_{1r} + p_{2r} = 0, \quad r_1 \omega_1 - r_2 \omega_2 = 0;$$

also auch

$$r_1 \pi_1 - r_2 \pi_2 + \omega_1 w_{1r} - \omega_2 w_{2r} = 0,$$

so ergiebt sich ohne weiteres:

$$p_{1t} - p_{2t} = 0$$

und

$$p_{1\varrho} + p_{2\varrho} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) w_1^2 \sin \vartheta_1,$$

d. h.

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \sin \vartheta_1.$$

Diese ebenfalls von Euler aufgestellte Gleichung gilt für Berührung der Kurven R_1 und R_2 von aussen, für Berührung von innen sind beide positiven Zeichen durch die negativen zu ersetzen.

Nach dem Vorigen lassen sich nun die Kurven R_1 und R_2 auch dann konstruieren, wenn für jedes korrespondierende Radienpaar die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte A_1 und A_2 bekannt sind. Bewegt sich beispielsweise A_1 auf dem Kreise D gleichförmig, indessen A_2 sich so bewegen soll, dass ein Punkt A_3, der mit A_2 durch eine starre Linie verbunden ist, sich im horizontalen Durchmesser von D nach vorgeschriebenem Gesetze bewegt, so ist zu jeder Lage von A_1 diejenige von A_2 bestimmt, ebenso die Geschwindigkeiten

und Beschleunigungen dieser Punkte. Die beiden Kurven R_1 und R_2, welche die verlangte Übertragung der Bewegung hervorbringen, können daher durch Punkte und Tangenten konstruiert werden.

3.

Um die Kurven R_1 und R_2 auch durch ihre Gleichungen in Polarkoordinaten darzustellen, was insbesondere im Falle einer transcendenten Kurve F von Vorteil sein kann, hat man nach dem Vorangegangenen neben der Gleichung:

1) $$r_1 + r_2 = 2a$$

noch eine endliche Gleichung zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2:

2) $$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

als gegeben anzunehmen und mittelst der Bedingungsgleichung:

3) $$r_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} + r_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = 0,$$

aus diesen drei Gleichungen entweder r_1 und φ_1 oder r_2 und φ_2 zu eliminieren. Setzt man nun

$$\varphi_1 = u + v, \quad \varphi_2 = u - v,$$

so geht die Gleichung 2) über in eine Gleichung:

$$F(u, v) = 0,$$

in welcher man jetzt u und v als Koordinaten der Teilungskurve F auffassen kann. Ist zunächst F durch eine Gleichung in den rechtwinkligen Linienkoordinaten u_1 und v_1 gegeben, so findet man ihre neue Gleichung in den Koordinaten u und v durch die Substitutionen:

$$u_1 = -\frac{1}{2a}\,\frac{\cos u}{\cos v}$$

und

$$v_1 = -\frac{1}{2a}\,\frac{\sin u}{\cos v}.$$

Ist dagegen F durch polare Linienkoordinaten r und u ausgedrückt, so genügt es

$$r = 2a\cos v$$

zu setzen, um die Gleichung in den Koordinaten u und v zu erhalten. So findet man z. B. aus der Gleichung des Punktes, der im Abstande $2b$ vom Anfangspunkt auf der Polaraxe x liegt:

$$2bu_1 + 1 = 0$$

$$a\cos v - b\cos u = 0$$

als Gleichung desselben in den Koordinaten u und v.

Wird jetzt um diesen Punkt ein Kreis vom Radius $2r_0$ beschrieben, so hat seine Gleichung in Linienkoordinaten die Form:

$$(2bu_1 + 1)^2 - 4r_0^2(u_1^2 + v_1^2) = 0.$$

Durch obige Substitutionen geht sie über in die Gleichung:

$$a \cos v - b \cos u \mp r_0 = 0,$$

je nachdem als Ausgangslage die eine oder andere derjenigen beiden Tangenten des Kreises gewählt wird, welche auf der Polaraxe normal stehen. Will man dagegen umgekehrt von den Koordinaten u und v zu rechtwinkligen Linienkoordinaten übergehen, so hat man:

$$\cos u = - \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}},$$

$$\cos v = + \frac{1}{2a\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}$$

zu substituieren.

Da nun im weiteren:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 + \frac{dv}{du},$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1 - \frac{dv}{du},$$

so wird nun:

4) $$\begin{cases} r_1 = a\left(1 - \frac{dv}{du}\right), \\ \varphi_1 = u + v, \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} r_2 = a\left(1 + \frac{dv}{du}\right); \\ \varphi_2 = u - v. \end{cases}$$

Dazu

6) $$F(u, v) = 0.$$

Eliminiert man daher aus den Gleichungen 4) und 6) resp. 5) und 6) die Parameter u und v, so sind die Resultanten der Elimination allemal die Gleichungen zweier entsprechender Rollkurven.

Im allgemeinen wird man durch beide Eliminationen dieselbe Gleichung in Polarkoordinaten finden, d. h. R_1 und R_2 sind im allgemeinen Teile ein und derselben Kurve R. Ist F eine algebraische Kurve, so ist es auch die Kurve R, deren Ordnung sich leicht bestimmen lässt.

Sei ν die Ordnung und μ die Klasse von F, so existieren zunächst zwischen F und D 2ν gemeinschaftliche Schnittpunkte S, wobei jedesmal der eine der beiden Punkte P nach O, der andere nach S fällt, d. h.:

1. Der Punkt O ist im allgemeinen ein 2ν-facher Punkt von R.

Findet dagegen im Schnittpunkt S zugleich Berührung zwischen F und D statt, so sondert sich die Gerade OS zweimal aus. Es ergiebt sich daher:

2. Jede einfache Berührung zwischen F und D reduziert die Ordnung der Kurve R um zwei Einheiten.

Jeder Strahl durch O trifft ferner D in zwei Punkten, von welchen aus je μ Tangenten an F gelegt werden können. Es liegen also auf jedem Strahl durch O noch 2μ weitere Punkte der Kurve R, d. h.:

3. Die Ordnung der Kurve R ist $n = 2(\nu + \mu)$.

Fällt dagegen einer der Punkte S in einen der Kreispunkte J und J_1 im Unendlichen, so wird die Konstruktion des Punktes P auf OS unbestimmt, d. h.:

4. Jedesmal wenn die Kurve F durch die Kreispunkte geht, reduziert sich die Ordnung von R wieder um zwei Einheiten.

Die Kurven F und D haben ferner 2μ gemeinschaftliche Tangenten; berühren sich F und D selber nicht, so fallen die beiden Punkte P ins Unendliche. Daraus folgt:

5. Von O aus gehen im allgemeinen 2μ Asymptotenrichtungen der Kurve R nach den auf D liegenden Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten der Kurven F und D.

Ein unendlich ferner Punkt von R kann aber noch in anderer Weise entstehen. F selbst hat ν Asymptoten, welche D in ν Punktepaaren treffen, deren Radien der Kurve R auf der unendlich fernen Geraden begegnen. Wir schliessen daraus:

6. Die Geraden von O nach den Schnittpunkten des Distanzkreises mit den Asymptoten der Teilungskurve sind 2ν weitere Asymptotenrichtungen der Kurve R.

Damit sind die $2n$ unendlich fernen Punkte von R aufgezählt. Legt man nun insbesondere aus den Kreispunkten J und J_1 die Tangenten an die Kurve F, welche sich paarweise in den Brennpunkten derselben begegnen, so sind die Geraden OJ und OJ_1 die Asymptoten des Distanzkreises und es fallen daher die aus den vorigen Tangenten entspringenden Schnittpunkte dieser Strahlen mit R paarweise zusammen. OJ und OJ_1 sind daher μ-fache Tangenten von R, mit anderen Worten:

7. Der Punkt O ist im allgemeinen ein μ-facher Brennpunkt von R.

Die angegebenen Anzahlen können Modifikationen erleiden, falls die Kurve F zum Kreise D entweder im Endlichen oder in den Kreispunkten in besonderer Beziehung steht; es kann R auch eine zirkulare Kurve werden, falls F die unendlich ferne Gerade berührt.

Schliessen wir im Folgenden besondere Lagen zwischen F und D, sowie Wendepunkte der Teilungskurve, d. h. retrograde Bewegungen beider Rollkurven aus, so wird man sagen können:

Aus jeder ganz innerhalb des Kreises D liegenden, geschlossenen Kurve F entspringen zwei Kurven R_1 und R_2 für Berührung von aussen. Ist F nach aussen stetig konvex und besitzt F zudem eine durch O gehende Symmetrieaxe, so sind R_1 und R_2 geschlossene, zu

dieser Axe symmetrisch liegende Ovale. Da aber R_2 mit seiner Ebene umgewendet werden muss, so sind nach der Umwendung R_1 und R_2 kongruente Kurven.

Ist dagegen F nach aussen stetig konkav, so muss F eine bestimmte Anzahl von Rückkehrtangenten besitzen. Durchläuft nun die Tangente einmal die ganze Kurve F, so hat sie sich um eine gerade oder ungerade Anzahl von zwei rechten Winkeln gedreht, je nachdem die Anzahl der Rückkehrtangenten gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle sind R_1 und R_2 zwei getrennte geschlossene Kurven, im zweiten Falle setzen sich R_1 und R_2 zu einer einzigen geschlossenen Kurve zusammen, und wenn die Tangente $A_1 A_2$ die Kurve F zum zweiten Mal durchläuft, so beschreibt P_1 den Teil R_2 und P_2 den Teil R_1. Die Kurven R_1 und R_2 sind also in Deckung, d. h. nach der Umwendung von R_2 sind R_1 und R_2 symmetrisch gleich. Es ergiebt sich daher:

Jede ganz im Innern von D liegende nach aussen konvexe geschlossene Linie F mit orthogonaler Symmetrieaxe durch O führt auf zwei getrennte kongruente Rollkurven; jede nach aussen konkave Kurve F mit ungerader Anzahl von Spitzen ergiebt symmetrisch gleiche Rollkurven.

Liegt F ganz ausserhalb von D, so werden die Kurven R sich im allgemeinen ins Unendliche erstrecken, es sei denn, dass F und D keine gemeinschaftlichen reellen Tangenten haben. Dieser letztere Fall tritt ein, wenn F nach aussen stetig konkav ist und zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen den Kreis D berührt. Da in diesem Falle die Differenz der Radienvektoren r_1 und r_2 konstant ist, so rollen R_1 und R_2 bei Berührung von Innen.

In dem Falle, wo F teils innerhalb teils ausserhalb von D liegt, bilden R_1 und R_2 einen zusammenhängenden Linienzug, der befähigt ist mit sich selbst zu rollen, teils für innere teils äussere Berührung. Im allgemeinen werden die Kurven R keine vollständigen Umdrehungen ausführen, sondern einander nur innerhalb bestimmter Winkelräume treiben können, welche durch die nach den unendlich fernen Punkten laufenden Radien begrenzt sind, in welchen die Teile R_1 und R_2 zusammenhängen. Neben diesem reellen können noch imaginäre Bestandteile auftreten, herrührend von denjenigen Teilen von F, deren Tangenten D nicht erreichen, ja die ganze Kurve R kann imaginär werden, ohne dadurch in ihrer Existenz aufzuhören.

Es ist ferner evident, dass jedes Rollkurvenpaar aus unendlich vielen Teilungskurven F abgeleitet werden kann, die alle aus der ursprünglichen dadurch hervorgehen, dass das eine der beiden Radiensysteme um den Punkt O um einen beliebigen Winkel vor- oder rückwärts gedreht wird.

Teilt man ferner die vom Schnittpunkt A_0 der Polaraxe mit dem Kreise D gemessenen Bogen $A_0 A_1$ und $A_0 A_2$ jeder Tangente von F

stets im gleichen konstanten Verhältnis, so entsteht eine neue Enveloppe F', deren Tangenten vom Berührungspunkt im gleichen Verhältnis geteilt werden, wie diejenigen der Kurve F. Die aus zwei entsprechenden Tangenten der Kurven F und F' hervorgehenden Punktepaare $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$ haben daher gleiche Radienvektoren, aber verschiedene Polarwinkel, mit anderen Worten:

Ersetzt man in den Polargleichungen zweier Rollkurven die Polarwinkel φ_1 und φ_2 durch $n\varphi_1$ und $n\varphi_2$, so erhält man jedesmal eine Gruppe unendlich vieler neuer Rollkurvenpaare.

Will man nun auch die Abweichung ϑ_1 der Tangente gegen den Radiusvektor, sowie den Krümmungsradius ϱ_1 im Punkte P_1 der Kurve R_1 durch Rechnung finden, so beachte man, dass

$$w_{1n} = r_1 \omega_1 = a\left[1 - \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\omega_0,$$

$$w_{1r} = -a\frac{d^2v}{du^2}\cdot\omega_0,$$

sodass, wenn die aufeinander folgenden Ableitungen von v nach u mit v', v'', v''' bezeichnet werden,

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{w_{1n}}{w_{1r}} = \frac{1-v'^2}{-v''} = -\operatorname{tg}\vartheta_2$$

erhalten wird.

Aus dieser Gleichung folgt jetzt:

$$\frac{d\vartheta_1}{du} = \frac{(1-v'^2)v''' + 2v'v''^2}{(1-v'^2)^2 + v''^2}$$

und somit für den Krümmungsradius ϱ_1:

$$\varrho_1 = \frac{\frac{ds}{du}}{\frac{d\varphi_1}{du} + \frac{d\vartheta_1}{du}} = \frac{\left(\frac{ds}{du}\right)^3}{N}$$

wobei

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = (1-v'^2)^2 + v''^2,$$

$$N = (1-v'^2)[(1-v'^2)(1+v') + v'''] + (1+3v')v''^2$$

zu setzen ist.

Ersetzt man in diesem Ausdruck für ϱ_1 den Winkel v durch $-v$, so geht φ_1 in φ_2, ϑ_1 in ϑ_2 und daher ϱ_1 in ϱ_2 über.

Schliesst also beispielsweise die Tangente der Kurve R_1 gegen die Tangente der Teilungskurve den konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ein, so ist:

$$\vartheta_1 = \pi - (v - \alpha), \quad \vartheta_2 = (v - \alpha);$$

also:

$$\varphi_1 + \vartheta_1 = \pi + (u + \alpha), \quad \varphi_2 + \vartheta_2 = u - \alpha;$$

d. h. es ist dann auch

$$\varrho_1 = \varrho_2.$$

Zur Bestimmung der Teilungskurve hat man die Gleichung:

$$\frac{v''}{v'^2 - 1} = -\operatorname{cotg}(v - \alpha),$$

woraus sich als Gleichung der Kurve F ergiebt:

$$\cos(u - u_0) = \frac{a}{c}\cos(v - \alpha).$$

Es wird sich zeigen, dass dies die Gleichung eines Kegelschnittes ist, der D doppelt berührt, indessen R_1 und R_2 kongruente Kegelschnitte sind, die O zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

Ein Wendepunkt der Kurve R_1 entsteht nun, wenn N verschwindet. Diese Gleichung

$$N = 0$$

stellt in den Koordinaten u und v eine neue Enveloppe N dar, welche die Kurve W zur zweiten Evolute besitzt. Den Schnittpunkten der Kurven E' und W korrespondieren dann die gemeinsamen Tangenten der Kurven F und N, welche somit zu den Wendepunkten der Kurve R_1 führen.

Verschwindet die Gleichung $N = 0$ identisch, so fällt die Kurve N mit der Kurve F zusammen und jeder Punkt von R_1 ist ein Wendepunkt, d. h. R_1 ist eine Gerade. In diesem Falle ist daher, falls die Polaraxe normal zur Geraden R_1 steht:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{1 - v'^2}{-v''} = \operatorname{cotg}(u + v),$$

also:

$$\frac{dv'}{v' - 1} = \operatorname{tg}(u + v)\,d(u + v),$$

oder

7)
$$1 - v' = \frac{-k'}{\cos(u + v)}.$$

Bezeichnet also $2b$ den Abstand der Geraden R_1 von O, so ist

$$r_1 = a(1 - v') = \frac{2b}{\cos\varphi_1}$$

die Gleichung von R_1, d. h. es ist

$$k' = -\frac{2b}{a}$$

zu setzen. Unter dieser Voraussetzung nimmt 7) die Form an:

$$b \cdot \frac{1 + v'}{1 - v'} = a\cos(u + v) - b,$$

welche Gleichung durch Integration die Gleichung der Teilungskurve F ergiebt, nämlich im Falle der äusseren Berührung:

$$\frac{e^{k(u - v)} + e^{-k(u - v)}}{2} = \frac{b\cos(u + v) - a}{b - a\cos(u + v)},$$

wo zur Abkürzung, da $b < a$,

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} = k$$

gesetzt wurde.

Setzt man in dieser Gleichung:

$$\cos(u+v) = \frac{2b}{r_1} = \frac{2b}{2a - r_2}$$

und $u - v = \varphi_2$, so erhält man die Gleichung der Rollkurve R_2:

$$r_2 = 2\,\frac{a^2 - b^2}{a + b\,\dfrac{e^{k\varphi_2} + e^{-k\varphi_2}}{2}}.$$

Diese Kurve, welche ganz im Endlichen liegt, besitzt in O einen doppelten Windungspunkt, sodass mit Annäherung der rotierenden Geraden R_1 an O_2 die Winkelgeschwindigkeit ω_2 unendlich gross wird. Rotiert umgekehrt R_2 mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_2 um O_2, so wird mit Annäherung der Geraden R_1 an die Axe $O_1 O_2$ die Winkelgeschwindigkeit ω_1 unendlich klein. Die Verzeichnung der Kurve geschieht am einfachsten mit Hilfe des Krümmungsradius, der sich nach der Proportion:

$$\frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{r_1}{2a\sin\vartheta_1}$$

leicht konstruieren lässt. Wählt man nun als Kurve R_1 ein reguläres Fünfeck, welches dem Kreis vom Radius $2b$ umschrieben ist, so ist die Entfernung $O_1 O_2 = 2a$ derart zu bestimmen, dass auch R_2 eine aus fünf kongruenten Bogen bestehende Kurve ist. Der zu jedem der fünf Bogen gehörende halbe Centriwinkel hat daher den Wert $\frac{\pi}{5}$ und zur Bestimmung des Verhältnisses $\lambda = \frac{a}{b}$ dient daher die Gleichung:

$$\frac{e^{\sqrt{\lambda^2-1}\cdot\frac{\pi}{5}} + e^{-\sqrt{\lambda^2-1}\cdot\frac{\pi}{5}}}{2} - \frac{\cos\frac{\pi}{5} - \lambda}{1 - \lambda\cos\frac{\pi}{5}} = 0,$$

welche, nach bekannter Näherung aufgelöst, ergiebt, dass

$$2a = 2{,}15547\ldots 2b$$

gewählt werden muss.

Im Folgenden mögen noch einige spezielle Fälle betrachtet werden, wo die Teilungskurve F a priori durch eine Gleichung in den Koordinaten u und v gegeben ist.

Es sei:

a) $$F = v - nu = 0,$$

wo n eine beliebige Zahl bedeutet. In diesem Falle ist

$$r_1 = a(1-n), \quad r_2 = a(1+n);$$

d. h. die Kurven R_1 und R_2 sind Kreise, auf welchen sich die Punkte P_1 und P_2 mit der gleichen Geschwindigkeit

$$w_1 = w_{1\,n} = a(1 - n^2)$$

bewegen. Legt man nun durch die Punkte Q_1 und Q_2 den mit D konzentrischen Kreis Q, so ist sein Radius:

$$r = r_2 - r_1 = n \cdot 2a,$$

also konstant für jede Lage des Paares $Q_1 Q_2$. Dieser Kreis wird in Q_1 und Q_2 berührt von den Kreisen P_1 und P_2, welche P_1 resp. P_2 zum Mittelpunkt und r_2 resp. r_1 zum Radius haben. Beide Kreise schneiden sich im Punkte F, und da dieser Punkt sich auf den Kreisen P_1 und P_2 mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, mit welcher die Mittelpunkte P_1 und P_2 derselben auf den Kreisen R_1 und R_2 fortschreiten, so rollen die Kreise P_1 und P_2 gleichzeitig auf dem Kreise Q.

Es ergiebt sich somit bezüglich der Kurve F folgendes Resultat:*

Bewegen sich zwei Punkte A_1 und A_2 auf einem Kreise vom Radius $2a$ mit proportionalen Geschwindigkeiten

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1+n}{1-n},$$

so umhüllt die Sehne $A_1 A_2$ eine Epicykloide oder Hypocykloide, je nachdem n im Intervall (-1) bis $(+1)$ liegt oder nicht. Die nämliche Kurve wird auch beschrieben von einem Punkte F, der entweder einem Kreis P_1 vom Radius:

$$r_1 = a(1-n),$$

oder einem solchen P_2 vom Radius:

$$r_2 = a(1+n)$$

angehört, welcher für äussere resp. innere Berührung rollt auf einem festen Kreis Q vom Radius der Differenz:

$$r = r_2 - r_1 = 2a \cdot n.$$

Da im weiteren $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ konstant bleibt, so fällt K mit G zusammen, d.h.: G ist die Evolute E von F. Da aber der Punkt G die Strecke $Q_1 Q_2$ wieder im Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ teilt, während die Punkte Q_1 und Q_2 den festen Kreis Q durchlaufen, so ist auch G eine Cykloide, die gegen F um einen rechten Winkel im positiven Sinn gedreht und im Verhältnis $n:1$ verjüngt ist.

Da ferner K mit G zusammenfällt und überdies $w_{1r} = 0$ also auch $p_{1r} = 0$ ist, so liegt K' in G_0. Die Kurve G_0 ist daher die zweite Evolute E′ von F, die somit mit der Originalkurve bezüglich des Punktes O ähnlich und ähnlich gelegen und im Verhältnis $n^2:1$ verjüngt ist.

Bewegen sich daher zwei Punkte A_1 und A_2 auf einem Kreise D vom Radius $2a$ mit proportionalen Geschwindigkeiten

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1+n}{1-n},$$

so wird der erste Krümmungsmittelpunkt von F vom Berührungspunkt und der zweite Krümmungsmittelpunkt vom

* Vergl. Burmester a. a. O. Bd. I, 1. Lief. S. 166 flg.

ersten durch die Radien der Punkte A_1 und A_2 harmonisch getrennt. Ist f der momentane Abstand der Tangente $A_1 A_2$ von O, so sind

$$\varrho = f \cdot (1 - n^2) \quad \text{und} \quad \varrho' = f \cdot n (1 - n^2)$$

die Längen des ersten und zweiten Krümmungsradius.

b) Die Teilungskurve F werde gebildet von einem Strahlbüschel am Punkte F'.

Da jetzt für alle Punkte P der Kurve R:

$$OP \pm PF = 2a$$

ist, so sind R_1 und R_2 zwei in Drehung befindliche Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem F innerhalb oder ausserhalb des Kreises D liegt. Die Sehnen $P_1 P_2$ jedes Paares entsprechender Punkte P bilden das Durchmesserbüschel des Kegelschnittes; die Tangenten in zwei korrespondierenden Punkten P sind daher parallel, nämlich zur Tangente $A_1 A_2$ normal. Denn da

$$FG = KG, \text{ so ist } \operatorname{tg} \vartheta_1 = - \operatorname{tg} v, \text{ also } \vartheta_1 = \pi - v.$$

Es ist daher

$$\vartheta_1 + \varphi_1 = \pi + u,$$

d. h. es ist du der Kontingenzwinkel der Kurve R und es ergiebt sich daher hier eine direkte Bestimmung des Krümmungsradius ϱ_1 ohne Kenntnis der Beschleunigung p_1, des Punktes P_1, nämlich:

$$\varrho_1 = \frac{w_1}{\sin v}.$$

Trägt man daher die Geschwindigkeit w_1 auf dem Brennstrahl $P_1 F'$ von P_1 nach W_1 ab und zieht $W_1 K_1$ normal zu $P_1 F_1$, so trifft diese Normale die Ellipsennormale n_1 im Krümmungsmittelpunkt K_1.

Bezeichnet also n die Länge der Ellipsennormale, ε ihren Winkel gegen die Brennstrahlen $P_1 O$ und $P_1 F$, so ist:

$$n = w_{1\,n} \quad \text{und} \quad \cos \varepsilon = \sin v,$$

Daher

$$n = w_1 \cdot \cos \varepsilon, \quad \text{also} \quad \varrho_1 = \frac{w_1}{\sin v} = \frac{n}{\cos^2 \varepsilon}$$

der bekannte Ausdruck für den Krümmungsradius.

Verlegt man zur Ermittelung der Gleichung der Kurve R den Punkt F' in den Abstand $2c$ auf die Polaraxe, so heisst in den Koordinaten u und v die Gleichung des Strahlbüschels F:

$$F = a \cos v - c \cos u = 0.$$

Somit ist

$$r_1 = a\left(1 - \frac{c \sin u}{a \sin v}\right),$$

$$r_2 = a\left(1 + \frac{c \sin u}{a \sin v}\right),$$

d. h.:

1) $$r_1 \cdot r_2 \cdot \sin^2 v = a^2 \sin^2 v - c^2 \sin^2 u.$$

Aus der Gleichung des Büschels folgt anderseits:

2) $$a^2 \sin^2 v - c^2 \sin^2 u = a^2 - c^2$$

und endlich ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\varphi_1 = u + v,$$

3) $$a - c \cos \varphi_1 = r_2 \sin^2 v.$$

Multipliziert man daher die drei Gleichungen mit einander, so erhält man die Gleichung der beiden vereinigten Ellipsen R:

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \varphi_1} = \frac{b^2}{a - c \cos \varphi_1},$$

wo a und b die Halbaxen, c die lineare Exzentrizität bedeutet.

Ist wie gewöhnlich die grosse Halbaxe a, sowie das Verhältnis der grössten zur kleinsten Winkelgeschwindigkeit gegeben und mit ω bezeichnet, so folgt aus der Gleichung:

$$\frac{a-c}{a+c} = \omega,$$

$$c = a \frac{1-\omega}{1+\omega}, \quad \text{also auch} \quad b = 2a \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega},$$

wonach die beiden entsprechenden Ellipsen gezeichnet werden können. Wird jetzt die Ellipse R_2 mit dem Brennpunkt F festgehalten, indessen die Ellipse R_1 mit dem Radiensystem um den Winkel 2α in positivem Sinne gedreht wird, wodurch der Brennpunkt F in die Lage F' gelangen möge, so findet man als Gleichung der neuen Kurve F':

$$F' = a \cos(v - \alpha) - c \cos(u - \alpha) = 0,$$

der wir schon früher begegnet sind. Da die Kurve F' aber jetzt ein geometrisches Erzeugungsgesetz besitzt, indem sie umhüllt wird vom einen Schenkel eines Winkels von der konstanten Öffnung α, dessen anderer Schenkel stets durch den Punkt F' geht, und dessen Scheitel den Kreis D durchläuft, so ist sie nach einem Poncelet'schen Theorem eine Ellipse, welche F und F' zu Brennpunkten hat und den Kreis D doppelt berührt.

Wählt man somit als Teilungskurve eine D doppelt berührende Ellipse, so sind auch die Rollkurven R_1 und R_2 kongruente Ellipsen von der Hauptaxe $2a$, welche O zum gemeinsamen und je einen Brennpunkt von F zum anderen Brennpunkt haben.

Den Teilungskurven

$$F = a \cos n v - c \cos n u = 0$$

entspricht nun die Gruppe der Rollkurven:

$$r_1 = \frac{b^2}{a - c \cos n \varphi_1},$$

die wohl die am längsten bekannte Kurvengruppe dieser Art darstellt.

Für $n = 2$ beispielsweise hat F die Gleichung:

$$a \cos 2v - c \cos 2u = 0,$$

oder

$$(a \cos v - \sqrt{ac} \cos u)(a \cos v + \sqrt{ac} \cos u) = \frac{a(a-c)}{2},$$

welche Gleichung ausdrückt, dass das Produkt der Abstände jeder Tangente von zwei festen Punkten der Polaraxe konstant ist, d. h. dass die Kurve F eine Ellipse ist, deren Brennpunkte im Abstande

$$2\gamma = \pm 2\sqrt{ac}$$

von O auf der Polaraxe liegen. Da ihre Halbaxenquadrate

$$\alpha^2 = 2(a+c)a \quad \text{und} \quad \beta^2 = 2(a-c)a$$

sind, so hat die Ellipse F den Kreis D zum Ort rechtwinkliger Tangentenpaare. Die aus F entspringenden Kurven R_1 und R_2 sind zwei doppelt orthogonal-symmetrische Kurven vierter Ordnung, welche sich in Deckung befinden.

Für $n = \frac{1}{2}$ hat dagegen F die Gleichung:

$$a \cos \frac{v}{2} - c \cos \frac{u}{2} = 0,$$

welcher man die Form:

$$a \cos v - \frac{c^2}{a} \cos u = \frac{c^2 - a^2}{a}$$

geben kann, und welche somit einen Kreis darstellt, welcher seinen Mittelpunkt M im Abstande

$$2b = \frac{2c^2}{a}$$

von O auf der Polaraxe und den Radius:

$$2r_0 = 2\frac{a^2 - c^2}{a} = 2(a-b)$$

hat, d. h. den Kreis D berührt.

Diesem Kreis als Teilungskurve entspricht daher als Rollkurve die Kurve vierter Ordnung mit Knotenpunkt und Schleife:

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\frac{\varphi_1}{2}} = a\,\frac{a-b}{a \mp \sqrt{ab}\cos\frac{\varphi_1}{2}},$$

welcher wir im folgenden Beispiel nochmals begegnen werden.

c) Die Teilungskurve F ist ein um den Punkt M beschriebener Kreis vom Radius $2r_0$, welcher ganz im Innern von D liegt.

Figur 2 (Taf. I) zeigt die konstruktive Ausführung und Zeichnung der Rollkurven durch Punkte und Tangenten mittelst der Geschwindigkeiten w_{1n} und w_{1r}. Das Gesamterzeugnis ist eine algebraische Kurve sechster Ordnung mit Doppelpunkt und Brennpunkt in O, welche aus zwei getrennten symmetrisch gleichen und geschlossenen Ovalen besteht. Dreht sich R_1 gleichförmig um den Punkt O_1, so erreicht mit

jedem Umlauf die Winkelgeschwindigkeit ω_2 ein Maximum und ein Minimum, nämlich dann, wenn der kleinste resp. grösste Radius r_2 die Centrale passiert. Um diese beiden extremen Werte von r zu finden, welche aber jetzt nicht mehr in die nämliche Richtung fallen wie bei der Ellipse, beachte man, dass in diesem Falle zwischen den Kurven G und E Berührungen stattfinden, d.h., dass G mit dem Mittelpunkt M von F zusammenfallen muss. Bezeichnet also H den Schnittpunkt der Tangente A_1A_2 mit der Centrale OM, so bilden auf dieser Tangente die Punktepaare A_1A_2 und FH eine harmonische Gruppe, mit anderen Worten, der Punkt H besitzt in Bezug auf beide Kreise F und D die nämliche Polare.

Es sind somit die gesuchten Stellen H die Grenzpunkte des durch die Kreise F und D bestimmten Kreisbüschels.

Legt man daher aus den beiden Grenzpunkten H die Tangentenpaare h_1 und h_2 an die Kurve F, so erhält man durch diese die extremen Werte der Radien r_1 oder r_2. Die beiden Punkte H sind nur so lange reell, als der Kreis F ganz innerhalb oder ganz ausserhalb von D liegt, in beiden Fällen befindet sich der eine der Punkte H ausserhalb, der andere innerhalb von F, d.h. die Kurven R_1 und R_2 haben nur einen grössten und einen kleinsten Radius, also keine Wendepunkte. Sind N_1 und M_1, ebenso N_2 und M_2 die Endpunkte dieser extremen Radien, so liegen sie in gleicher auf der Kurve gemessener Entfernung, von denjenigen Punkten J_1 und L_1 resp. J_2 und L_2, denen der Radius a zukommt, und welche den Umfang der Kurven halbieren. Dreht sich der Radius der Kurve R_1 im schraffierten Teil, so durchläuft der Radius von R_2 den entsprechenden nicht schraffierten Teil. Ist das Verhältnis der grössten zur kleinsten Winkelgeschwindigkeit und überdies der Winkel zwischen dem grössten und kleinsten Kurvenradius vorgegeben, so ist dadurch der Kreis F vollkommen bestimmt und die Kurven R_1 und R_2 können demnach verzeichnet werden.

Verlegt man den Mittelpunkt M von F in den Abstand $2b$ von O auf die Polaraxe, so heisst die Gleichung des Kreises vom Radius $2r_0$ je nachdem der Durchmesserendpunkt $2b + 2r_0$ oder $2b - 2r_0$ als Anfangspunkt figuriert:

$$1)\qquad F = a\cos v - b\cos u \mp r_0 = 0,$$

sodass beide Zeichen von r_0 den nämlichen Kreis darstellen. Es ist nun:

$$2)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{a\sin v - b\sin u}{\sin v}, \\ r_2 = \dfrac{a\sin v + b\sin u}{\sin v}, \end{cases}$$

oder da nach 1) und für das obere Zeichen von r_0:

$$(a\sin v - b\sin u)(a\sin v + b\sin u) = a^2 - b^2 + r_0{}^2 - 2ar_0\cos v,$$

$$3)\qquad r_1\cdot r_2\sin^2 v = a^2 - b^2 + r_0{}^2 - 2ar_0\cos v.$$

Anderseits folgt aus der Gleichung:

$$\varphi_1 = u + v,$$

4) $$a - b\cos\varphi_1 - r_0\cos v = r_2\sin^2 v,$$

also durch Multiplikation von 3) und 4):

$$r_1(a - b\cos\varphi_1 - r_0\cos v) = a^2 - b^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos v,$$

d. h.:

5) $$r_2 r_0 \cos v = a^2 - b^2 - r_1(a - b\cos\varphi_1) + r_0^2 = E + r_0^2.$$

Eliminiert man jetzt zwischen 4) und 5) den Parameter v, so folgt:

6) $$r_2^2\sin^2 v = r_2(a - b\cos\varphi_1) - E - r_0^2 = H - r_0^2,$$

und indem man schliesslich 5) quadriert und zu 6) addiert, die Resultante der Elimination in der Form:

$$E^2 - r_0^2 L = 0,$$

wo

$$E = a^2 - b^2 - r_1(a - b\cos\varphi_1)$$

$$L = r_2 - 2E - H = (r_1 - a - b\cos\varphi_1)^2 + b^2\sin^2\varphi_1.$$

zu setzen ist.

Diese Gleichung, welche die vereinigten Kurven R_1 und R_2 zugleich darstellt, reduziert sich für $r_0 = 0$ auf die Ellipse E, für $r_0 = \infty$ auf die rein imaginäre Linie L. Berührt speziell F den Distanzkreis für

$$\pm r_0 = a - b,$$

so sondert sich die Polaraxe zwei Mal aus und es erscheint die im vorigen Beispiel aufgestellte Gleichung der beiden vereinigten Kurven vierter Ordnung:

7) $$\left[r_1 - \frac{a^2 - ab}{a - \sqrt{ab}\cos\frac{\varphi_1}{2}}\right]\left[r_1 - \frac{a^2 - ab}{a + \sqrt{ab}\cos\frac{\varphi_1}{2}}\right] = 0.$$

Der Schar von Teilungskurven:

$$a\cos nu - b\cos nv \mp r_0 = 0$$

entpricht im weiteren die Schar der Rollkurven:

$$E_1^2 - r_0^2 L_1 = 0,$$

wo

$$E_1 = a^2 - b^2 - r_1(a - b\cos n\varphi_1),$$

$$L_1 = (r_1 - a - b\cos n\varphi_1)^2 + b^2\sin^2 n\varphi_1$$

bedeutet.

Werden also speziell die von der Polaraxe aus gemessenen Bogen A_0A_1 und A_0A_2 halbiert, so ist $n = 2$ zu setzen und die Gleichung der neuen Teilungskurve F′ ist daher

$$a\cos 2v - b\cos 2u \mp r_0 = 0$$

oder

$$(a\cos v - \sqrt{ab}\cos u)(a\cos v + \sqrt{ab}\cos u) = \frac{a}{2}(a - b \pm r_0);$$

d. h. die Schar der konzentrischen Kreise um den Punkt M transformiert sich in eine Schar konfokaler Ellipsenpaare, deren Brennpunkte im Abstande:

$$2\gamma = \pm 2\sqrt{ab}$$

von O auf der Polaraxe liegen. Jedes dieser Ellipsenpaare führt im allgemeinen auf eine Kurve R von der achten Ordnung mit vierfachem Punkt und Doppelbrennpunkt in O mit der Gleichung:

$$8)\qquad \begin{cases} [a^2 - b^2 - r_1(a - b\cos 2\varphi_1)]^2 - r_0^2[(r_1 - a - b\cos 2\varphi_1)^2 \\ \qquad\qquad + b^2\sin^2 2\varphi_1] = 0. \end{cases}$$

Speziell für $r_0 = b - a$ erhält man als Kurve F′ die beiden Brennpunkte des konfokalen Systems:

$$a\cos v - \sqrt{ab}\cos u = 0 \quad \text{und} \quad a\cos v + \sqrt{ab}\cos u = 0$$

somit als Rollkurven zwei kongruente doppelt gelegte Ellipsen.

Wird dagegen $r_0 = a - b$ gesetzt, so folgt als Gleichung von F′:

$$(a\sin v - \sqrt{ab}\sin u)(a\sin v + \sqrt{ab}\sin u) = 0,$$

welche aussagt, dass D der Hauptkreis der Ellipse F′ ist, d. h., dass F′ den Distanzkreis doppelt berührt. Die Kurve R zerfällt daher in die nämlichen zwei Ellipsen, die aber nicht mehr doppelt gelegt sind, und je einen der beiden Brennpunkte von F′ zum Brennpunkt haben. Die Gleichungen dieser Kurven ergeben sich entweder aus oben stehender Gleichung 8) oder einfacher aus Gleichung 7), in welcher die Spezialisierung $r_0 = a - b$ bereits ausgeführt und daher nur der Winkel $\frac{\varphi_1}{2}$ durch φ_1 zu ersetzen ist. Die Kurve R hat demnach die Gleichung:

$$\left(r_1 - \frac{a^2 - ab}{a - \sqrt{ab}\cos\varphi_1}\right)\left(r_1 - \frac{a^2 - ab}{a + \sqrt{ab}\cos\varphi_1}\right) = 0,$$

welche in der That die beiden fraglichen Ellipsen R_1 und R_2 darstellt.

4.

Betrachten wir schliesslich noch den Fall, wo der eine der beiden fixen Drehpunkte, z. B. O_1 ins Unendliche fällt, d. h., wo die Kurve R_1 eine Parallelverschiebung ausführt, indessen die andere R_2 sich um ein im Endlichen liegendes Centrum dreht, so bleibt das bisher angewandte Verfahren auch jetzt in allen Teilen fortbestehen. Der Distanzkreis wird zur geraden Linie D, der Punkt O_1 geht über in die Normalenrichtung der Linie D.

Ist (Figur 3 Taf. I) F die gegebene Teilungskurve, so schneidet irgend eine ihrer Tangenten die Gerade D in einem im Endlichen liegenden Punkt A_1, indessen der Punkt A_2 im Unendlichen liegt. Zieht man daher die zugehörigen Radien aus O, d. h. aus O_1, so liegt OA_2 der ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen. Aus dem Radius OA_1 ergiebt sich nun zunächst der Punkt P_1, indem man diesen Radius mit der Mittelsenkrechten der Strecke FA_1 zum Schnitt bringt, und es entsteht auf diese Weise die Kurve R_1, also die Zahnstange.

Beachtet man aber, dass jedes Mal die Strecke $P_1 F$ sowohl der Grösse als der Richtung und dem Sinne nach übereinstimmt mit

$$r_2 = O_2 P_2,$$

so erhält man demnach auch die Kurve $\mathfrak{R}_2$ oder das Rad, indem man alle Strecken $P_1 F$ parallel zu sich selbst an einen beliebigen Drehpunkt O_2 verschiebt.

Wendet man zur Konstruktion der Tangenten in P_1 und P_2 das frühere Verfahren an, so ist zunächst die normale Geschwindigkeitskomponente w_{1n} zu suchen. Man ziehe also $P_1 F_1$ parallel $A_1 A_2$ bis zum Radiusvektor OF der Teilungskurve, so ist

$$w_{1n} = P_1 F_1 = n,$$

was auch ohne weiteres klar ist, das $W_1 = n$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher der Punkt A_1 die Linie D durchläuft. Um ferner die radiale Komponente zu erhalten, gebe man zunächst auf der Normalen n von F das Geschwindigkeitscentrum G an. Es ist aber der vierte harmonische Punkt zu F bezüglich des Paares $Q_1 Q_2$ der gesuchte Punkt G, d. h., da Q_2 im Unendlichen liegt, G ist der symmetrische Punkt zu F bezüglich des Punktes Q_1. Ist sodann K der Krümmungsmittelpunkt der Stelle F, so ist

$$w_{1r} = \frac{1}{2} GK$$

die normale Komponente von w_1. Sie ist auf dem Radius des Punktes P_1 nach O hin aufzutragen, wenn K mit F auf der nämlichen Seite von G liegt und umgekehrt.

Durch ebenso leichte Modifikation findet man auch die Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2, indessen soll hier nur noch die analytische Formulierung der Aufgabe kurz erwähnt werden.

Man wähle auf der Geraden D irgendwo den Pol O_2, nehme die positive Richtung der Geraden D, welche wir zur x-Axe machen, nach links, die positive Axe y durch O_2 nach unten. Ebenso wähle man O_2 als Pol, D als Polaraxe x eines Koordinatensystems für polare Linienkoordinaten. Ist dann in Bezug auf dieses System:

$$r = f(u)$$

die Gleichung der Teilungskurve F und bezeichnet D den Fusspunkt des von O_2 auf die Tangente $A_1 A_2$ gefällten Lotes, so ist:

$$DF = \frac{dr}{du} = r',$$

und man hat daher zunächst für die rechtwinkligen Koordinaten x und y des Punktes P_1:

1) $$x = \frac{r}{\cos u} = \frac{f(u)}{\cos u},$$

2) $$2y = \frac{r' \cos u + r \sin u}{\cos^2 u} = \frac{dx}{du}.$$

Diese beiden Gleichungen ergeben somit die Kurve R_1 mittelst einer Parameterdarstellung durch den Winkel u.

Für die Polarkoordinaten der Kurve R_2 dagegen hat man, falls der Einfachheit der Schreibweise halber die Winkel φ_2 von der positiven y-Axe aus in positivem Sinne gerechnet werden:

$$2r_2 = 2y = \frac{d}{du}\left(\frac{f(u)}{\cos u}\right),$$
$$\varphi_2 = 2u,$$

für welche Gleichungen man einfacher schreibt:

3) $$r_2 = \frac{d}{d\varphi_2}\left[\frac{f\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi_2}{2}}\right].$$

Wird R_2 noch mit der Ebene umgelegt, so stellen die Gleichungen 1), 2) und 3) zwei entsprechende Rollkurven dar.

a) Wählt man beispielsweise als Teilungskurve F einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Abstande a nach positiver Seite der y-Axe liegt und der D nicht schneidet, also mit einem Radius $r_0 < a$, so heisst seine Gleichung:

$$r = a\sin u - r_0.$$

Daher hat man als Gleichungen der Kurve R_1:

$$x = \frac{a\sin u - r_0}{\cos u},$$
$$2y = \frac{a - r_0\sin u}{\cos^2 u};$$

für die Kurve R_2 dagegen die Gleichung in Polarkoordinaten:

$$r_2 = \frac{a - r_0\sin\frac{\varphi_2}{2}}{1+\cos\varphi_2}.$$

Ist speziell der Radius $r_0 = 0$, d. h. F ein Strahlbüschel, so erhält die Kurve R_1 die Gleichung:

$$y = \frac{a}{2} + \frac{x^2}{2a},$$

die Kurve R_2 dagegen:

$$r_2 = \frac{a}{1+\cos\varphi_2}.$$

Diese Gleichungen stellen daher zwei kongruente Parabeln vom Halbparameter a dar, welche y zur gemeinschaftlichen Hauptaxe haben und sich in der Mitte der Strecke O_2F berühren. Wird die untere Parabel parallel zur Linie D verschoben und soll sie von der obern stets berührt werden, so hat sich diese um ihren Brennpunkt O_2 zu drehen. Für die Parabel R_1 ist F der Brennpunkt, D die Leitlinie und die Konstruktion ergiebt ohne weiteres die bekannten Erzeugungsweisen, sowie Tangente und Krümmungsradius.

b) Umgekehrt sei die Kurve R_2 gegeben, etwa als eine Ellipse mit y als Hauptaxe, mit der grossen Axe $2a$ und der linearen Exzentrizität $2c$, so heisst ihre Gleichung:

$$r_2 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi_2}.$$

Da ferner $\varphi_2 = 2u$, so folgt für die Kurve R_1:

1) $$y = r_2 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos 2u};$$

ferner ist

$$\frac{dx}{d2u} = y = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos 2u},$$

somit durch Integration mit der Konstanten Null:

2) $$\cos\frac{x}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{a\cos 2u - c}{a - c\cos 2u},$$

oder indem man aus 1) und 2) den Parameter $2u$ eliminiert und die kleine Halbaxe

$$\sqrt{a^2 - c^2} = b$$

setzt als Gleichung der Kurve R_1:

$$y = a + c\cos\left(\frac{x}{b}\right).$$

Die Kurve R_1 ist also eine Cosinuslinie, welche die Ellipse im Scheitel der grossen Axe berührt. Die Kurven sind also schon in richtiger Lage, da sie beide zur Axe y symmetrisch sind und eine Umlegung um diese Axe keine Lagenveränderung bewirkt.

c) Ist dagegen die Gleichung der Kurve R_1 durch rechtwinklige Punktkoordinaten gegeben, etwa als Kettenlinie, deren Hauptaxe mit y zusammenfällt, d. h. durch die Gleichung:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

so hat man zunächst ihre Parameterdarstellung aufzustellen, in welcher der Winkel u der Teilungskurve als Parameter figuriert. Nach früherem ist aber

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{dx}{du},$$

aus welcher Gleichung durch Integration folgt:

$$\operatorname{tg}(u - u_0) = e^{\frac{x}{c}}.$$

Wird nun die Konstante u_0 derart bestimmt, dass für $u = 0$ auch $x = 0$ wird, so ergiebt sich:

$$e^{\frac{x}{c}} = \operatorname{tg}\left(u + \frac{\pi}{4}\right)$$

und daher:

$$y = \frac{c}{2}\left[\operatorname{tg}\left(u + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{cotg}\left(u + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

oder

$$y = \frac{c}{\cos 2u}.$$

Substituiert man hierin $y = r_2$; $2u = \varphi_2$, so erhält man die Gleichung der Kurve R_2 in Polarkoordinaten:

$$r_2 = \frac{c}{\cos \varphi_2}.$$

Als Kurve R_2 erscheint daher die Scheiteltangente der Kettenlinie R_1. Die Kettenlinie ergiebt sich somit als Spezialfall der schon früher erhaltenen Rollkurve zu einer Geraden, unter der Voraussetzung, dass die Distanz $2a$ ins Unendliche gewachsen ist. Anderseits ist der Bewegungsvorgang nichts anderes als eine kinematische Illustration zu dem bekannten Satze:

Fällt man vom Fusspunkt der Ordinate auf der x-Axe das Lot auf die Tangente der Kettenlinie, so ist das Stück der Tangente von diesem Fusspunkt bis zum Berührungspunkt gleich der Länge des Bogens von diesem Berührungspunkt bis zum Scheitel der Kurve.

Der Inhalt des von der Ordinate, der Tangente und ihrem Lote gebildeten Dreieckes ist aber anderseits die Hälfte vom Inhalt der über der Kettenlinie stehenden Fläche. Auch dieser Satz folgt hier ganz unmittelbar. Aus den Gleichungen der Rollkurven dieses Abschnittes ergiebt sich nämlich:

$$y\,dx = y^2 d2u = r_2^2 d\varphi_2,$$

oder

$$dF_1 = 2dF_2;$$

d.h.: Die von der Kurve R_1, der Geraden D und den Ordinaten irgend zweier Punkte von R_1 begrenzte Fläche F_1 hat allemal doppelt so grossen Inhalt, wie der über dem entsprechenden Bogen der Kurve R_2 stehende Sektor F_2.

B. Divergente, sich schneidende Axen.

5.

Die Flächen R_1 und R_2 sind in diesem Falle Kegelflächen. Seien o_1 und o_2 die beiden gegebenen Axen, die sich in O schneiden, und 2β der von ihnen eingeschlossene vorläufig spitze Winkel, so denken wir uns die Axen, sowie die um diese beschriebenen Systeme koaxialer Rotationskegel mit der um O beschriebenen Einheitskugel geschnitten. Es seien O_1 und O_2 die Schnittpunkte der Axen mit der Kugel, der Meridian dieser Axen sei der Anfangsmeridian oder die Centrale, P sei ein auf dem direkten Bogen O_1O_2 liegender Punkt, so sollen O_1 und O_2 die Pole und OP_1 sowie OP_2 die sphärischen Polaraxen x_1 und x_2

zweier Polarkoordinatensysteme auf der Kugel bilden. Sind dann α_1 und α_2 die sphärischen Radien, φ_1 und φ_2 die sphärischen Anomalien irgend zweier Punkte P_1 und P_2 der Kugel, so mögen sie entsprechende Punkte heissen, wenn die durch sie gehenden Kreise der Kugel von den Mittelpunkten O_1 und O_2 sich auf der Centrale $O_1 O_2$ berühren, und wenn beim Rollen dieser Kreise aufeinander und um die Punkte O_1 und O_2, P_1 und P_2 gleichzeitig durch die Centrale gehen.

Heisst man zwei solche Kreise der Systeme um O_1 und O_2, die sich auf der Centrale berühren, ein Elementenpaar, so sind entsprechende Punkte jedes Paares definiert durch die beiden Gleichungen:

1) $$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta,$$

2) $$\sin\alpha_1 d\varphi_1 - \sin\alpha_2 d\varphi_2 = 0.$$

Von diesen speziellen Rollkurvenpaaren für konstantes Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten gelangt man nun wieder zu den allgemeinsten durch folgende Überlegung, bei der man sich die Einheitskugel doppelt und in sich verschiebbar zu denken hat:

Durchläuft ein Punkt P die sphärische Centrale $O_1 O_2$ nach irgend einem Gesetz und dreht man die mit den beiden Kreissystemen fest verbundenen Kugelflächen um die Axen o_1 und o_2 derart, als ob die momentan durch P gehenden Kreise jedes Paares aufeinander rollen würden, so beschreibt P auf beiden Kugelflächen zwei entsprechende sphärische Rollkurven.

Seien w_{1n} und w_{2n} die Komponenten der Geschwindigkeiten w_1 und w_2 normal zur Centrale gemessen, mit denen die Kurven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ durch den Punkt P auf der Kugelfläche laufen, $w_{1\alpha}$ und $w_{2\alpha}$ die Komponenten in der Centralen, so folgt zunächst wegen der Gleichung 1):

$$w_{1\alpha} + w_{2\alpha} = 0;$$

ferner infolge Gleichung 2):

$$\sin\alpha_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - \sin\alpha_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = 0,$$

also:

$$w_{1n} - w_{2n} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen zwischen den Komponenten folgt weiter:

$$\frac{w_{1n}}{w_{1\alpha}} + \frac{w_{2n}}{w_{2\alpha}} = 0,$$

d. h.:

3) $$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi;$$

durch Quadrieren und Addieren dagegen folgt:

$$\sin^2\alpha_1 d\varphi_1^2 + d\alpha_1^2 = \sin^2\alpha_2 d\varphi_2^2 + d\alpha_2^2,$$

oder

4) $$ds_1 = ds_2.$$

Entsprechende Bogenelemente berühren sich also auf der Centrale und haben gleiche Länge, d. h. die vom Punkte P beschriebenen Kurven R_1 und R_2 rollen aufeinander, indem sie sich drehen.

Die Bedingungsgleichungen 1) und 2) genügen daher, um R_1 und R_2 als entsprechende sphärische Rollkurven zu charakterisieren.

Die über zwei sphärischen Rollkurven stehenden Kegel aus dem Mittelpunkte der Kugel sind entsprechende Rollkegel. Da jede in O konzentrische Kugel aus zwei Rollkegeln sphärische Rollkurven schneidet, so folgt:

Die unendlich fernen Querschnitte entsprechender Rollkegel sind entsprechende ebene Rollkurven.

Diese Eigenschaft der unendlich fernen Querschnitte folgt auch schon aus dem Umstande, dass die unendlich ferne Ebene die einzige des Raumes ist, die auf beiden Axen o_1 und o_2 zugleich normal steht.

Um nun zur geometrischen Erzeugung entsprechender Rollkegel zu gelangen, kann man ein dem früheren analoges Verfahren einschlagen. Die von den Axen o_1 und o_2 nach entsprechenden Erzeugenden p_1 und p_2 gehenden Ebenen bilden zwei Büschel von bestimmter Abhängigkeit und ungleichem oder gleichem Drehungssinn, je nachdem die Kegel sich von aussen oder innen berühren. Verschiebt man daher beide Büschel an eine beliebige Axe o derart, dass die Punkte O_1 und O_2 in den nämlichen Punkt O, und die entsprechenden Halbaxen o_1 und o_2 verkehrt aufeinander fallen, so kann man sich die Abhängigkeit beider Ebenbüschel $A_1, B_1, C_1 \ldots$ und $A_2, B_2, C_2 \ldots$ dadurch vorstellen, dass man sie mit einem um O beschriebenen Kegel Δ vom halben Öffnungswinkel 2β schneidet und entsprechende Schnittlinien $a_1 b_1 c_1 \ldots$ und $a_2 b_2 c_2 \ldots$ durch Ebenen verbindet. Die Gesamtheit dieser Ebenen umhüllt dann einen bestimmten Kegel Φ und umgekehrt definiert jeder Kegel Φ an der Axe o zwei von einander abhängige Ebenensysteme. Beschreibt man jetzt um O die Einheitskugel, so trifft sie den Kegel Δ nach einem Kreise D, dessen Ebene den Kegel Φ nach einer Kurve F schneidet. Aus dieser entspringt jetzt ein bekanntes Paar ebener Rollkurven R_{1e} und R_{2e}, mit welchen die gesuchten sphärischen Rollkurven R_1 und R_2 in einfacher Weise zusammenhängen.

Ist nämlich (Figur 4 Taf. I) O_1 der Mittelpunkt von D, O_2 der zweite Schnittpunkt der positiven Halbaxe o mit der Einheitskugel, Δ_2 der aus O_2 über D beschriebene Gegenkegel zu Δ, $A_1 A_2$ eine Tangente von F, P_{1e}, P_{2e} das aus ihr entspringende Punktepaar der ebenen Kurven R_{1e} und R_{2e}; $P_{1\Delta}$ und $P_{2\Delta}$ die in der Richtung der Axe o auf Δ_2 projizierten Punkte P_{1e} und P_{2e}, so besteht die Proportion:

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{O_1 P_{2e}}{O_1 P_{1e}} = \frac{O_2 P_{2\Delta}}{O_2 P_{1\Delta}}.$$

Sind daher P_1 und P_2 die Schnittpunkte der nach $P_{1\Delta}$ und $P_{2\Delta}$ gehenden Kugelradien mit der Einheitskugel, so ergiebt sich weiter:

$$\frac{O_2 P_{2\Delta}}{O_2 P_{1\Delta}} = \frac{\sin(O_2 P_2)}{\sin(O_2 P_1)} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2},$$

und da $\widehat{O_2 P_1} + \widehat{O_2 P_2} = 2\beta$, so folgt:

$$\widehat{O_2 P_1} = \alpha_1 \quad \text{und} \quad \widehat{O_2 P_2} = \alpha_2,$$

also sind P_1 und P_2 Punkte entsprechender Rollkurven.

Da nun anderseits die Linie $FP_{1\Delta}$ parallel $O_2 A_2$ und $FP_{2\Delta}$ parallel $O_2 A_1$, so werden somit entsprechende Rollkegel nach folgender Konstruktion erhalten:

Man beschreibe aus den zwei Punkten O und O_2, deren Distanz auf o der Längeneinheit gleich ist, die Kegel Δ und Δ_2 mit 2β und $\frac{\pi - 2\beta}{2}$ als halben Öffnungswinkeln, so durchschneiden sie sich in einem Kreise D.

Ist dann F eine beliebige Kurve dieser Ebene, so ziehe man für jede Tangente $A_1 A_2$ derselben $FP_{1\Delta}$ parallel $O_2 A_2$ und $FP_{2\Delta}$ parallel $O_2 A_1$. Durchläuft jetzt die Tangente $A_1 A_2$ die ganze Kurve F, so beschreiben die Strahlen $OP_{1\Delta}$ und $OP_{2\Delta}$ zwei entsprechende Rollkegel.

Da man für die ebenen Rollkurven die Tangenten in den Punkten P_{1e} und P_{2e} angeben kann, so kennt man die Tangenten auch in den Punkten $P_{1\Delta}$ und $P_{2\Delta}$, d. h. man kann auch die Tangentialebenen der Kegel R_1 und R_2 angeben.

In dieser Weise entstehen die gesuchten Paare von Kegelflächen mit Vermeidung der schwierigen und konstruktiv unbequemen Konstruktionen auf der Kugeloberfläche selbst. Je nachdem die Kurve F ganz im Innern oder ganz ausserhalb von D liegt, werden R_1 und R_2 ganz getrennte Teile eines und desselben Kegels R werden, die nur bei Berührung von aussen oder von innen aufeinander rollen.

Liegt dagegen F teils im Innern und teils ausserhalb des Kreises D, so hängen R_1 und R_2 zusammen, wobei der Kegel R die Axe o zur mehrfachen Erzeugenden haben muss. Der Kegel rollt dann mit dem kongruenten teils für Berührung von aussen, teils für Berührung von innen, wobei der Wechsel beim Durchgang der gemeinschaftlichen Berührungslinie entweder durch die Axe o_1 oder durch o_2 stattfindet.

Wächst der Winkel 2β gegen $\frac{\pi}{2}$, so geht die Ebene des Kreises D durch den Kugelmittelpunkt; wird $2\beta > \frac{\pi}{2}$, so sinkt sie unter denselben und der Kegel Δ_2 wird ein spitzer Kegel, in allen Fällen aber bleibt die Konstruktion die nämliche.

Will man die Gleichungen der Rollkurven R_1 und R_2 auf der Einheitskugel in sphärischen Polarkoordinaten aufstellen, so mögen

zunächst φ_1 und φ_2, u und v in der Ebene des Kreises D die frühere Bedeutung haben. Alsdann folgt aus der Bedingungsgleichung 2):

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1},$$

$$\frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} = \frac{d\varphi_2 - d\varphi_1}{d\varphi_2 + d\varphi_1},$$

oder

3) $$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \beta)}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{dv}{du} = -v'.$$

Eliminiert man daher aus den je drei Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\beta\,\frac{1-v'}{1+\operatorname{tg}^2\beta\cdot v'},\quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\beta\,\frac{1+v'}{1-\operatorname{tg}^2\beta\cdot v'};$$

$$\varphi_1 = u + v,\quad \varphi_2 = u - v,$$

$$F(u, v) = 0,\quad F(u, v) = 0,$$

die Parameter u und v, so erhält man als Resultanten die Gleichungen entsprechender Rollkurven auf der Kugeloberfläche.

Auch hier wird im allgemeinen die nämliche Gleichung beide Kurven zugleich ausdrücken, sodass jede als Teil der Gesamtkurve R aufzufassen ist.

Wenn die Gleichungen der aus der Teilungskurve F entstehenden ebenen Rollkurven R_{1e} und R_{2e} schon bekannt sind, so kann durch einfache Substitution aus ihrer Gleichung:

$$R(r, \varphi) = 0$$

die Gleichung der sphärischen Kurven erhalten werden.

Aus obiger Gleichung 2) ergiebt sich nämlich:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\cos(\alpha_1 - \beta)} = \sin\beta\left(1 - \frac{dv}{du}\right)$$

und da

$$2a = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$$

den Radius von D darstellt, so ist nach früherem:

$$\sin\beta\left(1 - \frac{dv}{du}\right) = \frac{r_1}{\cos\beta},$$

sodass

$$\frac{\sin\alpha_1}{\cos(\alpha_1 - \beta)} = \frac{r_1}{\cos\beta}$$

wird, woraus folgt, dass in die Gleichung der ebenen Rollkurve

4) $$\frac{1}{r_1} = \operatorname{cotg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\beta$$

zu substituieren ist, um daraus die Gleichung der sphärischen Rollkurve zu erhalten.

Wählen wir in einem ersten Beispiel als Kurve F ein Strahlenbüschel, so ist die resultierende Kurve R_{1e} eine Ellipse mit der grossen $2a$ Axe und O_1 und F als Brennpunkten. Daraus folgt, dass die

Projektion dieser Ellipse auf den Gegenkegel Δ_2 ebenfalls eine Ellipse ist und ferner, dass ihr projicierender Kegel aus O die Axe o als Fokalstrahl besitzt; d. h.:

Zwei kongruente Kegel zweiten Grades, die sich um entsprechende Fokalstrahlen drehen, sind auch hier die einfachsten Rollkegel, die auftreten können.

Um zu der Gleichung der zugehörigen sphärischen Kegelschnitte zu gelangen, verlegen wir den Punkt F auf die Polaraxe des Kreises D in den Abstand $2c$ von O_1. Bedeuten dann β und δ die Winkel, unter denen die Strecken $2a$ und $2c$ aus dem zweiten Schnittpunkt O_3 der negativen Halbaxe o mit der Kugel gesehen werden, so besteht die Gleichung:

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\delta}$$

und da

$$a = \sin\beta\cos\beta.$$

ist, so folgt:

$$c = \cos^2\beta\operatorname{tg}\delta.$$

Es ist somit

$$F = \sin\beta\cos\beta\cos v - \cos^2\beta\operatorname{tg}\delta\cos u = 0$$

die Gleichung des Büschels, und daher durch Einsetzen der Werte von a und c die Gleichung der Ellipse R_{1e}:

$$r_1 = \frac{\cos\beta(\sin^2\beta - \cos^2\beta\operatorname{tg}\delta)}{\sin\beta - \cos\beta\operatorname{tg}\delta\cos\varphi_1}.$$

Führt man jetzt die in 4) stehende Substitution aus, so erhält man nach leichter Reduktion als Gleichung der sphärischen Ellipse R_1:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\cos 2\delta - \cos 2\beta}{\sin 2\beta - \sin 2\delta\cdot\cos\varphi_1}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $\beta + \delta$ und $\beta - \delta$ die extremen Werte des sphärischen Radius α_1 sind, d. h., dass 2δ die sphärische Exzentrizität bedeutet. Man erhält daher den zweiten Fokalstrahl des Kegels R, indem man den Strahl O_3F in F_1 mit der Kugel schneidet und F_1 mit O verbindet. Das sphärische Büschel F besteht daher nicht aus Grosskreisbogen, sondern die Ebenen desselben enthalten den Punkt O_3. Dagegen sind P_1 und P_2 allemal Endpunkte eines sphärischen Durchmessers und ihre Tangenten stehen zu den Bogen des Büschels F normal.

Es ist klar, dass dem Kurvensysteme:

$$F = \sin\beta\cos\beta\cos nv - \cos^2\beta\operatorname{tg}\delta\cos nu = 0$$

die Gruppe der sphärischen Rollkurven

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\cos 2\delta - \cos 2\beta}{\sin 2\beta - \sin 2\delta\cos n\varphi_1}$$

entspricht, welche wie bei der Ellipse mit ihren entsprechenden in Deckung liegen.

Setzen wir endlich als Kurve F eine Kurve der Schar voraus, die durch Winkelteilung aus einem Kreise entsteht, dessen Mittelpunktsabstand $2b$, und dessen Radius $2r_0$ beträgt, und nehmen wir zudem an, o_1 und o_2 seien zu einander rechtwinklige Axen, also

so hat man:

$$2\beta = \frac{\pi}{2},$$

$$a = \frac{1}{2},$$

$$b = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta,$$

$$r_0 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon$$

zu setzen, sodass die Gleichung von F die Form erhält:

$$F = \frac{1}{2}\cos n v - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta\cos n u \mp \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon = 0.$$

Die sphärischen Rollkurven haben dann eine Gleichung von der Form:

$$E^2 - \frac{\operatorname{tg}^2\varepsilon}{4} L = 0,$$

wo

$$E = \operatorname{cotg}\alpha_1 \cos 2\delta - (1 - \sin 2\delta \cos n\varphi_1),$$

und

$$L = (1 + \sin 2\delta\cos n\varphi_1)\operatorname{cotg}^2\alpha_1 - 2\cos 2\delta \operatorname{cotg}\alpha_1 + (1 - \sin 2\delta\cos n\varphi_1)$$

bedeuten.

Über die angenäherte Geradführung mit Hilfe eines ebenen Gelenkvierecks.

Von

Dr. R. MÜLLER,

Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig.

Hierzu Taf. II Fig. 1—4.

Von einem Gelenkviereck sagt man bekanntlich, es bewirke eine angenäherte n-punktige Geradführung, wenn ein bestimmter Punkt der Koppelebene eine Bahnkurve beschreibt, die von einer gewissen Geraden zwischen n aufeinander folgenden Schnittpunkten nur verschwindend wenig abweicht; dabei ist n höchstens gleich sechs. Liegen die n Schnittpunkte einander unendlich nahe, so möge die Geradführung als eine n-punktig genaue bezeichnet werden. Dann ist zwar die theoretische Anschlußstrecke unendlich klein, in Wirklichkeit kann man aber auch in diesem Falle ein ganz beträchtliches Kurvenstück von der Anschlussgeraden nicht unterscheiden.

In einem früheren Aufsatze* habe ich die Konstruktion der n-punktig genauen Geradführung — insbesondere für $n = 6$ — eingehend behandelt. Im Folgenden wird gezeigt, wie man von hier aus den Übergang zur bloss angenäherten Geradführung findet, und wie man auf diese Weise zu Lösungen gelangt, die vor den früher erhaltenen vom praktischen Standpunkte aus den Vorzug verdienen.

1. Die Kurve der Ballschen Punkte. Wir gehen aus von irgend einem Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ mit dem festen Gliede AB; für die beliebig gewählte Koppellage AB ist der Pol $\mathfrak{P}$, der Wendekreis w und auf ihm der Ballsche Punkt K — der augenblicklich einen Undulationspunkt beschreibt — in bekannter Weise konstruiert worden (Fig. 1). Zeichnen wir in der Koppelebene alle Kreise, die im Verlaufe der Bewegung zu Wendekreisen werden, so umhüllen diese einerseits

* Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, diese Zeitschrift 42. Jahrgang S. 247.

die Polkurve p, anderseits den Ort u der Ballschen Punkte (Fig. 1a). Dann erstreckt sich auf der einen Seite von u ein Gebiet von Systempunkten, von denen jeder zwei benachbarten Wendekreisen angehört. Jeder dieser Punkte erzeugt also eine Bahnkurve mit zwei dicht aufeinander folgenden Inflexionen, die zu einem scheinbar geradlinigen Kurvenstück verschmelzen, wenn wir den Systempunkt hinreichend nahe an u annehmen. Das eben Gesagte gilt z. B. von den Punkten M und L, die wir auf der Bahnnormale $\mathfrak{P}K$ des Punktes K gewählt haben; der Punkt L liefert eine angenäherte vierpunktige Geradführung.

In der Koppelebene giebt es im allgemeinen eine bestimmte Anzahl von Punkten, deren Bahnkurven eine fünfpunktig berührende Tangente besitzen.* Solche Punkte liegen immer auf je drei unendlich benachbarten Wendekreisen, sind also Spitzen der Kurve u. In jedem Punkte, der sich in der Nähe einer Spitze innerhalb des von der Kurve u begrenzten Gebietes befindet, schneiden sich drei aufeinander folgende Wendekreise; die zugehörige Bahnkurve hat also kurz nacheinander drei Inflexionen, und wir gelangen zu einer angenäherten fünfpunktigen Geradführung, wenn die Entfernung des beschreibenden Punktes von jener Spitze hinreichend klein ist.

2. Konstruktion der fünfpunktig genauen und der angenäherten fünfpunktigen Geradführung. Bei der wirklichen Ausführung der zuletzt angedeuteten Konstruktion würde die Ermittelung der Systempunkte mit fünfpunktig berührenden Bahntangenten erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Es empfiehlt sich deshalb, nicht ein beliebiges Gelenkviereck in einer beliebigen Koppellage zu Grunde zu legen, sondern von vorn herein die Figur so anzuordnen, dass der Ballsche Punkt momentan eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente durchläuft. Dann müssen die Winkel, welche die vier Seiten des Vierecks augenblicklich mit einer gewissen Geraden einschliessen, einer einfachen Bedingung genügen.** Eine daraus folgende Konstruktion haben wir bereits an anderer Stelle mitgeteilt.***

In Figur 2 ist ein anderer Weg eingeschlagen worden. Hier ist nämlich die Aufgabe gestellt, mit Hilfe eines Gelenkvierecks in allgemeinster Weise eine Kurve zu beschreiben, die von der gegebenen Geraden $\mathfrak{g}$ im Punkte K fünfpunktig berührt wird. Von dem gesuchten Viereck dürfen wir den einen Arm, etwa $\mathsf{A}A$, noch willkürlich annehmen, und zwar in der Lage, die er haben soll, wenn der geradgeführte Punkt sich in K befindet. Durch diese Daten ist die Be-

* a. a. O. S. 260.

** a. a. O. S. 260 Gleichung 25.

*** Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, zweite Mitteilung, diese Zeitschrift 38. Jahrgang S. 131.

wegung der Koppelebene für fünf unendlich benachbarte Lagen bestimmt, und es giebt ausser A und K noch zwei andere Systempunkte B und B^*, welche augenblicklich Bahnstellen mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreise durchlaufen; sie bilden zusammen mit A und K die vier Burmesterschen Punkte der betrachteten Systemlage. Die früher von uns abgeleitete Konstruktion der Punkte B und B^* gestaltet sich gegenwärtig noch etwas einfacher als im allgemeinen Falle, weil dem Punkte K ein unendlich grosser Krümmungskreis entspricht.*

Wir bestimmen zunächst den Pol $\mathfrak{P}$ als Schnittpunkt von $\mathsf{A}A$ mit dem in K zu $\mathfrak{g}$ errichteten Lote, ziehen $\mathsf{A}\mathfrak{H} \perp \mathfrak{g}$ bis AK, $\mathfrak{P}\mathfrak{J} \perp \mathfrak{P}\mathfrak{H}$ bis zu derselben Geraden, legen durch $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ eine Parallele, welche $\mathfrak{P}A$ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P}K$ in $\mathfrak{K}$ schneidet, und errichten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{K}$ Lote bez. zu $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}K$. Treffen sich diese in $\mathfrak{D}$, so geht durch $\mathfrak{D}$ die Polbahntangente $\mathfrak{t}$, und der Kreis δ, der $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ zum Durchmesser hat, ist der gemeinschaftliche Krümmungskreis der Kreispunktkurven m und μ für die betrachtete und die umgekehrte Bewegung. Wir ziehen ferner $\mathfrak{J}\mathfrak{G} \parallel \mathfrak{P}\mathfrak{H}$ bis $\mathfrak{P}K$, $\mathfrak{G}\mathfrak{C} \perp \mathfrak{P}\mathfrak{G}$ bis zur Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ und bestimmen den Schnittpunkt $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ mit δ. Dann ist $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ ein Durchmesser des zweiten Krümmungskreises der Kurve m in ihrem Doppelpunkte $\mathfrak{P}$, und ihr Fokalzentrum würde sich ergeben durch Halbierung der nicht gezeichneten Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$. Der Ballsche Punkt der betrachteten Systemlage fällt gegenwärtig mit K zusammen; die Gerade $\mathfrak{P}K$ ist folglich die Fokalaxe der Kurve μ. Machen wir daher im Kreise δ die Sehne $\mathfrak{P}\mathfrak{E} = \mathfrak{P}\mathfrak{K}$, so ist der Mittelpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{E}$ das Fokalzentrum von μ. Die nicht gezeichnete Verbindungslinie der beiden Fokalzentren schneidet die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ im Punkte $\mathfrak{Q}$, den wir in unserer Figur als Mittelpunkt der Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}'$ erhalten haben, wobei $\mathfrak{Q}'$ den Schnittpunkt von $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet. Nach einem bei anderer Gelegenheit bewiesenen Satze** befinden sich in jeder Lage eines komplan bewegten starren ebenen Systems die vier Burmesterschen Punkte mit den Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ auf einem Kegelschnitt, der in $\mathfrak{P}$ die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ballschen Punkte berührt. Gegenwärtig gehört aber der Ballsche Punkt K selbst mit zu den Burmesterschen Punkten; jener Kegelschnitt zerfällt also in die Geraden $\mathfrak{P}K$ und $\mathfrak{Q}A$, und die gesuchten Punkte B, B^* liegen demnach auf $\mathfrak{Q}A$. — Die weitere Konstruktion erfolgt nach der früher gegebenen Regel: Wir bestimmen die Schnittpunkte $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ bez. mit $\mathfrak{A}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ und mit der Parallelen durch $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{A}\mathfrak{K}$, ziehen zu $\mathfrak{P}\mathfrak{V}$ die Parallelen $\mathfrak{N}\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{W}\mathfrak{N}$ bez. zu $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ und bezeichnen mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{T}\mathfrak{N}$ mit dem Kreise δ. Dann trifft $\mathfrak{Q}A$ die Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{B}^*$ bez. in B, B^*.

Den Punkten B und B^* entsprechen zufolge der bekannten quadratischen Verwandtschaft die Krümmungsmittelpunkte B und B^*; wir finden sie z. B. unter Benutzung des Wendepols W, in welchem die Geraden $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{g}$ sich schneiden. Als Lösung der gestellten Aufgabe erhalten wir somit die beiden Vierecke $\mathsf{AB}BA$ und AB^*B^*A. In Verbindung mit dem ersten beschreibt der Punkt K die Kurve $\varkappa$ (Fig. 2a);

---

* Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, erste Mitteilung, diese Zeitschrift 37. Jahrgang S. 213. In der obigen Figur 2 sind möglichst dieselben Buchstaben gebraucht, wie in der Figur 2 des angeführten Aufsatzes.

** Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, diese Zeitschrift 37. Jahrgang S. 147.

das zweite erteilt ihm eine Bewegung in der Kurve $\varkappa^*$, die sich der Geraden $\mathfrak{g}$ so innig anschmiegt, dass auch ihr sechster Schnittpunkt mit $\mathfrak{g}$ in die scheinbar endliche Anschlußstrecke hineinfällt (Fig. 2).

Figur 2a zeigt den Übergang von der gefundenen fünfpunktig genauen Geradführung zu einer angenäherten fünfpunktigen: In der Koppelebene ABK, die in Figur 2b besonders gezeichnet ist, umhüllen die sämtlichen Wendekreise wie vorhin die Kurven p und u. Innerhalb des von u begrenzten Gebietes ist der Punkt L angenommen worden — in unserer Figur auf dem durch die Spitze K gehenden Wendekreise w; die zugehörige Bahnkurve λ befindet sich in Figur 2a, und zwar der Deutlichkeit wegen ein wenig nach der Seite verschoben. Sie besitzt eine auffallend gestreckte Gestalt und genügt den Anforderungen einer angenäherten Geradführung jedenfalls besser, als die daneben stehende Bahnkurve $\varkappa$ des Punktes K. — Das Gebiet, in welchem der Punkt L gewählt werden kann, ist im vorliegenden Falle beschränkter, als bei der vierpunktigen Geradführung; wir dürfen ihn z. B. nicht mehr auf der Normale des Punktes K annehmen, wie in Figur 1.* Am zweckmässigsten verwenden wir, wie in Figur 2a, einen Punkt des Wendekreises w; dann wird nämlich die etwas umständliche Konstruktion der Kurve u ganz überflüssig.

3. Sechspunktige Geradführung. Da die Konstruktion der sechspunktig genauen Geradführung bereits in allgemeinster Weise erledigt ist,** so haben wir nur noch zu zeigen, wie sich von hier aus der Übergang zur angenäherten Geradführung gestaltet. Dazu genügt aber die Betrachtung eines speziellen Falles; wir wählen als Beispiel die bekannte Geradführung von Tschebischeff (Fig. 3). Bei dieser ist das Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ gleicharmig, und es verhält sich:

$$AB : \mathsf{AB} : \mathsf{A}A = 1 : 3 : 4.$$

Gelangt dann die Koppel in die gezeichnete Lage, in der sie zum festen Gliede parallel ist, so beschreibt ihr Mittelpunkt K eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente. Jetzt schneiden sich in K vier unendlich benachbarte Wendekreise, und die unmittelbar vorhergehenden und folgenden Wendekreise umhüllen ein Kurvenstück u, das ein von Kreisen freies Gebiet einschliesst, während durch jeden Punkt ausserhalb u zwei solcher Kreise gehen (Fig. 3a). Um zu einer angenäherten sechspunktigen Geradführung zu gelangen, müssten wir in der Koppelebene einen Punkt angeben können, in welchem sich vier verschiedene Kreise der Schar schneiden — ein solcher Punkt ist jedoch in unserer Figur nicht vorhanden.

Hier müssen wir nun bedenken, dass die Singularität, welche gegenwärtig die Kurve u im Punkte K darbietet, aus der Vereinigung

* Vergl. Allievi, cinematica della biella piana, Napoli 1895, p. 59.

** Vergl. die Anmerkung auf S. 36.

von zwei Spitzen entsteht. Wir können aber diese Singularität wieder in zwei Spitzen auflösen, wenn wir unser Gelenkviereck in geeigneter Weise ein wenig verändern. Zu dem Zwecke haben wir in Figur 4 die Koppelstrecke AB ein wenig vergrössert, die drei übrigen Glieder aber unverändert gelassen. Für die dargestellte Koppellage, die zum festen Gliede parallel ist, bezeichnet K wiederum den Ballschen Punkt, der jetzt ausserhalb AB liegt und einen blossen Undulationspunkt beschreibt. Dann umhüllen die Wendekreise in der Umgebung von K ein Kurvenstück u, das zur Geraden $\mathfrak{P}K$ symmetrisch ist und in der unmittelbaren Nähe von K zwei Spitzen besitzt (Fig. 4a). Jeder Systempunkt innerhalb des von der Kurve u begrenzten krummlinigen Dreiecks liegt gleichzeitig auf vier Wendekreisen und durchläuft folglich dicht nacheinander vier Wendepunkte, wie z. B. der Punkt N, der sich auf der Normale $\mathfrak{P}K$ des Punktes K befindet, und dessen Bahnkurve in Figur 4 parallel nach unten verschoben ist. Der Punkt L, der auf $\mathfrak{P}K$ dem Punkte K sehr nahe liegt, liefert eine angenäherte vierpunktige Geradführung; um eine angenäherte sechspunktige Geradführung zu erhalten, werden wir den beschreibenden Punkt zwischen L und N, etwa in M annehmen. Wie die Figur zeigt, ist in diesem Fall die scheinbare Anschlußstrecke erheblich grösser, als bei der sechspunktig genauen Geradführung der Figur 3.

Aus unseren Darlegungen ergiebt sich demnach, dass **überhaupt die angenäherte n-punktige Geradführung im allgemeinen längere Anschlußstrecken liefert, als die entsprechende n-punktig genaue. Um aber zu einer solchen angenäherten Geradführung zu gelangen, ist der bequemste Weg immer der, dass man zunächst eine n-punktig genaue Geradführung konstruiert und diese in der angegebenen Weise nachträglich in eine angenäherte umwandelt.**

Über die mathematische Bestimmung der Helligkeit in Räumen mit Tagesbeleuchtung, insbesondere Gemäldesälen mit Deckenlicht.

Von

R. Mehmke
in Stuttgart.

Hierzu Tafel III und IV.

Die folgenden Untersuchungen sind auf Anregung des verstorbenen Geh. Baurats Ed. Wagner in Darmstadt entstanden, der ihre Ergebnisse für das Handbuch der Architektur zu verwerten wünschte und auch zum Teil verwertet hat,* nachdem ich sie ohne die mathematischen Entwickelungen bereits Ende 1890 im Mittelrheinischen Architekten- und Ingenieurverein, Ortsverein Darmstadt, mitgeteilt hatte. Neu hinzu gekommen ist jedoch die Anwendung des „Beleuchtungsvektors", mit dessen Einführung ich einen Fortschritt gemacht zu haben glaube.

Kam es ursprünglich nur darauf an, Methoden für die unmittelbare praktische Verwendung zu gewinnen, so scheint mir jetzt aus dem Gebotenen auch Nutzen für den Unterricht gezogen werden zu können, insofern z. B. die Konstruktion der Linien gleicher Helligkeit auf einer (etwa zur Fensterwand schrägen) Wand eines Gemäldekabinets mit Seitenlicht eine gute Übung für Fortgeschrittene in der darstellenden Geometrie ist und sich auch manche leichteren Aufgaben demselben Gebiet entnehmen lassen, während die Bestimmung von absolut oder relativ hellsten Punkten Beispiele für die Auflösung transcendenter numerischer Gleichungen liefert.

A. Allgemeiner Teil.

1. Geschichtliche Bemerkungen.

Eine Theorie der Beleuchtung sowohl von Gemäldesälen mit Deckenlicht, als mit Seitenlicht scheint zuerst Ed. Magnus aufgestellt

* Handbuch der Architektur, 4. Teil, 6. Halbband, 4. Heft, S. 227—231, 251—253, 1893.

zu haben: Zeitschrift für Bauwesen, Bd. 14, S. 202—219, 1864 (Wiedergabe eines Ende 1863 in der Kunstakademie zu Berlin gehaltenen Vortrages); eine besondere Schrift von Magnus mit dem Titel „Entwurf zum Bau eines Kunstmuseums" ist 1866 erschienen. Magnus geht von richtigen Gedanken aus, ist aber als Maler zu wenig mathematisch gebildet, um dieselben in mathematisches Gewand kleiden und durchführen zu können. A. Tiede hat darauf einen ursprünglich mit Seitenlicht versehenen Saal des alten Museums in Berlin zu einem Deckenlichtsaal umgestaltet und die Grundsätze, nach denen er die Dimensionen des Deckenlichts festgestellt hatte, in der Zeitschrift für Bauwesen, Bd. 21, S. 186—194, 1871 mitgeteilt. Auch ist der entsprechende Abschnitt über Museen im Deutschen Bauhandbuch, Bd. 2, 2. Teil, S. 508 flg., 1884, von Tiede bearbeitet worden. Wissenschaftlich bleibt Tiede eher hinter Magnus zurück, statt über ihn hinaus zugehen. Die Frage erweitert und mathematisch in Angriff genommen haben R. Mentz (Beiträge zur Frage der Beleuchtung durch Oberlicht und Seitenlicht, mit spezieller Rücksichtnahme auf Oberlichtsäle und Seitenkabinette in Gemäldegalerien, Deutsche Bauzeitung Bd. 18, S. 488—491, 499—501, 1884; Berechnung der Tagesbeleuchtung innerer Räume und Maßstäbe dazu, Deutsche Bauzeitung Bd. 21, S. 257—260, 1887) und K. Mohrmann (Über die Tagesbeleuchtung innerer Räume, Berlin 1885). Beide legen zwar das Lambertsche Fundamentalgesetz der Beleuchtungslehre zu Grunde, verlassen aber, um vermeintliche mathematische Schwierigkeiten zu umgehen, den richtigen Weg bald wieder, weshalb sie auch zu manchen falschen Ergebnissen kommen. Eine gewisse Unklarheit findet sich sogar in einer zu unserem Gegenstand in Beziehung stehenden Abhandlung des Physikers Leonhard Weber (Beschreibung des Raumwinkelmessers, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 4. Jahrg., S. 343—347, 1884), von wo sie, zu einem vollständigen Irrtum geworden und die Ausbildung unrichtiger Methoden verursachend, in eine Arbeit F. v. Grubers (Versorgung der Gebäude mit Sonnenwärme und Sonnenlicht, II. Versorgung der Gebäude mit Sonnenlicht, Wochenschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins, 13. Jahrgang, S. 277—282, 285—291, 1888), in das Handbuch der Architektur (3. Teil, Bd. 3., 1. Heft, S. 15—23, 1896) und andere, hier nicht in Betracht kommende Schriften übergegangen ist.

Dass die wiederholt erfolglos behandelte Aufgabe, die Erhellung eines Flächenelements durch eine geradlinig begrenzte reflektierende Fläche zu bestimmen, auf die man naturgemäss immer wieder stossen musste, schon 1760 von Lambert in seiner Photometria (siehe Lamberts Photometrie, deutsch herausgegeben von E. Anding, 1. Heft, Ostwalds Klassiker Nr. 31, S. 53—58) mittelst Integralrechnung erledigt worden war und Ch. Wiener 1884 (im 1. Bd. seines Lehrbuchs der darstellenden Geometrie, Nr. 485, S. 401—402) Lamberts Er-

gebnis auf einfache Weise rein geometrisch abgeleitet hat, ist unbeachtet geblieben.

2. Annahmen.

Gewisse vereinfachende Annahmen sind nötig. Mit meinen Vorgängern setze ich voraus, dass, wenn es sich z. B. um die Abstufungen der Helligkeit auf einer Wand eines Gemäldesaales mit Deckenlicht handelt:

1. das von den Wänden und dem Boden zurückgestrahlte Licht dem durch die Deckenöffnung einfallenden Lichte gegenüber vernachlässigt werden dürfe,
2. von allen Punkten der untersuchten Wand das Himmelsgewölbe durch die Deckenöffnung frei gesehen werden könne,
3. die Beleuchtung nicht durch direktes Sonnenlicht erfolge,
4. die Teile des Himmelsgewölbes, welche die verschiedenen Stellen der Wand beleuchten, gleichförmige Beleuchtungsstärke und gleichförmiges Rückstrahlungsvermögen besitzen, und endlich
5. das Lambertsche Gesetz unbeschränkt giltig sei.

3. Beleuchtung eines Flächenelements durch eine reflektierende Fläche. Raumwinkel.

Wird ein Flächenelement f durch ein anderes dF, das Licht zurückstrahlt, beleuchtet, so ist bekanntlich nach dem Lambertschen

Fig. 1.

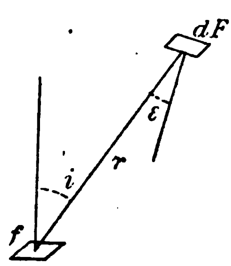
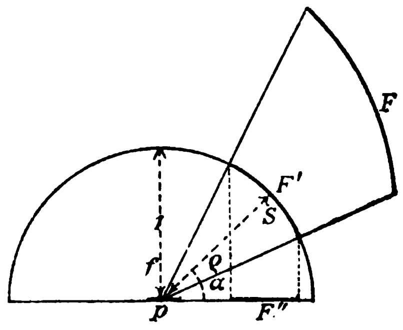


Fig. 2.



Gesetze die Erhellung von f durch dF proportional dem Ausdruck:

$$dF \cdot \frac{\cos \varepsilon \cos i}{r^2}$$

(siehe Fig. 1). Steht dem Elemente f eine reflektierende Fläche F mit endlicher Ausdehnung gegenüber, so muss man letztere in Elemente dF zerlegen, den Einfluss eines jeden Elementes auf f bestimmen und alle diese Einflüsse summieren. Es hat aber für den Fall, dass F gleichförmige Beleuchtungsstärke und gleichförmiges Rückstrahlungsvermögen

besitzt, schon Lambert (a. a. O. S. 37) folgendes gezeigt: Beschreibt man aus dem Mittelpunkte p von f eine Kugel mit beliebigem Halbmesser und nennt man F' die Zentralprojektion von F aus p auf die Kugeloberfläche (siehe Fig. 2, in der alles im Schnitt dargestellt ist), so wird f durch F' ebenso stark beleuchtet, wie durch F, vorausgesetzt, dass Beleuchtungsstärke und Rückstrahlungsvermögen von F und F' gleich sind. Wird der Halbmesser der Hilfskugel gleich 1 gesetzt, die Entfernung des Schwerpunktes s der Fläche F' vom Kugelmittelpunkt p mit ϱ, der Neigungswinkel der Geraden ps gegen die Ebene von f mit α bezeichnet, so findet man, dass die Erhellung von f durch F', also auch durch F proportional ist:

$$F' . \varrho \sin \alpha.$$

Auf ein Element dF' von F' kommt nämlich — wegen $r = 1$, $\cos \varepsilon = 1$ — nach dem Lambertschen Gesetze der Betrag $dF' \cdot \cos i$, der gleich dem Momente von dF' in Bezug auf die Ebene von f ist, wenn man sich die Fläche F' gleichmässig mit Masse von der Dichtigkeit 1 belegt denkt; die Summe dieser Momente ist aber gleich derjenigen der im Schwerpunkt s vereinigten Masse F'. Durch Multiplikation des gefundenen Ausdrucks mit der Beleuchtungsstärke und dem (auch Albedo genannten) Rückstrahlungsvermögen von F würde man die Beleuchtungsstärke von f erhalten; wir wollen aber von diesen Faktoren, die als Konstanten zu betrachten sind, künftig absehen.

Es muss hier ein öfters begangener Fehler berührt werden. Mohrmann nennt F' die zu F gehörige beleuchtende Nutzfläche und setzt, indem er den Faktor ϱ übersieht, die Erhellung von f einfach dem Produkte $F' \sin \alpha$ proportional. L. Weber nennt das Verhältnis der Fläche F' zur Oberfläche 4π der ganzen Einheitskugel den Raumwinkel der Pyramide bezw. der Kegelfläche, welche durch die vom Kugelmittelpunkt nach dem Rande der Fläche F gehenden Strahlen begrenzt wird, und

$$\frac{F'}{4\pi} \sin \alpha$$

den „reduzierten Raumwinkel", den er als Maß der Erhellung von f durch F betrachtet.* Webers Raumwinkelmesser (siehe die Beschreibung a. a. O. S. 346) hat auch Eingang in die Praxis gefunden. Da der Schwerpunkt der Fläche F' immer innerhalb der Kugel liegt, also $\varrho < 1$ ist, erhält man durch Weglassen von ϱ ein zu grosses Resultat. Wollte man z. B. die Erhellung eines Flächenelementes durch eine damit parallele unendlich ausgedehnte ebene reflektierende Fläche mittelst des „reduzierten Raumwinkels" bestimmen, so erhielte man das Doppelte des wirklichen Wertes, denn es bedeckt in diesem Falle

* Weber definiert allerdings den Winkel α nicht genauer, sondern spricht nur von einem „mittleren Elevationswinkel" (die Ebene von f ist wagerecht gedacht), ich wüsste aber nicht, welcher andere Winkel, als der oben eingeführte, gemeint sein könnte.

F' eine Halbkugel und wird somit $\varrho = \frac{1}{2}$, weil der Flächenschwerpunkt einer solchen in der Mitte des betreffenden Halbmessers liegt. Ist F' eine verhältnismässig kleine und nicht langgestreckte Fläche, so mag der Fehler gering sein und darum Webers Raumwinkelmesser in der Praxis unbedenklich Anwendung finden. Immerhin darf man eine Prüfung dieses Punktes verlangen. Ich weiss wohl, dass Weber selbst den angegebenen Ausdruck nur als angenähert richtig hinstellt, aber unbekümmert darum haben die späteren Autoren denselben als allgemein giltig angesehen. Es muss noch gesagt werden, dass die auf diesem Irrtum beruhenden Konstruktionen, die z. B. v. Gruber a. a. O. abgeleitet hat, keineswegs einfacher sind, als die beim Festhalten an Lamberts Gesetz sich ergebenden.

4. Beleuchtungsraum. Beleuchtungsvektor.

Ein anderes Maß für die Erhellung eines Elementes f durch eine reflektierende Fläche F mit gleichförmiger Beleuchtungsstärke und gleichförmigem Rückstrahlungsvermögen, dessen wir uns im folgenden immer bedienen wollen, hat Chr. Wiener (a. a. O. Nr. 484, S. 399 bis 401) eingeführt.

Projiziert man F' (Fig. 2) senkrecht auf die Ebene von f und nennt man F'' die Projektion, dF'' die Projektion eines Elementes dF' von F', so wird

$$dF'' = dF' \cdot \cos i.$$

Daher ist die durch f von F' empfangene Beleuchtungsstärke proportional F'', somit auch proportional $F'' : \pi$, welchen Quotienten Wiener den Beleuchtungsraum der Fläche F' gegenüber dem Elemente f nennt. Zu einer unbegrenzten, mit f parallelen ebenen Fläche, wie zu der über f stehenden Hälfte der Einheitskugel gehört der Beleuchtungsraum 1; in jedem anderen Falle ist der Beleuchtungsraum < 1. Wer Webers Bezeichnungsweise (die nach dem früher Bemerkten nicht älter ist, als die Wienersche, sondern aus dem gleichen Jahre stammt), beibehalten will, sollte wenigstens, um mit Lamberts Beleuchtungslehre in Übereinstimmung zu bleiben, den Begriff des „reduzierten Raumwinkels" dahin abändern, dass er diesen nicht gleich

$$\frac{F'}{4\pi} \cdot \sin\alpha, \quad \text{sondern gleich} \quad \frac{F'}{4\pi} \cdot \varrho \sin\alpha$$

setzte, wodurch der reduzierte Raumwinkel gleich $\frac{1}{4}$ des Beleuchtungsraumes nach Wiener würde. Weber drückt Raumwinkel auch in Quadratgraden aus, von denen 41253 auf die ganze Kugeloberfläche gehen. Auf eine zu f parallele reflektierende Fläche mit einem Raumwinkel von 1 Weberschen Quadratgrad kommt daher annähernd ein Wienerscher Beleuchtungsraum von 0,0001, und dem reduzierten Raumwinkel von 50 Quadratgraden, den nach Herm. Cohn ein guter

Platz in gewöhnlichen Schulräumen mindestens haben sollte (vergl. Weber a. a. O. S. 347) entspricht ungefähr der Beleuchtungsraum 0,005.

Hat man die Beleuchtungsstärken mehrerer Flächenelemente $f, f_1, \ldots,$ die von derselben reflektierenden Fläche F beleuchtet werden und denselben Mittelpunkt p, aber verschiedene Stellung besitzen, mit einander zu vergleichen, so leistet ein Begriff gute Dienste, der jetzt erklärt werden soll. Man denke sich von p in der Richtung nach dem Schwerpunkt s der Fläche F' einen Vektor von der Länge $F'\varrho : \pi$ abgetragen; er soll der **Beleuchtungsvektor** der reflektierenden Fläche F in Bezug auf den Punkt p heissen. Wie man sofort sieht, ist der Wienersche Beleuchtungsraum der reflektierenden Fläche F in Bezug auf das Flächenelement f gleich der Längenzahl der senkrechten Projektion des zum Mittelpunkt von f gehörigen Beleuchtungsvektors der Fläche F auf die Normale von f.

Aus einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes folgt weiter:

Besteht F aus mehreren Teilen, so ist der Beleuchtungsvektor von F die geometrische Summe der zu jenen Teilen gehörigen Beleuchtungsvektoren.

5. Anwendung auf Innenräume mit Tagesbeleuchtung.

Nach einem Lambertschen Satze (a. a. O. S. 37, Lehrsatz 4), von dem unter Nr. 3 bereits ein besonderer Fall benützt worden ist, beleuchten zwei reflektierende Flächen mit gleicher Beleuchtungsstärke und gleichem Rückstrahlungsvermögen ein Flächenelement f gleich stark, wenn beide Flächen aus dem Mittelpunkte von f durch denselben Strahlenkegel bezw. durch dieselbe Strahlenpyramide projiziert werden. Daher würde, um wieder das Beispiel eines Gemäldesaales mit Deckenlicht zu nehmen, die Helligkeit an jeder Stelle des Saales dieselbe bleiben, wenn man die Deckenöffnung durch eine leuchtende ebene Fläche ersetzte, deren Beleuchtungsstärke und deren Rückstrahlungsvermögen natürlich denen des fraglichen Teiles des Himmelsgewölbes gleichkommen müssten. Von dieser Vorstellung ist ohnehin Gebrauch zu machen, wenn die Deckenöffnung durch mattgeschliffenes Glas geschlossen ist. Der damit erreichte Vorteil besteht darin, dass man es jetzt bei allen Punkten des untersuchten Raumes mit einer und derselben leuchtenden Fläche, und nicht mehr mit einem von Punkt zu Punkt wechselnden Stück des Himmelsgewölbes zu thun hat. (Wie sich von selbst versteht, kommt bei einer seitlichen Lichtöffnung, wenn sich das Flächenelement f oberhalb der Fensterbank befindet, nur der, über der wagerechten Ebene durch f liegende Teil der Lichtöffnung in Betracht; vergl. Wagner a. a. O.)

Beschränken wir uns zunächst auf geradlinig begrenzte Lichtöffnungen von sonst beliebiger Gestalt, dann ist der Wienersche Be-

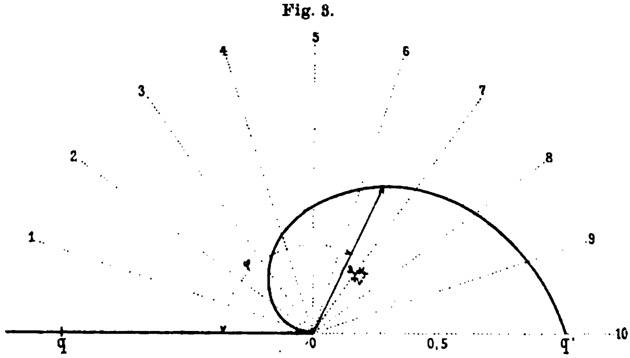
leuchtungsraum eines beliebigen Vielecks zu bestimmen. Das (nach einer Bemerkung unter Nr. 1 schon 1760 von Lambert angegebene, von Chr. Wiener a. a. O. einfacher hergeleitete) Ergebnis ist:

$$R = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1 \cos\alpha_1 + \varphi_2 \cos\alpha_2 + \cdots + \varphi_n \cos\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i}{2\pi} \cos\alpha_i,$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ die Winkel bedeuten, unter denen die n Seiten des Vielecks aus dem Mittelpunkt von f erscheinen, während α_i den Neigungswinkel der Ebene von φ_i gegen die Ebene von f bezeichnet. Von den Winkeln φ ist angenommen, dass sie in Teilen des Halbmessers ausgedrückt seien; sind sie aber in Graden gegeben, so muss man durch 360 (bezw. durch 400 bei Anwendung sogenannter neuer Teilung), statt durch 2π dividieren. Die Winkel α sind so zu nehmen, dass jeder auf der von der leuchtenden Fläche abgewendeten Seite des zugehörigen Winkels φ liegt.

Es kann der Beleuchtungsraum R mit Hilfe der analytischen Geometrie durch Rechnung, oder, was im allgemeinen vorzuziehen sein wird, unter Anwendung der darstellenden Geometrie durch Zeichnung bestimmt werden. Die in letzterem Falle nötige Verwandlung der Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ in Strecken bezw. die graphische Ermittelung der Quotienten $\varphi_i : 2\pi$ lässt sich mittelst einer auf Pauspapier gezeichneten Archimedischen Spirale sehr bequem ausführen.

Fig. 3.



Hat man (Fig. 3) auf einem Stück Pauspapier einen flachen Winkel qoq' in eine Anzahl gleicher Teile, z. B. 10, geteilt, auf dem ersten Strahl $\frac{1}{10}$ der halben Längeneinheit, auf dem zweiten $\frac{2}{10}$ u. s. w., zuletzt auf oq' die halbe Längeneinheit abgetragen und die Endpunkte durch eine stetige Kurve verbunden, so genügt es, den erhaltenen Apparat so auf den gegebenen Winkel φ zu legen, dass — gleichen Erzeugungssinn bei Winkel und Spirale vorausgesetzt — oq den ersten Schenkel von φ deckt; die Spirale wird dann auf dem anderen Schenkel das Stück $\varphi : 2\pi$ abschneiden.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den Beleuchtungsvektor eines Vielecks in Bezug auf einen beliebigen Punkt p des Raumes zu konstruieren. Wie oben seien die Winkel, welche je zwei aufeinander

folgende Strahlen von p nach den Ecken des Vielecks einschliessen, der Reihe nach mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bezeichnet. Die senkrechte Projektion des gesuchten Beleuchtungsvektors v auf die Normale des Flächenelementes f muss eine Länge gleich dem Beleuchtungsraum des Vielecks, also nach dem Obigen gleich

$$\frac{\varphi_1}{2\pi}\cos\alpha_1 + \frac{\varphi_2}{2\pi}\cos\alpha_2 + \cdots + \frac{\varphi_n}{2\pi}\cos\alpha_n$$

haben. Errichtet man senkrecht auf der Ebene des Winkels φ_i, und zwar auf der dem Vieleck zugewendeten Seite, einen Vektor v_i von der Länge $\varphi_i : 2\pi$, so ist dessen Projektion auf die Normale von f gleich:

$$\varphi_i \cos\alpha_i : 2\pi.$$

Da nun die Projektion der geometrischen Summe mehrerer Vektoren auf irgend eine Gerade gleich der Summe der Projektionen jener Vektoren auf dieselbe Gerade ist, so hat die geometrische Summe der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$, und offenbar auch kein anderer Vektor, die verlangte Eigenschaft. Also:

Der Beleuchtungsvektor v einer geradlinig begrenzten Fläche in Bezug auf einen beliebigen Punkt p wird gefunden, wenn man in p auf den Verbindungsebenen dieses Punktes mit den Begrenzungsstrecken der Fläche, die, aus p gesehen, unter den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ erscheinen mögen, Lote errichtet, in letzteren (immer auf der, der leuchtenden Fläche zugewendeten Seite) die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von den Längen

$$\frac{\varphi_1}{2\pi}, \frac{\varphi_2}{2\pi}, \ldots \frac{\varphi_n}{2\pi}$$

(die aus den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ auf die früher angegebene Art mittelst einer im voraus gezeichneten Archimedischen Spirale erhalten werden) aufträgt und diese Vektoren geometrisch addiert (d. h. wie Kräfte zu einer Resultante zusammensetzt).

Der Beleuchtungsvektor einer beliebig begrenzten Fläche lässt sich mit jeder gewünschten Genauigkeit bestimmen, indem man die vorhergehende Konstruktion auf ein ihrem Rande einbeschriebenes Vieleck mit genügend kleinen Seiten anwendet.

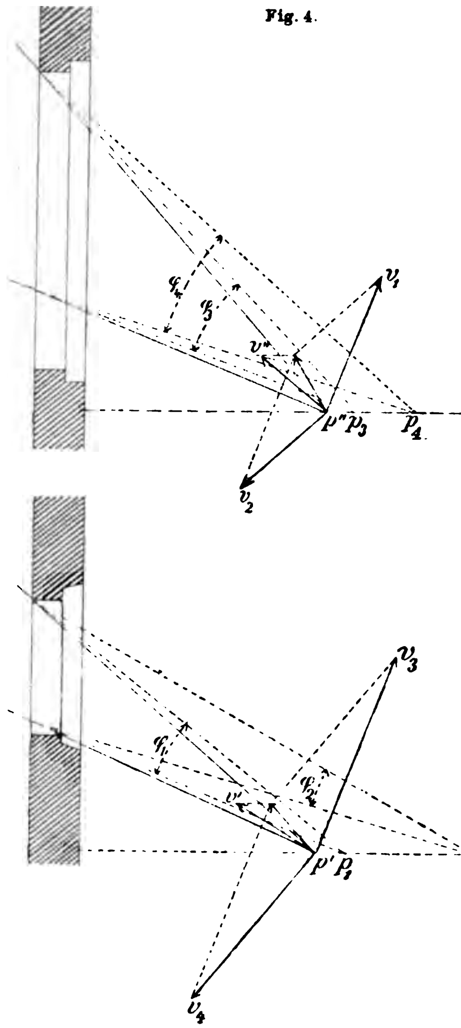
Alles dies gilt für gekrümmte Flächen so gut wie für ebene.

6. Beispiel: Beleuchtung durch ein seitliches Fenster.

Es handle sich darum, die Erhellung einer Pultfläche in dem beliebigen Punkte p durch das in Figur 4 in Grund- und Aufriss dargestellte Fenster zu beurteilen, wobei das in p sichtbare Stück des Himmels nach unten durch die Ebene von p nach einem zur Fensterwand parallelen Dachfirst begrenzt sein möge. Die vierseitige Lichtpyramide, deren Spitze p ist, hat zwei zur Aufrissebene, zwei zur

Grundrissebene senkrechte Seitenflächen. Die in den ersteren liegenden Kantenwinkel sollen φ_1 und φ_2, die übrigen φ_3 und φ_4 heissen. Die wahre Grösse dieser Winkel lässt sich durch Drehen ihrer Ebenen (etwa um die Spuren mit der äusseren Fensterwand) in Parallelstellung mit der Grundriss- bezw. Aufrissebene finden. (Die Scheitel der Winkel kommen dadurch beziehentlich in die Lagen p_1, p_2, p_3, p_4.) Die Vektoren v_1 und v_2 werden parallel zur Aufrissebene, die Vektoren v_3 und v_4 parallel zur Grundrissebene, weshalb erstere im Aufriss, letztere im Grundriss in wahrer Länge erscheinen. Der Grundriss des resultierenden Vektors v ist mit v', der Aufriss mit v'' bezeichnet; v_1 und v_2 für sich zusammengesetzt, geben eine zur Aufrissebene parallele, v_3 und v_4 eine wagerechte Komponente von v. Die Pultfläche würde unter sonst gleichen Umständen die grösstmögliche Helligkeit zeigen, wenn sie senkrecht zu dem gefundenen Beleuchtungsvektor v wäre. Der ihr zukommende Wienersche Beleuchtungsraum wäre dann gleich der wahren Länge von v; die Zeichnung hat — bei Benützung einer für die Längeneinheit 400 mm konstruierten Archimedischen Spirale, von der jedoch nur ein kurzes Stück nötig war — ungefähr die Länge 14 mm, also den Beleuchtungsraum 0,035 ergeben. Bei anderer Neigung der Pultfläche muss der Vektor v auf ihre Normale projiziert werden. Für eine wagerechte Fläche liefert die Zeichnung (durch die etwa 7 mm lange lotrechte Komponente von v) einen Beleuchtungsraum vom ungefähren Betrage 0,018. Sind bloss wagerechte Flächen auf ihre Helligkeit zu untersuchen, so brauchen die Vektoren v_3 und v_4 nicht konstruiert zu

Fig. 4.



werden, weil sie keinen Beitrag zur lotrechten Komponente von r geben; die Zeichenarbeit vermindert sich dann um die Hälfte. Bei mehreren Fenstern sind für jedes einzelne die Konstruktionen auszuführen und die erhaltenen Beleuchtungsvektoren geometrisch (bezw. die Beleuchtungsräume arithmetisch) zu addieren.

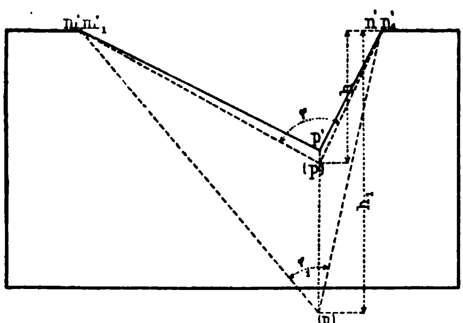
B. Anwendung auf Gemäldesäle mit Deckenlicht.

7. Beleuchtungsstärke einer beliebigen Stelle einer Wand.

Wir wollen uns auf die Untersuchung einer Saalwand und auf den Fall einer rechteckigen Deckenöffnung mit einem Paare zur Wand paralleler Seiten beschränken.

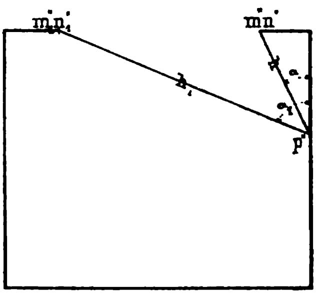
Bei Fragen wie der, welchen Einfluss auf die Helligkeit das Vorwärtsneigen eines Bildes um einen gegebenen Winkel hat, ist es nötig, den Beleuchtungsvektor zu konstruieren. Die Ausführung stimmt mit der unter Nr. 6 beschriebenen ganz überein, denn kippt

Fig. 5.



Aufriss.

Fig. 6.



Seitenriss.

man den Saal in Gedanken um eine Bodenkante, so wird das Deckenfenster zu einem seitlichen.

Einfacher ist die Bestimmung des Beleuchtungsraumes R der Deckenöffnung, deren Ecken m, n, m_1, n_1 heisen sollen, in Bezug auf irgend ein, an der Stelle p gelegenes Element der Wand. Die Formel in Nr. 5 ergiebt:

$$R = \frac{\varphi}{2\pi}\cos\alpha - \frac{\varphi_1}{2\pi}\cos\alpha_1,$$

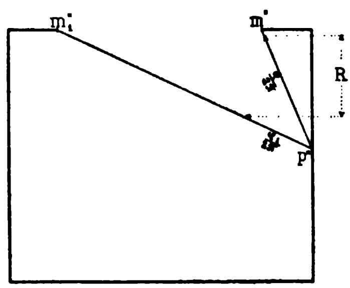
wo φ und φ_1 die Winkel bezeichnen, unter denen die zur Wand parallelen Seiten mn und $m_1 n_1$ der Öffnung aus p gesehen erscheinen, α und α_1 die spitzen Winkel der Ebenen von φ und φ_1 mit der Wand.* Hat man mittelst der dem Seitenriss (Fig. 6) entnommenen Höhen h

* Magnus hat irrtümlicherweise $(\alpha_1 - \alpha)$ als Maß der Helligkeit in p betrachtet, Mentz dagegen $(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_1)$ als Maß für die Erhellung durch eine zur Wand senkrechte Lamelle der Lichtpyramide.

und h_1 der Dreiecke mnp und m_1n_1p die wahre Grösse der Winkel φ und φ_1 im Aufriss (Fig. 5) bestimmt und daraus mit Hilfe der Archimedischen Spirale die Strecken $\varphi : 2\pi$ und $\varphi_1 : 2\pi$ abgeleitet, so genügt es, letztere im Seitenriss von p aus in den Geraden pm und pm_1 (Fig. 7) abzutragen und auf die Wand zu projizieren; der Unterschied der Projektionen, mit der Längeneinheit der verwendeten Spirale gemessen, giebt den gesuchten Beleuchtungsraum R.

Um R durch Rechnung zu bestimmen, kann man ein Cartesisches Koordinatensystem, etwa mit der Schnittlinie der Wand und der Decke als x-Axe und der Lotrechten durch die Projektion des Mittelpunktes der Deckenöffnung auf die Wand als z-Axe annehmen. Wird die halbe Länge der Deckenöffnung — unter Länge die zur untersuchten Saalwand parallele Abmessung verstanden — mit l, die halbe Breite derselben mit b, die Entfernung des Mittelpunktes der Deckenöffnung von der Wand (gleich der halben Saalbreite bei regelmässiger Anordnung) mit b' bezeichnet, so ist:

Fig. 7.



$$2)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b'-b}{z}, \\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{b'+b}{z}, \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} h = \dfrac{b'-b}{\sin\alpha} = \dfrac{z}{\cos\alpha}, \\ h_1 = \dfrac{b'+b}{\sin\alpha_1} = \dfrac{z}{\cos\alpha_1}, \end{cases}$$

$$4)\quad \varphi = \chi + \psi, \quad \varphi_1 = \chi_1 + \psi_1,$$

wo

$$5)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\chi = \dfrac{l+x}{h}, \quad \operatorname{tg}\psi = \dfrac{l-x}{h}, \\ \operatorname{tg}\chi_1 = \dfrac{l+x}{h_1}, \quad \operatorname{tg}\psi_1 = \dfrac{l-x}{h_1}. \end{cases}$$

Bei der Ausrechnung genügen für gewöhnlich dreistellige Logarithmen.

Die Helligkeit in irgend einem Punkte der Wand hängt von den Koordinaten dieses Punktes, den Abmessungen des Deckenlichts und der Saalbreite ab, mit anderen Worten: der Beleuchtungsraum R ist eine Funktion der fünf Veränderlichen x, z, l, b, b', die wir mit $f(x, z, l, b, b')$ bezeichnen wollen.

Aus den Gleichungen 4) und 5) folgt:

$$6)\quad \begin{cases} \varphi = arc\operatorname{tg}\dfrac{l+x}{h} + arc\operatorname{tg}\dfrac{l-x}{h}, \\ \varphi_1 = arc\operatorname{tg}\dfrac{l+x}{h_1} + arc\operatorname{tg}\dfrac{l-x}{h_1}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte, sowie

$$\cos\alpha = \frac{z}{h}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{z}{h_1},$$

in die erste Gleichung ein, so kommt als ein Ausdruck der fraglichen Funktion:

$$
7)\quad \begin{cases} R = f(x, z, l, b, b') \\ \quad = \dfrac{z}{2\pi h}\left(arc\,\mathrm{tg}\dfrac{l+x}{h} + arc\,\mathrm{tg}\dfrac{l-x}{h}\right) \\ \quad - \dfrac{z}{2\pi h_1}\left(arc\,\mathrm{tg}\dfrac{l+x}{h_1} + arc\,\mathrm{tg}\dfrac{l-x}{h_1}\right), \end{cases}
$$

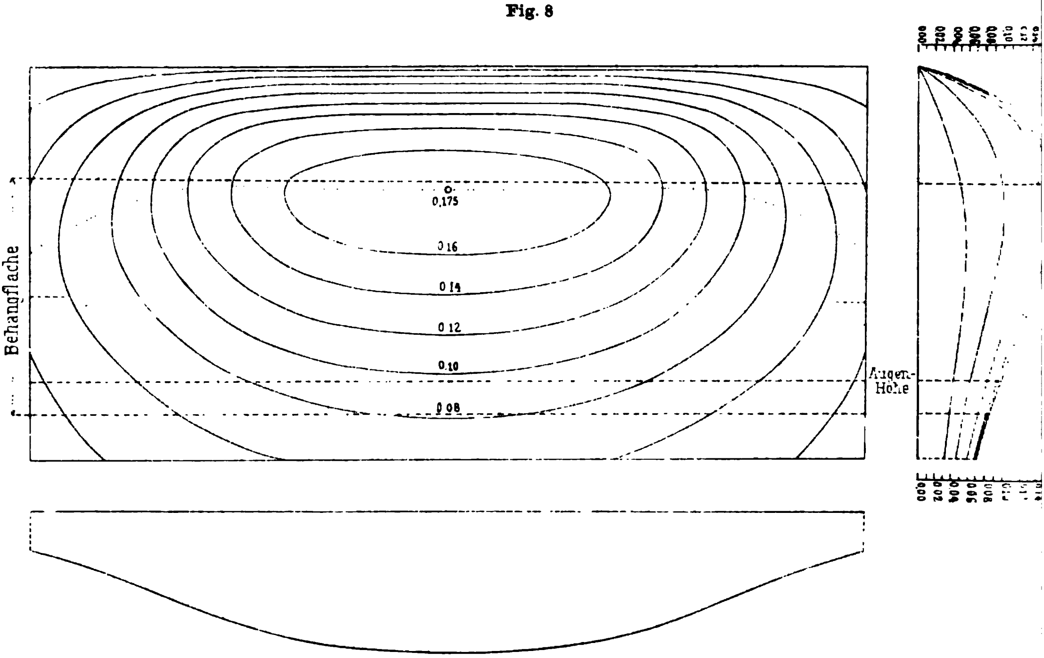
worin

$$
8)\qquad h = +\sqrt{(b'-b)^2+z^2},\quad h_1 = +\sqrt{(b'+b)^2+z^2}.
$$

8. Linien gleicher Helligkeit.

Wir denken uns in jedem Punkte der Wand senkrecht zu ihr den als Strecke dargestellten Beleuchtungsraum der Deckenöffnung in Be-

Fig. 8



zug auf diesen Punkt abgetragen. Die Endpunkte erfüllen eine (offenbar zur yz-Ebene symmetrische) Fläche, deren Gestalt eine klare Vorstellung von den Abstufungen der Beleuchtungsstärke oder, falls überall gleiches Rückstrahlungsvermögen vorausgesetzt wird, von den Abstufungen der Helligkeit auf der Wand giebt. In Bezug auf das in Nr. 7 eingeführte Koordinatensystem hat die betrachtete Fläche die Gleichung $y = f(x, z)$, mit $f(x, z)$ als der durch 7) definierten Funktion; sie ist also transcendent. Behufs Darstellung dieser Fläche denke man sich die Wand mit einem Netz von lotrechten und wagerechten Linien überzogen, die einander etwa in 1 m Abstand folgen, und bestimme für die Knotenpunkte entweder graphisch oder durch Rechnung nach Nr. 7 den Beleuchtungsraum der Deckenöffnung. Trägt man immer

für die Punkte einer und derselben Lotrechten oder einer und derselben Wagerechten die zugehörigen Strecken im Seitenriss bezw. im Grundriss ab — die Wand als Aufrissebene gedacht — und verbindet man die Endpunkte durch eine stetige Kurve, so ergeben sich die Schnitte der gesuchten Fläche mit einer Reihe von zur Seitenebene bezw. zur Grundrissebene parallelen Ebenen. Man erhält daraus in einfachster Weise die Schnitte der Fläche mit beliebigen zur Wand parallelen Ebenen, deren Aufrisse Linien gleicher Helligkeit sind. Figur 8 zeigt ein (von mir gezeichnetes und bereits von Wagner a. a. O. verwendetes) Beispiel; es betrifft die in $\frac{1}{150}$ n. Gr. dargestellte Langwand eines Saales von 16,60 m Länge, 9,10 m Breite und 7,85 m Höhe; das Deckenlicht hat 12,20 m Länge und 4,70 m Breite. (Drei weitere von mir bezw. nach meiner Angabe durchgeführte Beispiele, darunter zwei Gemäldekabinette mit Seitenlicht, findet man a. a. O. S. 230, 252, 253). Mohrmann und Menz haben (a. a. O.) auch schon Linien gleicher Helligkeit gezeichnet, aber nicht richtig.

9. Relativ hellste Punkte in Wagerechten und Senkrechten.

Für Punkte in einer beliebigen wagerechten Linie der Wand ist z wie auch h und h_1 konstant. Durch partielle Ableitung nach x erhält man aus Gleichung 7) nach leichter Umformung

$$9)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2lxz}{\pi}\left(\frac{1}{[h^2+(l+x)^2][h^2+(l-x)^2]} - \frac{1}{[h_1{}^2+(l+x)^2][h_1{}^2+(l-x)^2]}\right).$$

Wegen $h < h_1$ ist die Klammergrösse immer positiv, weshalb $\frac{\partial f}{\partial x}$ das Vorzeichen von $-x$ hat, also die Funktion f oder mit anderen Worten die Helligkeit von der Mitte — der z-Axe — nach beiden Seiten hin fortwährend abnimmt.

Auch in jeder senkrechten Linie der Wand befindet sich ein relativ hellster Punkt. Man bestimmt ihn graphisch mit Hilfe einer senkrechten Tangente, die man im Seitenriss an den betreffenden senkrechten Schnitt der unter Nr. 8 eingeführten Helligkeitsfläche legt. Die Tiefe z eines solchen Punktes unter der Decke ist Wurzel der transcendenten Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, die ausführlich hier anzuschreiben überflüssig ist, wie auch der Beweis übergangen werden soll, dass nur eine Wurzel vorhanden ist und ihr wirklich ein Maximum von f entspricht. Mentz hat angenommen, der Ort dieser Punkte sei eine wagerechte Gerade, die er Intensitätspolare nennt. Wäre das richtig, so dürfte $\frac{\partial f}{\partial z}$ x nicht enthalten oder es müsste $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$ sein, d. h. es könnte $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht von z abhängen, entgegen dem, was der obige Ausdruck für $\frac{\partial f}{\partial x}$ zeigt. Der fragliche, in Fig. 8 punktiert eingezeichnete

Ort ist also eine (zur z-Axe symmetrische transcendente) Kurve, über die noch bemerkt werden möge, dass sie von dem hellsten Punkte der Wand nach beiden Seiten fällt, entweder unmittelbar, oder nachdem sie (vergl. Fig. 8) sich etwas über den hellsten Punkt erhoben hat, und sich beiderseits je einer schiefen Geraden asymptotisch nähert. Wünscht man zu einzelnen Abscissen x die Ordinaten der betreffenden Kurvenpunkte zu berechnen, was allerdings ein mühsames Geschäft ist, so mag man (mit Anwendung der früheren Bezeichnungen) die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ nach Multiplikation mit $2\pi z$ auf die Form

$$10)\quad \begin{cases} \varphi \cos\alpha \sin^2\alpha + \sin\varphi_1 \cos(\chi_1 - \psi_1) \cos^3\alpha_1 = \varphi_1 \cos\alpha_1 \sin^2\alpha_1 \\ \qquad\qquad + \sin\varphi \cos(\chi - \psi) \cos^3\alpha \end{cases}$$

bringen, jedesmal den graphisch gefundenen Näherungswert von z einsetzen und sich dabei der in dieser Zeitschrift, Bd. 36, S. 158 flg., 1891, beschriebenen Methode — Anwendung der Additionslogarithmen und Berechnung von Korrektionen durch Proportionalteile — bedienen. Die „vorbereitenden“ Gleichungen werden dann, abgesehen von den früheren 2)—5)*

$$11)\quad \begin{cases} A = \log\varphi^0 + E\log\varrho^0 + \log\cos\alpha + 2\log\sin\alpha \\ \qquad + E3\log\cos\alpha_1 + E\log\sin\varphi_1 + E\log\cos(\chi_1 - \psi_1), \end{cases}$$

$$12)\quad \begin{cases} A_1 = \log\varphi_1^0 + E\log\varrho^0 + \log\cos\alpha_1 + 2\log\sin\alpha_1 \\ \qquad + E3\log\cos\alpha + E\log\sin\varphi + E\log\cos(\chi - \psi), \end{cases}$$

und die „Schlussgleichung“, aus der die Korrektion von $\log z$ gefunden wird:

$$13)\quad \begin{cases} B + EB_1 + 3\log\cos\alpha_1 + \log\sin\varphi_1 + \log\cos(\chi_1 - \psi_1) \\ \qquad + E3\log\cos\alpha + E\log\sin\varphi + E\log\cos(\chi - \psi) = 0. \end{cases}$$

10. Hellster Punkt der Wand.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass in der senkrechten Mittellinie der Wand ein graphisch leicht zu bestimmender hellster Punkt vorhanden ist, dessen Tiefe z unter der Decke der für $x = 0$ gebildeten transcendenten Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, nämlich

$$14)\quad \begin{cases} \frac{(b' - b)^2}{h_3} \, arc\,tg \frac{l}{h} - \frac{(b' + b)^2}{h_1^3} \, arc\,tg \frac{l}{h_1} \\ \qquad + l z^2 \left[\frac{1}{h_1^2 (h_1^2 + l^2)} - \frac{1}{h^2 (h^2 + l^2)} \right] = 0 \end{cases}$$

genügt, wo h und h_1 die in 8) angegebenen Funktionen von z sind.

---

* φ^0 bedeutet den in Graden ausgedrückten Winkel φ, ϱ^0 die auf den Bogen von der Länge 1 kommende Zahl von Graden, E die dekadische Ergänzung des nachfolgenden Logarithmus, B den Wert, den die Tafel der Additionslogarithmen zum Argument A liefert.

Mentz hat behauptet, wenn die Deckenöffnung vergrössert werde, so gehe der hellste Punkt der Wand in die Höhe. Das ist nur teilweise richtig, denn es kann, wie sich zeigen wird, die Vergrösserung der Deckenöffnung auch in solcher Weise vorgenommen werden, dass der hellste Punkt an seiner Stelle bleibt oder sogar nach unten rückt. Die analytische Untersuchung der Abhängigkeit der Lage des hellsten Punktes der Wand von den Abmessungen des Deckenlichtes bei gegebener Breite des Saales, obwohl in der Theorie so einfach, hat angesichts der ungefügen Ausdrücke in 14) nichts Verlockendes. Um in dieser Sache klar zu sehen, habe ich für die konstante Saalbreite $2b' = 10\,m$ und für die Längen $2l = 0, 2, 4, 6, \ldots, 18, 20, \infty$ sowie eine hinreichende Zahl verschiedener Breiten der Deckenöffnung die Tiefe des hellsten Punktes berechnet und als Ordinate zu der als Abscisse angenommenen jedesmaligen Breite der Deckenöffnung aufgetragen, wodurch die Kurven in Tafel III entstanden sind Diese Kurven zeigen aufs Deutlichste, dass bei gleichbleibender Länge der Deckenöffnung der hellste Punkt in der That nach oben rückt, wenn ihre Breite vergrössert wird, und zwar um so schneller, je grösser die ursprüngliche Breite war, dass dagegen der hellste Punkt nach unten rückt, wenn die Breite beibehalten, die Länge vergrössert wird. Wie man weiter sieht, hat die Veränderung der Länge einen verhältnismässig geringen Einfluss auf die Höhenlage des hellsten Punktes. Lässt man bei gegebener Breite $2b$ der Deckenöffnung die Länge in Gedanken über alle Grenzen hinaus wachsen, so rückt der hellste Punkt nur bis zu einer bestimmten endlichen Tiefe hinunter. Denn für $x = 0$, $l = \infty$ erhält man $\varphi = \varphi_1 = \pi$ oder

$$R = f(z) = \frac{1}{2}\,(\cos\alpha - \cos\alpha_1) = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\right),$$

mit

$$h^2 = (b' - b)^2 + z^2, \quad h_1{}^2 = (b' + b)^2 + z^2,$$

und als Gleichung, aus der z zu berechnen ist, ergiebt sich

$$\frac{(b'-b)^2}{h^3} = \frac{(b'+b)^2}{h_1{}^3},$$

woraus man mit den Abkürzungen

$$b' - b = a, \quad b' + b = a_1$$

findet:

$$15)\qquad z = \frac{a^{\frac{2}{3}}\,a_1{}^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + a_1{}^{\frac{2}{3}}}}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in den obigen Ausdruck für R erhält man als obere Grenze für den Beleuchtungsraum im hellsten Punkte der Wand bei gegebenem b:

$$16)\qquad R = \frac{1}{2}\,\frac{a_1{}^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\,a_1{}^{\frac{2}{3}} + a_1{}^{\frac{4}{3}}}},$$

und als grössten Wert hiervon bei $a = 0$, also $b' = b$, d. h. im Falle eines die ganze Saalbreite einnehmenden Deckenlichtes:

$$R = \frac{1}{2}.$$

Aus Tafel III ist Tafel IV abgeleitet, die den Zweck hat, für einen Saal von 10 m Breite und beliebigen Abmessungen des Deckenlichts bis zu 20 m Länge und 10 m Breite augenblicklich die Höhenlage des hellsten Punktes zu liefern. Man sucht den gegebenen Wert der Länge $2l$ des Deckenlichts auf dem wagerechten Maßstabe, denjenigen der Breite $2b$ auf dem senkrechten Maßstabe, geht von dem ersteren Punkte senkrecht herunter bis zu der Wagerechten durch den letzteren und liest an der durch den erhaltenen Punkt gehenden Kurve die gesuchte Tiefe des hellsten Punktes der Wand unter der Decke ab. Die Tafel kann natürlich auch Anwendung finden, wenn die Saalbreite grösser oder kleiner als 10 m ist, denn bei proportionaler Vergrösserung oder Verkleinerung aller Abmessungen ändert sich die Tiefe des hellsten Punktes unter der Decke im gleichen Verhältnis.

Die Anschauungen von Magnus über die Lage des hellsten Punktes stimmen mit unseren Ergebnissen ebenfalls nicht überein. So schätzte Magnus bei einem quadratischen Saal von 25′ Höhe und 35′ Breite, dessen Deckenlicht $\frac{1}{3}$ der Saalbreite einnimmt, die Bodenhöhe des hellsten Punktes auf 8′, welche Höhe er als die angenehmste für den Beschauer ansieht. Bei 10 m Breite und den angegebenen Verhältnissen ergiebt sich aber für den hellsten Punkt etwa 2,64 m, also bei 35′ Breite 9,24′ Deckentiefe oder 15,76′ Bodenhöhe, also fast das Doppelte des von Magnus geschätzten Wertes, ja es wäre sogar durch unendliche Verlängerung des Saales und des Deckenlichtes nicht möglich, den hellsten Punkt auf die von Magnus verlangte Höhe von 8′ herunter zu bringen, da bei den obigen Verhältnissen

$$a_1 = 2a, \quad 3a = 35'$$

ist, also Gleichung 15):

$$z = 11{,}5',$$

d. h. 13,5′ Bodenhöhe für den hellsten Punkt liefert.

Bei der Konstruktion der Tafel III genügte die graphische Bestimmung der zu verschiedenen Wertepaaren l, b gehörigen Werte von z nicht, sondern es musste die Genauigkeit durch Rechnung erhöht werden. Es wurde dabei folgender Weg eingeschlagen. Für

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b' - b}{z}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b' + b}{z},$$

$$h = \frac{z}{\cos \alpha} = \frac{b' - b}{\sin \alpha}, \quad h_1 = \frac{z}{\cos \alpha_1} = \frac{b' + b}{\sin \alpha_1},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l}{h}, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{l}{h_1},$$

geht Gleichung 14) nach Multiplikation mit l und Trennung der positiven und negativen Glieder über in

$$17)\quad \psi \sin^2\alpha \operatorname{tg}\psi + \sin^2\psi_1 \cos^2\alpha_1 = \psi_1 \sin^2\alpha_1 \operatorname{tg}\psi_1 + \sin^2\psi \cos^2\alpha.$$

Die Anwendung der Additionslogarithmen führt zur Aufstellung der vorbereitenden Gleichungen:

$$18)\quad \begin{cases} A = \log\psi^0 + E\log\varrho^0 + 2\log\sin\alpha + \log\operatorname{tg}\psi + E\,2\log\sin\psi_1 \\ \qquad + E\,2\log\cos\alpha_1 \end{cases}$$

und

$$19)\quad \begin{cases} A_1 = \log\psi^0{}_1 + E\log\varrho^0 + 2\log\sin\alpha_1 + \log\operatorname{tg}\psi_1 + E\,2\log\sin\psi \\ \qquad + E\,2\log\cos\alpha, \end{cases}$$

sowie der Schlussgleichung:

$$20)\quad \begin{cases} B + EB_1 + 2\log\sin\psi_1 + 2\log\cos\alpha_1 + E\,2\log\sin\varphi \\ \qquad + E\,2\log\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Die graphisch, mitunter auch nur durch Schätzung gefundenen Näherungswerte z wurden in diese Gleichungen eingesetzt, worauf sich durch Anwendung der Methode der Proportionalteile aus der Schlussgleichung eine Korrektion von $\log z$ ergab. Vom Hersetzen eines Zahlenbeispieles glaube ich absehen zu dürfen.

Zur Berechnung der Senkungen der Knotenpunkte eines Fachwerks.

Von

E. Hammer
in Stuttgart.

In der Abhandlung „Berechnung der Durchbiegungen und der Nebenspannungen der Fachwerksträger" (Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Preussischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten, Jahrgang 48, 1898, Heft I bis III, S. 111 flg.) macht der Verfasser, Baurat A. Francke, von folgendem Verfahren Gebrauch:

Nach Ermittelung der Hauptspannungen S der einzelnen Fachwerksglieder kann man die Längenänderungen der Seiten jedes der Fachwerksdreiecke einfach berechnen. Sind a, b, c die Seitenlängen eines spannungslosen Dreiecks,

$$a_1 = a + \Delta a, \quad b_1 = b + \Delta b, \quad c_1 = c + \Delta c$$

die durch die Spannungen S_a, S_b, S_c im belasteten Zustand geänderten Seitenlängen, so ist, wenn F_a, F_b, F_c die Querschnittszahlen der Stäbe a, b, c und E_a, E_b, E_c ihre Elastizitätsmaße sind:

$$\Delta a = \frac{S_a}{F_a \cdot E_a}, \quad \Delta b = \frac{S_b}{F_b \cdot E_b}, \quad \Delta c = \frac{S_c}{F_c \cdot E_c}.$$

Damit kann man die Winkeländerungen des Dreiecks (a, b, c) infolge der Belastung bestimmen, und aus ihnen lassen sich einfach die Richtungsänderungen (Neigungsänderungen) der einzelnen Gurtungsglieder zusammensetzen, womit die gesuchten Einsenkungen der Knotenpunkte unmittelbar bekannt sind.

Es handelt sich also um Berechnung der Winkeländerungen eines Dreiecks aus gegebenen kleinen Veränderungen zweier Seiten. Herr Francke erhält zur Berechnung dieser Winkeländerungen mit den Bezeichnungen:

$$2s = a + b + c,$$

$$2s_1 = a_1 + b_1 + c_1 \text{ (siehe oben)},$$

A, B, C die Winkel des ursprünglichen, A_1, B_1, C_1 Winkel in dem veränderten Dreieck, F Inhalt des einen oder andern Dreiecks,

$$\alpha = A_1 - A\,, \quad \beta = B_1 - B\,, \quad \gamma = C_1 - C$$

und mit Hilfe der Grössen

$$\Delta_A = s(s-a)(s_1-b_1)(s_1-c_1) - s_1(s_1-a_1)(s-b)(s-c),$$
$$\Delta_B = s(s-b)(s_1-c_1)(s_1-a_1) - s_1(s_1-b_1)(s-c)(s-a),$$
$$\Delta_C = s(s-c)(s_1-a_1)(s_1-b_1) - s_1(s_1-c_1)(s-a)(s-b)$$

für die gesuchten Winkeländerungen die Gleichungen:

I) $$\alpha = \frac{\Delta_A}{F \cdot bc}, \quad \beta = \frac{\Delta_B}{F \cdot ca}, \quad \gamma = \frac{\Delta_C}{F \cdot ab}.$$

Diese Berechnung ist aber offenbar nicht bequem; man muss die Zähler der Brüche in I), die als Differenzen grosser Zahlen entstehen, viel zu scharf, mit vielstelligen Logarithmen berechnen, wenn das Resultat genügend ausfallen soll. Man hat zur Berechnung von Δ_A, Δ_B, Δ_C nicht weniger als 8 Logarithmen scharf (z. B. 6—7 stellig) aufzuschlagen und dazu sechs Zahlen scharf aufzusuchen, um schliesslich allenfalls mit dem Rechenschieber nach I) rechnen zu können. Eine Ersparnis an Rechenarbeit gegen das Verfahren, das Dreieck (a, b, c), und sodann das Dreieck (a_1, b_1, c_1) mit der vorhin angegebenen Zahl von Logarithmendezimalen direkt aufzulösen (also z. B. A und A_1 direkt auf $0'',5$ zu rechnen und daraus $\alpha = A_1 - A$ zu bilden) wird gar nicht mehr erzielt. Dazu entbehrt die Rechnung nach I) der Probe, die man bei der eben angegebenen nächstliegenden Rechnungsweise in den Winkelsummen erhält.

Da ich der Ansicht bin, dass man bei ähnlichen Dingen, d. h. überall in der praktischen Differentialrechnung, sich durchaus des Rechenschiebers statt der vielziffrigen Logarithmentafel bedienen sollte, wobei nur die Formeln entsprechend herzurichten sind, so möchte ich mir gestatten, für diese Rechnung folgende Form vorzuschlagen. Differentiiert man, um aus $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ die Veränderung ΔA an A zu berechnen, die Gleichung

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2,$$

so erhält man leicht für α $(= \Delta A)$ die Gleichung (ich behalte die Bezeichnungen des Herrn Francke bei):

$$\alpha = \frac{1}{c \sin B}(\Delta a - \cos C \Delta b - \cos B \Delta c),$$

die sich mit $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ und $\frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B$ auf die viel einfachere und symmetrische Form bringen lässt:

$$\alpha = \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right) \operatorname{cotg} C + \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta c}{c}\right) \operatorname{cotg} B.$$

Diese Form halte ich im vorliegenden Fall für die beste*; sie setzt allerdings voraus, dass die Winkel des ursprünglichen Dreiecks oder besser gleich ihre cotg ebenfalls bekannt, also aus a, b, c berechnet oder sonstwie ermittelt seien. Da es auf grosse Genauigkeit in diesen cotg der Dreieckswinkel nicht ankommt, so kann man sie sich, wenn sie im Fall des Fachwerks nicht a priori bekannt sind ($45^0, 90^0, 60^0$) mittelbar dadurch bestimmen, dass man in der Zeichnung die Höhen der Dreiecke zieht, an der Rechenschieber-Maßstabkante die Höhen und Seitenabschnitte abliest, um mit dem Rechenschieber die cotg-Brüche sofort bilden zu können.

Die Formelgruppe, die ich an Stelle von I. vorschlagen möchte, ist also (die gesuchten Winkelveränderungen α, β, γ wie oben in Halbmesserteilen):

$$\text{II)} \quad \begin{cases} \alpha = \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right) \operatorname{cotg} C + \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta c}{c}\right) \operatorname{cotg} B \\ \beta = \left(\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta c}{c}\right) \operatorname{cotg} A + \left(\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a}\right) \operatorname{cotg} C \\ \gamma = \left(\frac{\Delta c}{c} - \frac{\Delta a}{a}\right) \operatorname{cotg} B + \left(\frac{\Delta c}{c} - \frac{\Delta b}{b}\right) \operatorname{cotg} A. \end{cases}$$

Die Gleichungen II) verifizieren sich damit sehr einfach, dass

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

sein muss, was der Anblick bestätigt, da in den sechs Ausdrücken, die rechts auftreten, nur drei verschiedene Werte je mit entgegengesetzten Zeichen vorhanden sind, und dass bei ähnlicher Veränderung des Dreiecks, also Gleichheit und Gleichzeichigkeit der Verhältnisse $\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta b}{b}, \frac{\Delta c}{c}$, die Werte von α, β, γ verschwinden müssen, was ebenfalls der Anblick von II) bestätigt.

Man hat zur Anwendung der Gleichungen II) nur die drei Verhältniszahlen $\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta b}{b}, \frac{\Delta c}{c}$ mit dem Rechenschieber in Dezimalbruchform zu verwandeln, die Differenz je zweier zu bilden, diese wieder mit Hilfe des Schiebers mit der cotg des nicht gleich benannten Winkels zu multiplizieren und je zwei dieser Produkte (mit dem richtigen Vorzeichen) zu addieren (wobei man sich, um des Vorzeichens sicher zu sein, nur zu merken braucht, dass in den Klammern in II. die dem Winkel gleich benannte Seite voransteht), um sofort die Winkeländerungen in Halbmesserteilen zu haben. Man wird kaum eine bequemere Rechnung dafür finden können; ein bestimmtes Dreieck lässt sich ganz gut in einer Minute so durchrechnen.

Nehmen wir als Zahlenbeispiel das folgende (absichtlich eines, bei dem die Beziehungen so einfach sind, dass selbst die II. entbehrlich

* Vergl. einen Aufsatz des Verfassers in Zeitschr. für Vermess. 1895, S. 165; ferner Lehrbuch der Trigonometrie, 2. Aufl. 1897, S. 405.

wären): Die Katheten eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks seien 4000,0 und 4000,0 mm lang, die Hypotenuse also $4000\sqrt{2} = 5656{,}86$ mm. Die Katheten werden um je 4,0 mm verlängert (die Maße sind ganz willkürlich angenommen, eine Streckung um $\frac{1}{1000}$ kommt bei Fachwerken aus Eisen ja nicht in Betracht, nur etwa $\frac{1}{2000}$), die Hypotenuse um 3,0 mm verlängert. Welche Winkel erhält das Dreieck statt der ursprünglich vorhandenen 45°, 45° und 90°?

Es ist hier $\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} C = 1$, $\operatorname{cotg} A = 0$; also aus II) mit

$$b = c = 4000,\ \Delta b = \Delta c = +4{,}0;\ a = 5657,\ \Delta a = +3{,}0:$$

$$\alpha = 2\left(\frac{3}{5657} - \frac{4}{4000}\right),$$

oder nach Ablesung des ersten Bruchs am Rechenschieber (ich habe hier den 50 cm-Schieber benutzt, obwohl für die Praxis der 25 cm-Schieber auch hier ausreicht):

$$\alpha = -0{,}000939_4,$$

in Winkelmaß:

$$\alpha'' = -0{,}000939_4 .\ 206265'' = -193_5'' = -3'\,14''.$$

Die Änderungen der Winkel B und C sind hier selbstverständlich

$$\beta = \gamma = -\frac{1}{2}\alpha = +1'\,37'';$$

nach Anblick von II) wird in der That:

$$\beta = \gamma = \frac{4}{4000} - \frac{3}{5657} = +0{,}000469_7.$$

Rechnet man direkt mit Logarithmen, so findet man mit $a = 5{,}656854$, $b = c = 4{,}000000$, also $a_1 = 5{,}659854$, $b_1 = c_1 = 4{,}004000$:

$$\sin\frac{A_1}{2} = \frac{5{,}659854}{8{,}008000},\ \text{d. h.}$$

$$A_1 = 44^0 58'\,22'',_7 \quad \text{oder} \quad \alpha = -3'\,14''$$

wie oben, u. s. w.

Ist das Dreieck ursprünglich rechtwinklig

$$\left(\operatorname{cotg} A = 0,\quad \operatorname{cotg} B = \frac{1}{\operatorname{cotg} C}\right)$$

oder ursprünglich gleichschenklig (z. B. $\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} C$), so vereinfacht sich natürlich die Anwendung von II) noch sehr.

Selbstverständlich berührt all' das Vorstehende die von Herrn Francke a. a. O. aufgestellten Gleichungen zur Ausrechnung der linearen Durchbiegungen mit Hilfe der α (s. z. B. Sp. 114 und 115) in keiner Weise; man sollte sich nur zur Rechnung dieser y wieder unbedingt des Rechenschiebers bedienen, der für solche Dinge viel Zeit und Mühe erspart.

Zur graphischen Behandlung der Kräfte im Raume.

Von **W. Stäckel** in Charlottenburg.

A. Die Zusammensetzung der Kräfte im Raume lässt sich bekanntlich in der Weise durchführen, dass man jede Kraft in zwei Komponenten zerlegt, von denen die erste in einer Ebene E liegt, während die andere entweder senkrecht zu E oder parallel zu einer Geraden G oder durch einen fixierten Punkt O läuft. Der Kürze wegen seien diese Methoden hier mit Orthogonal-, Parallel- resp. Centralreduktion (E, G resp. O) bezeichnet.

Zur Konstruktion der Centralaxe empfiehlt sich die Orthogonalreduktion. Man setze die vorliegenden Kräfte zunächst vermittelst Kräftepolygons so zusammen, als ob sie alle in demselben Punkte angriffen. Die hierbei resultierende Kraft sei im folgenden kurzweg die Wertresultante (R_w) genannt. Wählt man jetzt $E \perp R_w$, so liefert die Orthogonalreduktion (E, R_w) eine Kraft gleich und parallel R_w und ein Moment in der Ebene E. Die gewonnene Wirkungslinie von R_w ist dann nach der Definition der Centralaxe mit derselben identisch. — Zur zeichnerischen Ausführung ist diese Methode nicht geeignet, da die Kräfte meist schon in einem bestimmten orthogonalen Projektionssystem dargestellt vorliegen werden. Man führe daher zunächst in dem gegebenen System die Orthogonalreduktion aus, wodurch man zwei sich senkrecht kreuzende Kräfte K_1 und K_2 erhält. Wendet man jetzt erst auf K_1 und K_2 die oben beschriebene Centralaxenkonstruktion an, so ergiebt sich eine sehr einfache Ausführung. Nach einem Satz von Möbius* schneidet die Centralaxe die kürzeste Entfernung der Aktionslinien von K_1 und K_2. Ist hier D der Durchstosspunkt von K_2 durch die Projektionsebene, so stellt das Lot DJ von D auf K_1 die kürzeste Entfernung von K_1 und K_2 dar. Die Richtung der Centralaxe ist bekannt, sie ist der Wertresultante R_w parallel. Es handelt sich also nur noch um die Lage von C ($CD:CJ$). Denkt man sich jetzt die Orthogonalreduktion ($E \perp R_w$, R_w) ausgeführt, so erkennt man, dass $CD:DJ = K_{1w}:K_{2w}$ ist, wobei K_{1w} und K_{2w} die Komponenten von K_1 und K_2 parallel R_w sind. $K_{1w}:K_{2w}$ erhält man aber leicht, wenn man im Kräftedreieck (K_1, K_2, R_w) von der Ecke (K_1, K_2) auf R_w ein Lot fällt, in dem Verhältnis der auf R_w gebildeten Höhenabschnitte. Ist der Punkt C festgelegt, so ist die Centralaxe nach Lage und Richtung bestimmt.

B. Die Zerlegung der Kräfte im Raume. Allgemeines Prinzip: Handelt es sich um irgend eine Zerlegung einer Kraft in Komponenten, die in vorgeschriebenen Geraden liegen, so denke man sich die Kraft zunächst in beliebige leicht bestimmbare Hilfskomponenten zerlegt. Jede der gesuchten Komponenten kann man jetzt als algebraische Summe der durch den Einfluss der einzelnen Hilfskomponenten in den gegebenen Geraden hervorgerufenen Kräfte darstellen. Die gewünschte Zerlegung ist also durchführbar, wenn sich Hilfskomponenten finden lassen, durch die sich einerseits die gegebene Kraft leicht ersetzen lässt, und von denen anderseits die Zerlegungsverhältnisse (auf die absoluten Grössen kommt es hierbei nicht an) nach den gegebenen Geraden bekannt sind. Derartige Hilfskomponenten

* Siehe hierüber K. Th. Vahlen, diese Zeitschrift Bd. 42, S. 160, 1897.

kann man sich verschaffen als Resultanten von Kräftezusammensetzungen, indem man in den vorgeschriebenen Geraden Kräfte zweckentsprechend annimmt und reduziert. Anwendungen des Prinzips:

1. Zerlegung einer Kraft K nach 6 beliebigen gegen einander windschiefen Geraden.

Liegt eine bestimmte Projektionsebene E bereits vor, so wende man die Parallelreduktion (E, K) an. Man wähle in E zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte R_1 und R_2 in derselben Wirkungslinie und zerlege R_1 nach den drei ersten der in E liegenden vorgeschriebenen Wirkungslinien, R_2 nach den drei anderen. Jeder der so in E entstandenen Kräfte entspricht eine Kraft in dem Parallelsystem, da die Resultante beider in eine bestimmte Raumrichtung fallen muss. Als Gesamtresultante ergiebt sich eine Kraft $S \parallel K$. Wiederholt man das Verfahren dreimal unter immer verschiedener Wahl von R_1 und R_2, so erhält man drei zu K parallele Hilfskomponenten mit den oben verlangten Eigenschaften.

2. Konstruktion der Ebene, in der eine Kraft K liegen muss, wenn sie nach fünf gegebenen Geraden zerlegbar sein und durch einen festen Punkt O gehen soll.

Diese Konstruktion gestaltet sich zu einer Spezialisierung der vorigen, nur wird statt der Parallelreduktion die Centralreduktion (E, O) angewendet. Die Spezialisierung besteht darin, dass die eine der in E liegenden Kraftgruppen jetzt nur noch aus zwei Kräften besteht, weshalb R_1 durch den Schnittpunkt derselben laufen muss. Durch zweimalige Anwendung der beschriebenen Zusammensetzung erzielt man hier zwei durch O laufende nach den fünf Richtungen zerlegbare Kräfte S' und S'', welche die gesuchte Ebene bestimmen.

Spezialfall: Soll K eine gegebene Richtung haben, so liegt O im Unendlichen, und es wird die Parallelreduktion angewendet.

Um zu begründen, dass der Ort der Kraft K im vorliegenden Falle eine Ebene ist, braucht man nur zu beweisen, dass man durch eine dritte Kräftezusammensetzung eine Kraft erhält, die in der durch S' und S'' bestimmten Ebene liegt.

Man denke sich zu diesem Zweck S' und S'' zu einer Resultante S vereinigt. Dieselbe Kraft S würde man auch erhalten, wenn man zuerst die angenommenen Kräfte $R_1' = R_2'$ und $R_1'' = R_2''$ zu $R_1 = R_2$ zusammensetzte und durch Zerlegung von R_1 und R_2 in der bisher immer verfolgten Art die Bildung von S bewirkte. Es folgt dies aus dem eingangs aufgestellten allgemeinen Zerlegungsprinzips. Da nun die Kraft S aus S' und S'' resultiert, muss sie in der durch S' und S'' bestimmten Ebene liegen. Es haben also, wie verlangt war, drei Reduktionen drei in einer Ebene liegende Kräfte ergeben.

3. Die Zerlegung einer Kraft nach vier vorgeschriebenen Geraden. Hier muss die Wirkungslinie der anzunehmenden Kräfte $R_1 = R_2$, damit in der Ebene E Gleichgewicht herbeigeführt werden kann, durch die Schnittpunkte je zweier in E gelegener Wirkungslinien laufen. Soll also die Kraft K eine bestimmte Richtung haben, oder durch einen bestimmten Punkt gehen, so ist ihre Lage durch Anwendung des unter 1. angegebenen Verfahrens

eindeutig bestimmt, da nur zwei Annahmen von $R_1 = R_2$ möglich sind, die beide, wie leicht ersichtlich, dasselbe Resultat liefern.

4. Die Zerlegung einer Kraft K nach drei vorgeschriebenen Geraden. Es sei hier nur der für die Theorie des räumlichen Fachwerks wichtige Fall behandelt, dass sich die vier Wirkungslinien in einem Punkte schneiden und für den allgemeineren Fall auf „Henneberg, Statik der starren Systeme" verwiesen. Eine Spezialisierung des bisherigen Konstruktionsvorganges empfiehlt sich bei der vorliegenden Aufgabe nicht, sondern die Kraft K und die Geraden G_1, G_2 und G_3 werden jetzt durch Horizontal- und Vertikalprojektion dargestellt. (K', K'', G_1', G_1'' etc.) — Statt der räumlichen werden nun zwei ebene Zerlegungen nacheinander ausgeführt, derart, dass man z. B. die Schnittlinie G der Ebenen (KG_1 und (G_2G_3) konstruiert und K zuerst nach G und G_1, darauf die in G entstandene Hilfskraft H nach G_2 und G_3 zerlegt. Zur Auffindung der Projektionen von G bringe man eine zur Horizontalebene vertikale Hilfsebene mit sämtlichen Kraftrichtungen zum Schnitt (Schnittpunkte 1, 2, 3, 4). Die Projektionen von 1, 2, 3, 4 sind leicht konstruierbar. Zieht man dann $1''4''$ und $2''3''$, so ist der Schnittpunkt S'' ein Punkt der Vertikalprojektion der gesuchten Geraden G. Denkt man sich das Kräfteviereck z. B. in der Horizontalprojektion konstruiert, so erkennt man, dass die entsprechende Diagonale desselben der Geraden G' parallel sein muss. Die ohnehin schon meist wenig übersichtlichen Kräftepläne werden bei dieser Konstruktion von Hilfsfiguren frei gehalten.

5. Die Zerlegung eines Kräftesystems, das aus zwei gegeneinander windschief liegenden Kräften (einer sogenannten Dyade) besteht, nach sechs vorgeschriebenen Geraden.

a) Durch zweimalige Anwendung von 1).

b) Ein etwas kürzeres Verfahren sei hier nur angedeutet: Man wende zunächst auf die gegebene Dyade die Orthogonalreduktion (E, G) an, die eine neue Dyade (K_E, K_G) ergiebt. Dann führe man viermal eine Zusammensetzung angenommener Kräfte aus, die je eine Kraft parallel K_G und eine zweite in der Wirkungslinie von K_E ergiebt. Durch die so entstandenen vier Dyaden kann man die gegebene Dyade ersetzen, wenn man nochmals das allgemeine Zerlegungsprinzip zur Anwendung bringt.

Aufgabe 3.

Von **S. Finsterwalder** in München.

Ein oben offener, bis zum Rande gefüllter Wasserbehälter von der Form eines Rotationskörpers mit vertikaler Axe, gegebenem Volumen und gegebener oberer Öffnung soll so konstruiert werden, dass ausschliesslich die durch Rippen entsprechend zu verstärkenden Meridiane Zugspannungen aber keine Biegungsspannungen aufnehmen, während alle Spannungen in der Querrichtung (Ringspannungen) verschwinden. Dementsprechend soll auch der obere Rand spannungslos bleiben. Der Behälter wird an einer Reihe vertikaler Ketten, die von den oberen Enden der Rippen ausgehen, aufgehängt. Welche Form muss der Meridian des Rotationskörpers besitzen? Das Eigengewicht der Konstruktion soll vernachlässigt und nur jenes des Wassers berücksichtigt werden.

43. Band. 2. Heft.

ZEITSCHRIFT

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896), B. WITZSCHEL (1856–1859), M. CANTOR (1859–1896), E. KAHL (1860–1892).

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND DR. M. CANTOR.

43. BAND. 2. HEFT.

MIT 10 TEXTFIGUREN.

Ausgegeben am 30. Mai 1898.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1898.

Über die automorphe Transformation einer Summe von Quadraten mit Hilfe infinitesimaler Transformationen und höherer komplexer Zahlen.

Von

Professor Beez

in Plauen i. V.

Einleitung.

In meiner Abhandlung „Zur Theorie der Vektoren und Quaternionen"* habe ich versucht, eine Lücke in der wissenschaftlichen Begründung des Quaternionenkalküls auszufüllen und ihn zugleich von einer Voraussetzung zu befreien, welche seiner Ausdehnung auf mehr als vier Einheiten entgegensteht. Sodann habe ich die Multiplikationstafeln der reinen Quaternionensysteme von 8, 16 und 32 Einheiten in extenso aufgestellt und die Bedingungen erörtert, die erfüllt sein müssen, damit das Produkt zweier konjugierter Quaternionen gleich der Norm des Quaternions werde. Zum Schluss bin ich des näheren auf den engen Zusammenhang eingegangen, welcher zwischen der Norm eines Quaternions von 2^{n-1} Einheiten und den schiefen Determinanten Cayleys von $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$ unabhängigen Elementen besteht. Diese Determinanten spielen bekanntlich bei der Lösung des Problems der linearen orthogonalen Substitution oder der automorphen Transformation einer Summe von Quadraten eine hervorragende Rolle. In der vorliegenden Arbeit soll das gleiche Problem mit Hilfe von Vektoren und Quaternionen gelöst und, soweit es angeht, noch eine dritte Methode benutzt werden, welche theoretisch auf eine beliebige Zahl von Veränderlichen angewendet werden kann, praktisch aber in der Hauptsache schon bei $n = 4$ versagt, nämlich die Methode der infinitesimalen Transformationen von Sophus Lie.

* Siehe diese Zeitschrift 41. Jahrgang.

§ 1.

Die Transformation zweier Quadrate in sich selbst.

Um die Summe zweier Quadrate $x_0^2 + x_1^2$ in die Summe $x_0'^2 + x_1'^2$ zu transformieren, hat man statt x_0 und x_1 bezüglich zu setzen:

$$1)\quad \begin{cases} x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1, \\ x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 \end{cases}$$

und die Koeffizienten a so zu bestimmen, dass

$$2)\quad \begin{cases} a_{00}^2 + a_{10}^2 \quad = 1, \\ a_{01}^2 + a_{11}^2 \quad = 1, \\ a_{00}a_{01} + a_{10}a_{11} = 0 \end{cases}$$

werde, dann ist:

$$x_0'^2 + x_1'^2 = x_0^2 + x_1^2$$

und der Punkt x_0, x_1 des Kreises $x_0^2 + x_1^2 = c$ in einen anderen Punkt desselben Kreises x_0', x_1' übergeführt oder transformiert. Es entspricht also diese Transformation der Drehung einer Ebene um einen festen Punkt in derselben, bei welcher jeder Punkt der Ebene einen Kreis um den festen Punkt beschreibt. Die Gleichungen 1) an und für sich, d. h. ohne Rücksicht auf die Gleichungen 2) stellen die sogenannte allgemeine lineare homogene kontinuierliche Transformationsgruppe in zwei Veränderlichen dar.* Sie ist viergliedrig, d. h. sie enthält vier von einander unabhängige oder wesentliche Parameter $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$, wenn keine Bedingungsgleichung zwischen denselben stattfindet, dreigliedrig, wenn eine Bedingungsgleichung gegeben ist, z. B.:

$$a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} = 1.$$

In unserem Falle, sobald also neben den Gleichungen 1) auch die Gleichungen 2) Bestand haben, ist die Gruppe eingliedrig. Die Koeffizienten a_{ik} lassen sich dann sämtlich als Funktionen eines einzigen Parameters darstellen. Die Gruppeneigenschaft der Transformation 1) ohne Berücksichtigung der Bedingungen 2) ergiebt sich daraus, dass zwei aufeinander folgende Transformationen wiederum eine Transformation derselben Beschaffenheit geben. Wendet man auf die Transformation 1) eine neue Transformation derselben Art:

$$1^*)\quad \begin{cases} x_0'' = b_{00}x_0' + b_{01}x_1', \\ x_1'' = b_{10}x_0' + b_{11}x_1' \end{cases}$$

an, so ergiebt sich, wenn

$$3)\quad \begin{cases} a_{00}b_{00} + a_{10}b_{01} = c_{00}, \\ a_{01}b_{00} + a_{11}b_{01} = c_{01}, \\ a_{00}b_{10} + a_{10}b_{11} = c_{10}, \\ a_{01}b_{10} + a_{11}b_{11} = c_{11} \end{cases}$$

gesetzt wird:

---

* Siehe S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen I, 578.

$$4)\quad \begin{cases} x_0'' = c_{00}x_0 + c_{01}x_1, \\ x_1'' = c_{10}x_0 + c_{11}x_1, \end{cases}$$

also eine Transformation, die von derselben Beschaffenheit ist wie 1). Darnach bilden die Transformationen 1) eine Gruppe. Die identische Transformation

$$x_0' = x_0,$$
$$x_1' = x_1$$

tritt ein, wenn $a_{00} = a_{11} = 1$, $a_{10} = a_{01} = 0$ ist. Die inverse Transformation oder diejenige Transformation, welche den Punkt x_0', x_1' in den Punkt x_0, x_1 zurückführt, lautet:

$$x_0'' = \frac{a_{11}}{\Delta} x_0' - \frac{a_{01}}{\Delta} x_1',$$
$$x_1'' = -\frac{a_{10}}{\Delta} x_0' + \frac{a_{00}}{\Delta} x_1',$$
$$\Delta = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}.$$

Denn setzt man für x_0', x_1' ihre Werte aus 1), so kommt:

$$x_0'' = x_0,$$
$$x_1' = x_1.$$

Zwei Transformationen der Gruppe 1) sind im allgemeinen nicht mit einander vertauschbar. Lässt man auf die Transformation 1) mit den Parametern a die Transformation 1*) die mit den Parametern b folgen, so kommt die Transformation 4), deren Koeffizienten c_{ik} durch die Gleichungen 3) bestimmt werden. Lässt man dagegen auf die b-Transformation 1*) die a-Transformation 1) folgen, so ergiebt sich, wenn:

$$5)\quad \begin{cases} c_{00}' = a_{00}b_{00} + a_{01}b_{10}, \\ c_{01}' = a_{00}b_{01} + a_{01}b_{11}, \\ c_{10}' = a_{10}b_{00} + a_{11}b_{10}, \\ c_{11}' = a_{10}b_{01} + a_{11}b_{11} \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$4^*)\quad \begin{cases} x_0'' = c_{00}'x_0 + c_{01}x_1, \\ x_1'' = c_{10}'x_0 + c_{11}x_1. \end{cases}$$

Die Transformation 4*) ist der Transformation 4) nur dann gleich, wenn

$$c_{00}' = c_{00}, \quad c_{01}' = c_{01}, \quad c_{10}' = c_{10}, \quad c_{11}' = c_{11}.$$

Diese Bedingungen sind erfüllt, sobald

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{10}}{a_{01}} = \dfrac{b_{10}}{b_{01}}, \\[2ex] \dfrac{a_{00} - a_{11}}{a_{00}} = \dfrac{b_{00} - b_{11}}{b_{00}} \end{cases}$$

ist. Nun ergeben sich aus 2) zwei verschiedene Wertsysteme der Koeffizienten a_{ik}. Denn da das Quadrat der Determinante der Koeffizienten:

$$\Delta^2 = (a_{00}\,a_{11} - a_{01}\,a_{10})^2 = 1$$

ist, so hat man die beiden Fälle zu unterscheiden:

$$a_{00}\,a_{11} - a_{01}\,a_{10} = 1,$$
$$a_{00}\,a_{11} - a_{01}\,a_{10} = -1.$$

Hieraus in Verbindung mit 2) ergiebt sich, dass man entweder

7) $$a_{11} = a_{00}, \quad a_{01} = -a_{10} = -\sqrt{1 - a_{00}^2},$$

oder

7*) $$a_{11} = -a_{00}, \qquad a_{01} = a_{10} = \sqrt{1 - a_{00}^2}$$

zu setzen hat. Schreibt man $\cos t$ für a_{00}, so erhält man die beiden eingliedrigen Gruppen:

8) $$\begin{cases} x_0' = x_0 \cos t - x_1 \sin t, \\ x_1' = x_0 \sin t + x_1 \cos t \end{cases}$$

und

8*) $$\begin{cases} x_0' = x_0 \cos t + x_1 \sin t, \\ x_1' = x_0 \sin t - x_1 \cos t. \end{cases}$$

Die Transformationen der Gruppe 8) sind mit einander vertauschbar, denn für eine b-Transformation ist:

9) $$b_{11} = b_{00}, \quad b_{01} = -b_{10} = -\sqrt{1 - b_{00}^2},$$

also:

$$\frac{a_{10}}{a_{01}} = -1 = \frac{b_{10}}{b_{01}},$$
$$\frac{a_{00} - a_{11}}{a_{01}} = 0 = \frac{b_{00} - b_{11}}{b_{01}}$$

entsprechend den Gleichungen 6). Die Transformationen der Gruppe 8*) dagegen sind nicht mit einander vertauschbar, denn in diesem Falle ist zwar:

$$\frac{a_{10}}{a_{01}} = 1 = \frac{b_{10}}{b_{01}},$$

aber nicht:

$$\frac{a_{00} - a_{11}}{a_{01}} = \frac{b_{00} - b_{11}}{b_{01}},$$

wenn nicht $a_{00} = b_{00}$, $a_{01} = b_{01}$ oder die b-Transformation identisch ist mit der a-Transformation. Man kann dies leicht an den Gleichungen 8) und 8*) selbst verifizieren. Wenn man auf die Transformation 8) mit dem Parameter t eine zweite ebensolche Transformation mit dem Parameter t' folgen lässt, also:

$$x_0'' = x_0' \cos t' - x_1' \sin t',$$
$$x_1'' = x_0' \sin t' + x_1' \cos t'$$

annimmt, so kommt nach Einführung der Werte x_0' und x_1' aus 8):

10) $$\begin{cases} x_0'' = x_0 \cos(t + t') - x_1 \sin(t + t') \\ x_0'' = x_0 \sin(t + t') + x_1 \cos(t + t'). \end{cases}$$

Setzt man also

$$11)\qquad t + t' = t'',$$

so wird:

$$x_0'' = x_0 \cos t'' - x_1 \sin t'',$$
$$x_1'' = x_0 \sin t'' + x_1 \cos t''.$$

Der neue Parameter t'' ändert sich nicht, wenn man t mit t' vertauscht. Die Gleichung 10), welche den Parameter t'' aus den Parametern t und t' finden lehrt, stellt ebenfalls eine Gruppe dar, die sogenannte Parametergruppe. Beiläufig erwähnt gilt der Satz von der Vertauschbarkeit der Transformationen der Gruppe der Rotationen in der Ebene überhaupt für alle eingliedrigen kontinuierlichen Gruppen, so z. B. auch für die Rotationen des Raumes um eine feste Axe. Zwei Transformationen der Gruppe 8*) dagegen sind nicht miteinander vertauschbar. Denn lässt man auf die Transformation 8*) eine zweite mit dem Parameter t' folgen, nämlich:

$$x_0'' = x_0' \cos t' + x_1' \sin t',$$
$$x_1'' = x_0' \sin t' - x_1' \cos t',$$

so findet man:

$$12)\qquad \begin{cases} x_0'' = x_0 \cos (t - t') + x_1 \sin (t - t') \\ x_1'' = - x_0 \sin (t - t') + x_1 \cos (t - t') \end{cases}$$

Da das Vorzeichen von $\sin (t - t')$ sich ändert, wenn man t mit t' vertauscht, oder die Reihenfolge der beiden Transformationen umkehrt, so ist ersichtlich, dass zwei Transformationen der Gruppe 8*) nicht mit einander vertauscht werden können. Auch bemerkt man sofort, dass die Gruppe 8*) die identische Transformation nicht besitzt und jede Transformation zugleich ihre eigene inverse ist. Setzt man nämlich $t' = t$, so kommt $x_0' = x_0$, $x_1' = - x_1$. Eine zweimalige Anwendung der Transformation 8*) mit demselben Parameter führt also den Punkt x in sich selbst zurück. Die Gruppe 8*) enthält mithin diskontinuierliche Untergruppen von der Periode 2. Bezeichnet man eine bestimmte Transformation der Gruppe 8* mit T, so ist

$$T \cdot T = T^2 = 1,$$

folglich auch

$$T = \frac{1}{T},$$

also die Transformation zugleich ihre eigene inverse.

Die geometrische Bedeutung der Formeln 8) und 8*) ist unschwer zu erkennen. Man beziehe den Punkt M einer Ebene auf zwei rechtwinklige Koordinatensysteme $x_0 O x_1$ und $x_0' O x_1'$ (siehe Fig. 1), welche denselben Koordinatenanfang O besitzen. Das erste sei um den Koordinatenanfang drehbar, das zweite dagegen fest. Die Koordinaten des Punktes M mögen in dem ersten System mit x_0 und x_1, im zweiten mit x_0' und x_1' bezeichnet werden. Im Augenblick des Zusammenfallens beider Systeme — in der Anfangslage — ist $x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$ oder es findet die „identische Transformation“ statt. Dreht

man aber das erste System durch den Winkel t in der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung, so ist im Falle 8) (siehe Fig. 1):

$$x_0' = OP' = OQ - PR = x_0 \cos t - x_1 \sin t,$$
$$x_1' = MP' = PQ + MR = x_0 \sin t + x_1 \cos t.$$

Für $t = 0$ erhält man die identische Transformation:

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = x_1.$$

Setzt man $-t$ für t, so erhält man die inverse Transformation:

$$x_0' = x_0 \cos t + x_1 \sin t,$$
$$x_1' = -x_0 \sin t + x_1 \cos t.$$

Im zweiten Falle (siehe Fig. 1) ist:

$$x_0' = OP' = OQ + PR = x_0 \cos t + x_1 \sin t,$$
$$x_1' = MP' = PQ - MR = x_0 \sin t - x_1 \cos t.$$

Für $t = 0$ kommt

$$x_0'' = x_0,$$
$$x_1'' = -x_1.$$

Die Gruppe 8*) besitzt also nicht die identische Transformation, sondern die symmetrische. Setzt man jetzt $-t$ für t, so erhält man

$$x_0'' = x_0 \cos t - x_1 \sin t,$$
$$x_1' = -x_0 \sin t - x_1 \cos t,$$

also nicht die inverse Transformation. Diese ist vielmehr, wie wir schon oben bemerkt haben, mit der ursprünglichen identisch. Lässt man n Transformationen der Gruppe 8) mit den Parametern $t_1, t_2 \dots t_n$ aufeinander folgen, so ergiebt sich:

$$13) \quad \begin{cases} x_0^{(n)} = x_0 \cos(t_1, t_2 + \cdots + t_n) + x_1 \sin(t_1, t_2 + \cdots + t_n), \\ x_1^{(n)} = x_0 \sin(t_2 + t_2 + \cdots + t_n) + x_1 \cos(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \end{cases}$$

und wenn alle t einander gleich sind:

$$x_0^{(n)} = x_0 \cos nt - x_1 \sin nt,$$
$$x_1^{(n)} = x_0 \sin nt + x_1 \cos nt.$$

Bei der Gruppe 8*) dagegen hat man zwischen den Transformationen gerader und ungerader Ordnung zu unterscheiden. Man findet:

$$14_1) \quad \begin{cases} x_0^{(1)} = x_0 \cos t_1 + x_1 \sin t_1, \\ x_0^{(3)} = x_0 \cos(t_3 - \overline{t_2 - t_1}) + x_1 \sin(t_3 - \overline{t_2 - t_1}) \text{ etc.}, \\ x_1^{(1)} = x_0 \sin t_1 - x_1 \cos t_1, \\ x_1^{(3)} = x_0 \sin(t_3 - \overline{t_2 - t_1}) - x_1 \cos(t_3 - \overline{t_2 - t_1}). \end{cases}$$

Diese Transformationen sind nach dem Typus 8*) zusammengesetzt, wenn man $t_1, \overline{t_2 - t_1}$ etc. als Parameter ansieht, wogegen die Transformationen gerader Ordnung:

$$x_0^{(2)} = x_0 \cos \overline{t_2 - t_1} - x_1 \sin \overline{t_2 - t_1},$$

$$x_0^{(4)} = x_0 \cos (\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1}) + x_1 \sin (\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1}) \text{ etc.},$$

$$14_2) \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = x_0 \sin \overline{t_2 - t_1} + x_1 \cos \overline{t_2 - t_1}, \\ x_1^{(4)} = x_0 \sin (\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1}) + x_1 \cos (\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1}), \end{cases}$$

sobald man $\overline{t_2 - t_1}$, $\overline{t_4 - t_3}$ als aufeinander folgende Parameter annimmt, nach dem Typus 8) gebildet erscheinen.

Setzt man jetzt alle t einander gleich, so erhalten alle Transformationen ungerader Ordnung die Form:

$$x_0' = x_0 \cos t + x_1 \sin t,$$
$$x_1' = x_0 \sin t - x_1 \cos t.$$

Die gerader Ordnung dagegen:

$$x_0' = x_0,$$
$$x_1' = x_1.$$

Wir können also sagen: Die Transformationen 8) bedeuten eine Drehung der Ebene um den Koordinatenanfang durch den Winkel t,

Fig. 1.

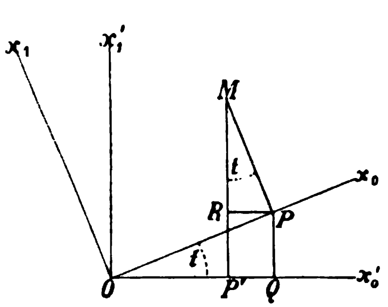
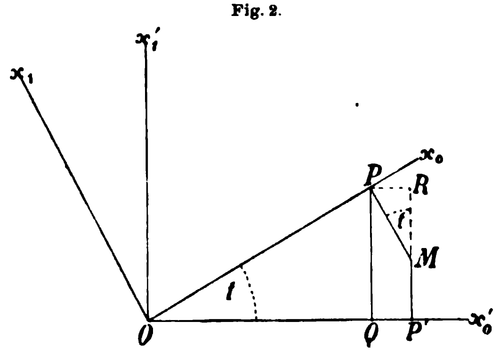


Fig. 2.



die Transformationen 8*) aber eine Umklappung der Ebene mit nachfolgender Drehung derselben um den Winkel t. Die erstgenannten Transformationen bilden eine einzige kontinuierliche Gruppe, die letztgenannten sind dagegen zusammengesetzt aus einer diskontinuierlichen Gruppe von der Periode 2 und zwei kontinuierlichen Gruppen, von denen die eine nach dem Typus 8), die andere nach dem Typus 8*) gebildet ist.

Beide Transformationsgruppen sowohl 8) als 8*) lassen den Koordinatenanfang $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ unverändert; ebenso auch die Entfernung zweier Punkte x_0, x_1 und y_0, y_1. Denn wendet man auf beide zugleich die Transformation 1), 2) an, so kommt:

$$15) \quad \begin{cases} (x_0' - y_0')^2 + (x_1' - y_1')^2 = [a_{00}(x_0 - y_0) + a_{01}(x_1 - y_1)]^2 \\ \qquad + [a_{10}(x_0 - y_0) + a_{11}(x_1 - y_1)]^2 = (x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2. \end{cases}$$

Da zwei Figuren kongruent oder symmetrisch sind, wenn die gerade Verbindungslinie je zweier Punkte der einen Figur dieselbe Länge hat, wie die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte in der anderen Figur, so transformieren die Gleichungen 1), 2), also auch 8), 8*) jede Figur in eine kongruente bez. symmetrische.

Eine gerade Linie

16) $$l x_0 + m x_1 = 1$$

geht durch die Transformationen 8) und 8*) in eine andere Gerade

$$l' x_0 + m' x_1 = 1$$

über, wobei im Falle 8):

17) $$\begin{cases} l' = l \cos t + m \sin t, \\ m' = l \sin t + m \cos t; \end{cases}$$

im Falle 8*):

$$\begin{cases} l' = l \cos t + m \sin t, \\ m' = l \sin t - m \cos t \end{cases}$$

ist. Für $l = m = 0$ ist in beiden Fällen auch $l' = m' = 0$, d. h. die unendlich entfernte Gerade bleibt bei beiden Transformationen erhalten. Auch das Paar der imaginären Kreispunkte bleibt bei 8) unverändert.

Denn es ist:

18) $$\begin{cases} (x_0' + i x_1') = (x_0 \cos t - x_1 \sin t) + i(x_0 \sin t + x_1 \cos t) \\ \qquad = (x_0 + i x_1)(\cos t + i \sin t), \\ (x_0' - i x_1') = (x_0 \cos t - i x_1 \sin t) - i(x_0 \sin t + x_1 \cos t) \\ \qquad = (x_0 - i x_1)(\cos t - i \sin t). \end{cases}$$

Wenn also:

$$x_0 + i x_1 = 0,$$
$$x_1 - i x_1 = 0,$$

so ist auch:

$$x_0' + i x_1' = 0,$$
$$x_0' - i x_1' = 0.$$

Dagegen werden durch die Transformation 8*) die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte mit einander vertauscht. Denn es ist:

19) $$\begin{cases} (x_0' + i x_1') = (x_0 \cos t + x_1 \sin t) + i(x_1 \sin t - x_0 \cos t) \\ \qquad = (x_0 - i x_1)(\cos t + i \sin t), \\ (x_0' - i x_1') = (x_0 \cos t + x_1 \sin t) - i(x_0 \sin t - x_1 \cos t) \\ \qquad = (x_0 + i x_1)(\cos t - i \sin t). \end{cases}$$

Es gehen also durch die Transformation 8*) die Kreispunkte:

$$x_0 + i x_1 = 0,$$
$$x_0 - i x_1 = 0,$$

beziehentlich über in

$$x_0' - i x_1' = 0,$$
$$x_0' + i x_1' = 0$$

Wenn das bewegliche Koordinatensystem nur um einen unendlich kleinen Winkel aus der Anfangslage gedreht wird, so erhalten wir eine sogenannte „infinitesimale Transformation“. Wir leiten dieselbe aus den Gleichungen 1) und 2) ab. Wir variieren 1) in der Weise, dass die Grössen x_0 und x_1 ungeändert bleiben und nur die Konstanten a_{ik} einen unendlich kleinen Zuwachs erhalten. Dies giebt:

$$20)\qquad \begin{cases} \delta x_0' = x_0 \delta a_{00} + x_1 \delta a_{01}, \\ \delta x_1' = x_0 \delta a_{10} + x_1 \delta a_{11}. \end{cases}$$

Die Variationen der Konstanten sind aber nicht unabhängig von einander, sondern an das Bestehen der Gleichungen 2) geknüpft.

Diese geben, wenn sie ebenfalls variiert werden:

$$21)\qquad \begin{cases} a_{00} \delta a_{00} + a_{10} \delta a_{10} = 0, \\ a_{01} \delta a_{01} + a_{11} \delta a_{11} = 0, \\ a_{00} \delta a_{01} + a_{01} \delta a_{00} + a_{10} \delta a_{11} + a_{11} \delta a_{10} = 0. \end{cases}$$

Im Moment des Zusammenfallens beider Systeme ist:

$$\delta x_0' = \delta x_0, \quad \delta x_1' = \delta x_1, \quad a_{00} = a_{11} = 1, \quad a_{10} = a_{01} = 0.$$

Daher ist:

$$\delta a_{00} = 0, \quad \delta a_{11} = 0, \quad \delta a_{10} + \delta a_{01} = 0;$$

folglich, wenn man $\delta a_{10} = \delta t$ setzt:

$$22)\qquad \begin{cases} \delta x_0 = - x_1 \delta t, \\ \delta x_1 = x_0 \delta t. \end{cases}$$

Wir können selbstverständlich diese infinitesimalen Transformationen auch aus den endlichen Gleichungen 8) und 8*) ableiten, wenn wir sie nach t differentiieren, und sodann $t = 0$ setzen. Aus 8) ergiebt sich durch Differentiation nach t:

$$22^*)\qquad \begin{cases} \delta x_0' = -(x_0 \sin t + x_1 \cos t) \delta t = - x_1' \delta t, \\ \delta x_1' = (x_0 \cos t - x_1 \sin t) \delta t = x_0' \delta t, \end{cases}$$

aus 8*) ebenfalls:

$$22^*)\qquad \begin{cases} \delta x_0' = (- x_0 \sin t + x_1 \cos t) \delta t = - x_1' \delta t, \\ \delta x_1' = (x_0 \cos t + x_1 \sin t) \delta t = x_0' \delta t. \end{cases}$$

Da für $t = 0$, $x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$, $\delta x_0' = \delta x_0$, $\delta x_1' = \delta x_1$ wird, so erhält man aus 22) sowohl als aus 22*) sofort die Gleichungen der infinitesimalen Transformation 21), wenn $t = 0$ gesetzt wird. Man erkennt aber auch zugleich — was bei weitem wichtiger ist —, wie man umgekehrt aus der infinitesimalen Transformation 22) die endlichen Transformationen von 8) und 8*) erhalten kann. Vertauscht man nämlich das Variationszeichen δ mit dem Differentialzeichen d, so kann 22) auch schreiben:

23)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = -x_1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_0 \end{cases}$$

und 22) oder 22*):

23*)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_0'}{dt} = -x_0', \\ \dfrac{dx_1'}{dt} = x_1', \end{cases}$$

welche als die Differentialgleichungen der endlichen Transformation anzusehen sind, aus denen sich durch Integration die endlichen Transformationen selbst ergeben. Man hat also, um von der infinitesimalen Transformation zur endlichen Transformation überzugehen, in der infinitesimalen Transformation statt der Variationszeichen die Differentialzeichen, statt der Koordinaten x_0 und $x_1 \ldots . x_0'$ und x_1' einzuführen und das erhaltene simultane System so zu integrieren, dass für $t = 0$ wieder $x_0' = x_0$ und $x_1' = x_1$ werde.

Zur Ausführung dieser Integration bieten sich drei verschiedene Wege dar.

I. Zuerst nämlich kann man die Veränderlichen x_0' und x_1', da sie Funktionen von t sind, in Reihen entwickeln, die nach steigenden Potenzen von t geordnet sind. Nach dem Maclaurinschen Satze ist z. B.:

24)
$$x_0' = (x_0')_0 + t\left(\frac{dx_0'}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2x_0'}{dx^2}\right)_0 + \cdots$$

Für $t = 0$ aber ist:

$$x_0' = x_0, \quad \left(\frac{dx_0'}{dt}\right)_0 = (-x_1')_0 = -x_1,$$
$$\left(\frac{d^2x_0'}{dt^2}\right)_0 = -\left(\frac{dx_1'}{dt}\right)_0 = -(x_0')_0 = -x_0.$$

Auf gleiche Weise findet man:

$$\left(\frac{d^3x_0'}{dt^3}\right)_0 = x, \quad \left(\frac{d^4x_0'}{dt^4}\right)_0 = x_1 \quad \text{etc.},$$

also:

$$x_0' = x_0 - tx_1 - \frac{t^2}{2!}x_0 + \frac{t^3}{3!}x_1 + \frac{t^4}{4!}x_0 + \cdots$$
$$= x_0 \cos t - x_1 \sin t$$

und ebenso:

$$x_1' = x_1 + t \cdot x_0 - \frac{t^2}{2!}x_1 - \frac{t^3}{3!}x_0 + \frac{t^4}{4!}x_1 + \cdots$$
$$= x_0 \sin t + x_1 \cos t.$$

Mit Hilfe einer symbolischen Bezeichnung, die Herr Lie eingeführt hat, lassen sich aus den infinitesimalen Transformationen 22) die Koeffizienten in der Reihenentwickelung der endlichen Transformation 24) übersichtlich, wie folgt, darstellen. Da für eine beliebige Funktion von x_0, x_1, t die Gleichung gilt:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt},$$

so erhält man nach Einführung der Werte von $\frac{dx_0}{dt}$ und $\frac{dx_1}{dt}$ aus 23):

$$\frac{df}{dt} = x_0\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_0},$$

welcher Ausdruck mit $\varphi(t)$ bezeichnet werden soll. Dieses ist das Symbol der allgemeinen infinitesimalen Transformationen, aus denen sich die besonderen

$$\frac{dx_0}{dt} = -x_1 = \varphi x_0,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_0 = \varphi x_1$$

dadurch ergeben, dass man statt f der Reihe nach x_0 und x_1 setzt. Man erkennt leicht, dass dann:

$$\left(\frac{dx_0'}{dt}\right)_0 = \varphi x_0,$$

$$\left(\frac{d^2 x_0'}{dt^2}\right)_0 = \varphi(\varphi x_0) = \varphi^2 x_0,$$

$$\left(\frac{d^3 x_0'}{dt^3}\right)_0 = \varphi[\varphi(\varphi x_0)] = \varphi^3 x_0$$

u. s. f. ist. Man kann also statt der Reihe 24) auch schreiben:

25) $$x_0' = x_0 + t\varphi x_0 + \frac{t^2}{2!}\varphi^2 x_0 + \frac{t^3}{3!}\varphi^3 x_0 + \cdots$$

Auf dieselbe Weise wird auch die Reihe für x_1' gebildet.

II. Bei der zweiten Methode der Integration stellt man die Differentialgleichungen 23) in der Form:

26) $$\frac{dx_0'}{-x_1'} = \frac{dx_1'}{x_0'} = dt$$

auf und sucht zunächst aus

$$\frac{dx_0'}{-x_1'} = \frac{dx_1'}{x_0'}$$

ein von t freies Integral. Ein solches ist:

27) $$x_0'^2 x + x_1'^2 = c^2,$$

worin c eine Konstante bedeutet. Hieraus bestimmt man etwa:

$$x_1' = \sqrt{c^2 - x_0'^2}$$

und hat also

$$\frac{dx_0'}{-x_1'} = \frac{dx_0'}{-\sqrt{c^2 - x_0'^2}} = dt,$$

folglich:

28) $$\arcsin x_0' + t = c',$$

wobei c' eine zweite Konstante darstellt. Hieraus folgt:

$$29)\quad \left\{ \text{und wegen 27):}\quad \begin{aligned} x_0' &= c\sin(c'-t) \\ x_1' &= c\cos(c'-t). \end{aligned} \right.$$

Da für $t=0$ x_0' in x_0, x_1' in x_1 übergeht, so hat man:

$$30)\quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= c\sin c', \\ x_1 &= c\cos c', \end{aligned} \right.$$

folglich aus 29) und 30):

$$x_0' = x_0\cos t - x_1\sin t,$$
$$x_1' = x_0\sin t + x_1\cos t.$$

III. Da die Gleichungen 23) ein sogenanntes d'Alembertsches System bilden, so ergiebt sich die dritte Integrationsmethode wie folgt. Man setze zunächst:

$$31)\quad \lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' = u',$$

$$32)\quad \frac{du}{dt} = \varrho u',$$

worin λ_0, λ_1, ϱ noch näher zu bestimmende Konstante bedeuten. Integriert man die letzte Gleichung mit der Bedingung, dass für $t=0$

$$(u')_0 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1$$

wird, so kommt

$$33)\quad u' = (\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1)e^{\varrho t}.$$

Nun ist:

$$\frac{du'}{dt} = \lambda_0\frac{dx_0'}{dt} + \lambda_1\frac{dx_1'}{dt}$$
$$= -\lambda_0 x_1' + \lambda_1 x_0' = \varrho(\lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1'),$$

also:

$$x_0'(\lambda_1 - \varrho\lambda_0) - x_1'(\lambda_0 + \varrho\lambda_1) = 0.$$

Da x_0' und x_1' unabhängig von einander sind, so zerfällt diese Gleichung in die beiden anderen:

$$-\lambda_0\varrho + \lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_0 + \varrho\lambda_1 = 0,$$

welche nur neben einander bestehen können, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varrho & 1 \\ 1 & \varrho \end{vmatrix} = -(\varrho^2+1) = 0$$

ist. Darnach ist also:

$$34)\quad \left\{ \begin{aligned} \varrho &= \pm\sqrt{-1}, \\ \lambda_0 : \lambda_1 &= 1 : \varrho = -\varrho : 1. \end{aligned} \right.$$

Setzt man nun in die Gleichung 33), die man auch schreiben kann:

$$\lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' = (\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1)e^{\varrho t}$$

für x_0' und x_1' die Werte:

$$x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1,$$
$$x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1,$$

so ergiebt sich, da die Koeffizienten von x_0 und x_1 verschwinden müssen:

$$\lambda_0 a_{00} + \lambda_1 a_{10} = \lambda_0 e^{\varrho t},$$
$$\lambda_0 a_{01} + \lambda_1 a_{11} = \lambda_1 e^{\varrho t},$$

oder wenn man einen der Werte von $\lambda_0 : \lambda_1$ aus 34) einführt:

$$\varrho a_{00} - a_{10} = \varrho e^{\varrho t},$$
$$\varrho a_{01} - a_{11} = - e^{\varrho t}.$$

Da nun ϱ zwei Werte — nennen wir sie zunächst ϱ_1 und ϱ_2 — hat, so findet man zur Bestimmung von a_{00} und a_{10} die beiden Gleichungen:

$$35)\quad \begin{cases} \varrho_1 a_{00} - a_{10} = \varrho_1 e^{\varrho_1 t}, \\ \varrho_2 a_{01} - a_{10} = \varrho_2 e^{\varrho_2 t}, \end{cases}$$

und zur Bestimmung von a_{01} und a_{11}:

$$36)\quad \begin{cases} \varrho_1 a_{01} - a_{11} = - e^{\varrho_1 t}, \\ \varrho_2 a_{00} - a_{11} = - e^{\varrho_2 t}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die Koeffizienten a_{ik} wie folgt:

$$37)\quad \begin{cases} a_{00} = \quad a_{11} = \dfrac{\varrho_1 e^{\varrho_1 t} - \varrho_2 e^{\varrho_2 t}}{\varrho_1 - \varrho_2}, \\ a_{01} = - a_{10} = \dfrac{e^{\varrho_1 t} - e^{\varrho_2 t}}{\varrho_1 - \varrho_2}. \end{cases}$$

Setzt man schliesslich für ϱ_1 und ϱ_2 ihre Werte $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ ein, so kommt:

$$a_{00} = a_{11} = \cos t,$$
$$a_{01} = - a_{10} = - \sin t.$$

Um die endlichen Transformationen 8*) aus dem Gleichungssysteme:

$$\frac{dx_0'}{dt} = - x_1',$$
$$\frac{dx_1'}{dt} = x_0'$$

abzuleiten, hat man diese mit der Bedingung zu integrieren, dass für $t = 0$ $x_0' = x_0$, $x_1' = - x_1$ werde.

I. Nach der ersten Methode stellt man das Integral in der Form einer nach steigenden Potenzen von t geordneten Reihe auf [s. 19)]:

$$x_1' = x_0' + t\left(\frac{dx_0'}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2x_0'}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{3!}\left(\frac{d^3x_0'}{dt^3}\right)_0 + \cdots$$

Man erkennt leicht, dass, wenn man das Symbol:

$$\varphi f = \frac{df}{dt} = x_0' \frac{\partial f}{\partial x_1'} - x_1' \frac{\partial f}{\partial x_0'}$$

benützt, diese Reihe auch geschrieben werden kann:

$$x_0' = (x_0')_0 + t(\varphi x_0')_0 + \frac{t^2}{2!}(\varphi^2 x_0')_0 + \frac{t^3}{3!}(\varphi^3 x_0')_0 + \cdots$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\varphi x_0' &= -x_1' & &\ldots (\varphi x_0')_0 = x_1, \\
\varphi^2 x_0' &= -\varphi x_0' = -x_0' & &\ldots (\varphi^2 x_0')_0 = -x_0, \\
\varphi^3 x_0' &= -\varphi x_0' = x_1' & &\ldots (\varphi^3 x_0')_0 = -x_1, \\
\varphi^4 x_0' &= \varphi x_0' = x_0' & &\ldots (\varphi^4 x_0')_0 = x_0
\end{aligned}$$

u. s. f.

Ebenso:

$$\begin{aligned}
\varphi x_1' &= x_0' & &\ldots (\varphi x_1')_0 = x_0, \\
\varphi^2 x_0' &= \varphi x_0' = -x_1' & &\ldots (\varphi^2 x_1')_0 = x_1, \\
\varphi^3 x_0' &= -\varphi x_1' = -x_0' & &\ldots (\varphi^3 x_1')_0 = -x_0, \\
\varphi^4 x_0' &= -\varphi x_0' = x_1' & &\ldots (\varphi^4 x_1')_0 = -x_1
\end{aligned}$$

u. s. f.

Durch Einführung dieser Werte erhält man ohne weiteres die endlichen Transformationen von 8).

III*. Bei Anwendung der zweiten Methode erhalten wir zunächst wieder die Gleichungen 29):

$$\begin{aligned}
x_0' &= c \sin(c' - t) = c . \sin c' \cos t - c \cos c' \sin t, \\
x_1' &= c \cos(c' - t) = c \cos c' \cos t + c \sin c' \sin t
\end{aligned}$$

für $t = 0$, wobei $x_0' = x_0$, $x_1' = -x_1$ wird, also:

$$x_0 = c \sin c',$$

$$x_1 = -c \cos c'$$

und

$$x_0' = x_0 \cos t + x_1 \sin t,$$

$$x_1' = x_0 \sin t - x_1 \cos t.$$

IV*. Bei der dritten Methode hat man statt Gleichung 33):

$$u' = (\lambda_0 x_0 - \lambda_1 x_1) e^{\varrho t}$$

an Stelle der Gleichungen 36) zu setzen:

$$36^*) \quad \begin{cases} \varrho_1 a_{01} - a_{11} = e^{\varrho_1 t}, \\ \varrho_2 a_{01} - a_{11} = e^{\varrho_2 t}, \end{cases}$$

während die Gleichungen 35):

$$35) \quad \begin{cases} \varrho_1 a_{00} - a_{10} = \varrho_1 e^{\varrho_1 t}, \\ \varrho_2 a_{00} - a_{10} = \varrho_2 e^{\varrho_2 t} \end{cases}$$

unverändert bleiben.

Aus beiden ergiebt sich:

$$a_{11} = -a_{00} = -\frac{\varrho_1 e^{\varrho_1 t} - \varrho_2 e^{\varrho_2 t}}{\varrho_1 - \varrho_2} = -\cos t,$$

$$a_{01} = a_{10} = \frac{e^{\varrho_1 t} - e^{\varrho_2 t}}{\varrho_1 - \varrho_2} = \sin t.$$

Die automorphen Transformationen zweier Quadrate lassen sich, wie aus den Gleichungen 18) und 19) ersichtlich ist, zusammenfassen

in Gleichungen zwischen gewöhnlichen komplexen Grössen, nämlich 8) in die Gleichung:

$$8^*) \text{ in } \quad \begin{aligned}(x_0' + ix_1') &= (x_0 + ix_1)(\cos t + i \sin t),\\ (x_0' + ix_2') &= (x_0 - ix_1)(\cos t + i \sin t).\end{aligned}$$

Bezeichnet man allgemein die komplexe Grösse $y_1 + iy_1$ mit y, setzt $\cos t = a_0$, $\sin t = a_1$, so kann man die erste Gleichung auch abgekürzt schreiben:

$$x' = xa,$$

und wenn man $y_0 - iy_1 = \bar{y}$ setzt, die zweite Gleichung:

$$x' = \bar{x}a.$$

Die Gleichung

$$x' = xa$$

mit der wir allein uns beschäftigen wollen, lässt nun sofort erkennen,

1. dass die Transformationen 8) eine eingliedrige Gruppe bilden, da $a_0^2 + a_1^2 = 1$ ist;
2. dass die Transformationen der Gruppe mit einander vertauschbar sind.

Denn lässt man auf die Transformation $x' = xa$ eine zweite $x'' = x'b$ folgen, so ergiebt sich $x'' = (xa)b = x(ab)$, oder da ab wieder eine gewöhnliche komplexe Zahl ist, die mit c bezeichnet werden mag, $x' = xc$. Die Gleichung $c = ab$ heisst die Parametergleichung der Gruppe. Sie lehrt die Parameter c_0, c_1 und a_0, a_1 und b_0, b_1 finden und stellt wiederum eine Gruppe dar wie $x' = xa$. Man kann also sagen, die Gruppe $x' = xa$ ist ihre eigene Parametergruppe. Die Transformationen der Gruppe sind ferner miteinander vertauschbar. Denn lässt man auf $x' = x_0$ folgen $x'' = x'a$, so kommt $x'' = xba$, welches von $x'' = xab$ nicht verschieden ist, da $ba = ab$. Die Vertauschbarkeit der Transformationen fällt also genau zusammen mit der Vertauschbarkeit der Faktoren in dem Produkt zweier gewöhnlicher komplexer Zahlen. Die Transformation $x' = abx$, wobei die Faktoren in beliebiger Folge geschrieben werden können, stellt also ebenfalls eine automorphe Transformation zweier Quadrate dar, bei denen aber die Parameter in bilinearer Verbindung auftreten. Denn die Entwickelung giebt:

$$\begin{aligned}x_0' &= (a_0b_0 - a_1b_1)x_0 - (a_0b_1 + a_1b_0)x_1,\\ x_1' &= (a_0b_1 + a_1b_0)x_0 + (a_0b_0 - a_1b_1)x_1,\end{aligned}$$

Setzt man hierin $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 = b_{12}$, so erhält man die Cayleysche Transformation:

$$\begin{aligned}x_0' &= (b_0^2 - b_{12}^2)x_0 - 2b_0b_{12}x_1,\\ x_1' &= 2b_0b_{12}x_0 \qquad + (b_{02} - b_{12}^2)x_1.\end{aligned}$$

(Fortsetzung folgt.)

Hilfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln.

Von

R. Mehmke

in Stuttgart.

Die algebraische Auflösung einer numerischen Gleichung zweiten Grades nach der bekannten elementaren Formel empfiehlt sich nicht, ausser wenn die Koeffizienten ganz einfache Zahlen sind und zugleich eine Quadrattafel benützt wird. Sind, wie es häufig der Fall ist, die Logarithmen der Koeffizienten gegeben und von den Wurzeln der Gleichung ebenfalls die Logarithmen verlangt, so wäre bei Anwendung jener Formel ein viermaliges Aufschlagen der Logarithmentafel nötig. Zweimaliges Aufschlagen genügt bei Mollweides bekannter Auflösung mit Hilfe goniometrischer Funktionen. Um mit einmaligem Aufschlagen auszukommen, hat Gauss eine besondere Hilfstafel berechnen lassen, die man in Vega-Hülsses Sammlung mathematischer Tafeln in der Ausgabe von 1840, Tafel XII, S. 636—678 findet. Sie besteht in drei mit D, E, F überschriebenen Zusatzkolonnen zu der, ebenfalls aus drei Kolonnen mit den Überschriften A, B, C zusammengesetzten Gaussischen Tafel der Leonellischen oder sogenannten Additionslogarithmen. Diese Gaussische Tafel ist meines Wissens nicht wieder abgedruckt worden. Ich glaube nicht, dass man daraus schliessen darf, sie hätte keinem wirklichen Bedürfnis entsprochen, denn quadratische Gleichungen kommen in der angewandten Mathematik häufig genug vor. Es leidet aber jene Tafel an einigen Mängeln. Infolge der Verquickung mit den Additionslogarithmen und weil mehr Fälle unterschieden werden als nötig ist, hat sie zu viele Kolonnen; auch sind die Rechenvorschriften für die einzelnen Fälle einander sehr unähnlich und das Aufschlagen ist unbequem. Ich habe vor einer Reihe von Jahren eine Hilfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln konstruiert, die mir vor der Gaussischen folgende Vorzüge zu haben scheint:

1. Man hat, wenn man sie benützt, bloss zwei Fälle zu unterscheiden, statt, wie bei Gauss, deren drei.

2. Die Formeln und das Rechenschema sind in beiden Fällen dieselben.
3. Der Gebrauch der Tafel ist bequem, weil man direkt in sie eingeht.

Die Tafel besteht aus zwei, den genannten beiden Fällen entsprechenden Teilen von derselben Einrichtung wie die Logarithmentafeln. Auch nach dem, letztes Jahr erfolgten Erscheinen der „Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen“ von Gundelfinger, einer modifizierten Erweiterung der erwähnten Gaussischen Tafel, ist, wie ich glaube, die Veröffentlichung meiner Tafel nicht überflüssig. Ich gebe dieselbe hier mit drei Stellen, um zunächst ihre Einrichtung zu zeigen und weil diese geringe Zahl von Stellen bei manchen Anwendungen schon ausreicht. Auch wenn man vier oder fünf Stellen ansetzte, wäre die Tafel noch auf einem verhältnismässig kleinen Raum unterzubringen.

Die Unterschiede zwischen dieser Tafel und der Gaussischen wie auch den genannten und den älteren Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen (Lambert, Barlow, Kulik, Guldberg) beabsichtige ich später zu besprechen und bei dieser Gelegenheit neue Entwürfe, auch von Tafeln zur Auflösung quaternomischer Gleichungen, vorzulegen.

Ableitung der Formeln.

Die aufzulösende Gleichung habe die Gestalt:

1) $$a x^2 \pm b x - c = 0, \quad \text{oder aber} \quad a x^2 \pm b x + c = 0,$$

wo a, b und c positiv sein sollen. Es werden also die beiden Fälle „Absolutglied negativ“ und „Absolutglied positiv“ unterschieden. Setzt man

2) $$x = \pm \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{y} \quad \text{bezw.} \quad x = \mp \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{y},$$

so geht die Gleichung durch Multiplikation mit $y^2 : c$ über in

3) $$y^2 - y - \frac{ac}{b^2} = 0, \quad \text{bezw.} \quad y - y^2 - \frac{ac}{b^2} = 0.$$

Wir wollen

4) $$\log y = v$$

als Funktion von

5) $$u = \log(y^2 - y) \quad \text{bezw.} \quad u = \log(y - y^2)$$

betrachten. Dass dies möglich ist, wird unten noch gezeigt werden. Diese beiden Funktionen sind in den beiden Teilen der Hilfstafel dargestellt. Zufolge Gleichung 3) muss

6) $$u = \log \frac{ac}{b^2}$$

genommen werden, damit der zugehörige, aus dem ersten bezw. zweiten Teile der Tafel zu bestimmende Wert von $v = \log y$, in 2) eingesetzt,

eine Wurzel der gegebenen Gleichung liefert. Bezeichnet man diese Wurzel mit x_1, so ergiebt sich

7) $\log(\pm x_1) = \log\frac{c}{b} - v$ bezw. $\log(\mp x_1) = \log\frac{c}{b} - v.$

Die andere Wurzel, x_2, erhält man mit Hilfe der Beziehung

$$x_1 x_2 = -\frac{c}{a} \quad \text{bezw.} \quad x_1 x_1 = \frac{c}{a},$$

nämlich

8) $$\log(\mp x_2) = v + \log\frac{b}{a}.$$

Es wird übrigens, wenn man zur Abkürzung:

9) $$\frac{c}{b} = d, \quad \frac{b}{a} = e$$

setzt,

10) $$\frac{ac}{b^2} = \frac{d}{e}.$$

Die

Rechenvorschriften

lassen sich nun zusammenfassen wie folgt.

Berechne

$$\log d = \log c - \log b,$$
$$\log e = \log b - \log a,$$

und

$$u = \log d - \log e,$$

suche zu diesem Werte von u den Wert von v im ersten oder zweiten Teile der Hilfstafel, je nachdem das Absolutglied der gegebenen Gleichung negativ oder positiv ist, dann wird

$$\log(\pm x_1) = \log d - v, \quad \text{bezw.} \quad \log(\mp x_1) = \log d - v,$$
$$\log(\mp x_2) = v + \log e.$$

Es gilt bei x_1 und x_2 das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, je nachdem in der gegebenen Gleichung beim zweiten Gliede das + oder − Zeichen vorhanden ist.

Bei der Ausrechnung mag man sich der folgenden Anordnung bedienen. Zur Verdeutlichung des Ganges der Rechnung sind die Reihen, nach der Ordnung ihres Auftretens, durch römische Ziffern bezeichnet und die mit ihnen vorzunehmenden Operationen rechterhand angegeben worden.

$\log c$	I
$\log b$	II
$\log c$	III
$\log d$	IV = I − II
v	VII
$\log e$	V = II − III
u	VI = IV − V
$\log(\pm x_1)$ bezw. $\log(\mp x_1)$	VIII = IV − VII
$\log(\mp x_2)$	IX = VII + V.

Hilfstafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln.

1. Absolutglied negativ (v wächst mit u).

u	v 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
7·	0·000	001	001	001	001	001	002	002	003	003	1
8·	004	005	007	008	011	013	016	020	025	031	7
9·	038	047	057	068	082	098	116	136	158	182	27
0·	209	238	268	301	335	371	408	446	486	527	41
1·	568	611	654	699	743	789	834	881	927	974	48
2·	1·022	069	117	165	214	262	311	360	409	458	49
3·	507	556	605	655	704	754	803	853	903	952	50
4·	2·002	052	102	152	201	251	301	351	401	451	

2. Absolutglied positiv (v nimmt ab, wenn u wächst).

u	v 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
7·	9·	999	999	999	999	999	998	998	997	997	1
8·	996	994	993	991	989	986	982	976	970	960	12
9·0	948	947	945	943	942	940	938	937	935	933	2
9·1	931	928	926	924	921	919	916	914	911	908	4
9·2	904	901	898	894	890	886	881	877	871	866	6
9·3	860	854	847	839	830	821	809	796	779	754	
9·39	754	750	747	743	738	733	727	719	699		

Beispiele.

1. Fall, Absolutglied negativ.

$$10^{0\cdot 291}\cdot x^2 - 10^{0\cdot 691}\cdot x - 10^{0\cdot 555} = 0.$$

$\log c$	0·555
$\log b$	0·691
$\log a$	0·219
$\log d$	9·864 − 10
v	0·081
$\log e$	0·472
u	9·392 − 10
$\log(-x_1)$	9·783 − 10
$\log\ x_2$	0·553.

2. Fall, Absolutglied positiv.

$$10^{1\cdot 203}\cdot x^2 - 10^{1\cdot 536}\cdot x + 10^{0\cdot 929} = 0.$$

$\log c$	0·929
$\log b$	1·536
$\log a$	1·203
$\log d$	9·393 − 10
v	9·938 − 10
$\log e$	0·333
u	9·060 − 10
$\log x_1$	9·455 − 10
$\log x_2$	0·271.

Zur weiteren **Erläuterung der Tafel** diene folgendes. Wie die logarithmische Darstellung* der Funktion $z = y^2 - y$ in Fig. 1 erkennen lässt, ist $v = \log y$ eine einwertige Funktion von $u = \log(y^2 - y)$, die mit abnehmendem u der Null, mit wachsendem u dem Werte $\frac{1}{2}u$ sich unbegrenzt nähert, entsprechend dem Umstand, dass die zugehörige Kurve die negative u-Axe und die (gestrichelt gezeichnete) Gerade zur Gleichung $v = \frac{1}{2}u$ zu Asymptoten hat. Der erste Teil der Tafel liefert zu jedem Wert von u zwischen $7 \cdot 000 - 10$ und $5 \cdot 000$ den zugehörigen Wert der in Rede stehenden Funktion v mit drei Dezimalen. Für $u \geqq 7 \cdot 000 - 10$ ist bis auf drei Dezimalen

Fig. 1.

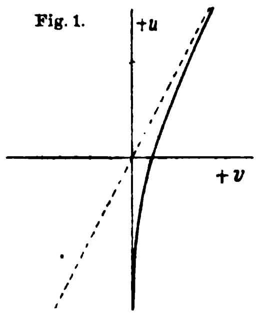
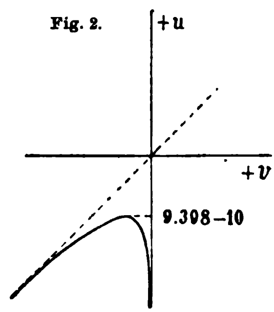


Fig. 2.



richtig $v = 0 \cdot 000$, für $u > 5 \cdot 000$ ebenfalls bis auf drei Dezimalen richtig $v = \frac{1}{2}u$.

Das logarithmische Bild der Funktion $z = y - y^2$ in Fig. 2 zeigt, dass $v = \log y$ eine zweiwertige Funktion von $u = \log(y - y^2)$ ist, vorausgesetzt, dass u unter dem grössten Werte von $\log(y - y^2)$, nämlich

$$\log \frac{1}{4} = 9 \cdot 3979400 - 10$$

liegt. Mit Rücksicht auf die Genauigkeit und bequeme Interpolation ist im zweiten Teile der Tafel derjenige Funktionszweig dargestellt worden, der die kleineren Tafeldifferenzen giebt. Er entspricht dem Teil der Kurve rechts von ihrem höchsten Punkt, der in der That von den Parallelen zur v-Axe unter günstigeren Winkeln geschnitten wird, als der Teil links vom höchsten Punkt. Allerdings hat diese Wahl den Nachteil, dass man eine mit wachsendem Argument abnehmende Funktion erhält. Es hätte ebenso gut der andere Funktionszweig tabuliert werden können, bei dem v mit u wächst, aber es wären dann die Tafeldifferenzen beträchtlich grösser geworden.

Ergiebt sich $u > 9 \cdot 3979400 - 10$, d. h. bei dreistelliger Rechnung $u > 9 \cdot 398 - 10$, so sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung imaginär.

* Über die logarithmischen Bilder von Funktionen einer Veränderlichen und ihre Konstruktion vergl. meine Abhandlung „Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen", Civilingenieur Bd. 35, S. 617, 1889.

Harmonische Analyse mittelst des Polarplanimeters.

Von

S. Finsterwalder
in München.

Wer häufig in die Lage kommt, graphisch gegebene Funktionen harmonisch zu analysieren, oder mit anderen Worten, in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln, wird sich wohl eines der zu diesem Zwecke konstruierten Integrierapparate (harmonische Analysatoren) bedienen, wie solche heutzutage in sehr vollkommener Form von Coradi nach den Grundsätzen von Sharp und Henrici* hergestellt werden. Für den aber, der nur gelegentlich solche Entwickelungen vorzunehmen hat, verlohnt sich die Anschaffung eines solchen komplizierten Instrumentes nicht, und für ihn mag es von Wert sein zu wissen, dass man auch mittelst eines gewöhnlichen Polarplanimeters eine mechanische Bestimmung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe vornehmen kann, wenn schon dieselbe die Zeichnung von eben so viel Kurven voraussetzt, als Koeffizienten zu bestimmen sind. Letzterer Umstand dürfte von der Verfolgung des an sich so naheliegenden Gedankens, das in allen Händen befindliche Integrierinstrument auch für diesen Zweck auszunützen, abgeschreckt haben.** Dabei übersah man aber, wie einfach jene Kurven zu zeichnen sind, und dass bei gehöriger Anordnung das Zeichnen derselben kaum mehr Mühe erfordert wie das Umfahren mit dem Planimeter. Da zudem der Grad der bei der graphischen Integration erreichbaren Genauigkeit ein sehr hoher ist, und wohl für die praktischen Bedürfnisse ausreichen wird, so empfiehlt sich das Verfahren für alle jene, welche graphische Prozesse den rechnerischen vorzuziehen pflegen, also vor allem für die Techniker. Freilich werden Solche, bei denen das Umgekehrte der Fall ist (Astronomen, Geodäten und Meteorologen), viel lieber zu einer rechnerischen Auswertung der bestimmten Integrale schreiten, welche für viele Fälle

* Vergl. hierzu: W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Apparate, München 1892, namentlich den darin (S. 125) enthaltenen Aufsatz: Über Instrumente zur Harmonischen Analyse von O. Henrici. Die nunmehr von Coradi adoptierte Form des Analysators ist darin noch nicht erwähnt. Dieselbe ist ein Meisterstück in Anordnung und Ausführung.

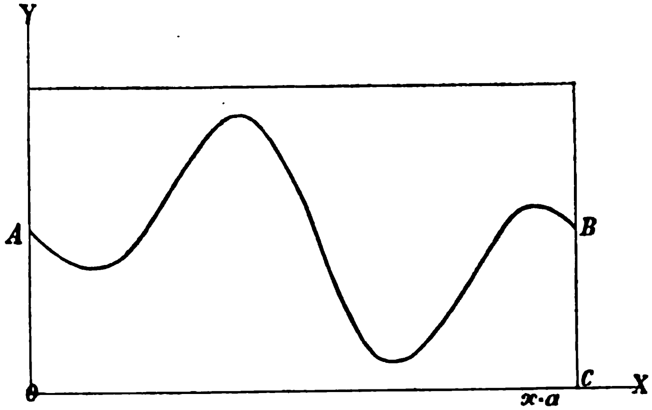
** Vergl. dagegen die Anmerkung am Schlusse.

der Praxis durch tabellarische Behelfe recht handlich gestaltet werden kann.

Es sei die zu analysierende Kurve $y = f(x)$ in dem Intervalle von $x = 0$ bis $x = a$ zeichnerisch gegeben. Unter bestimmten, allerdings sehr weiten Voraussetzungen, von welchen hier nur die Eindeutigkeit, Endlichkeit und abteilungsweise Stetigkeit der Funktion $f(x)$ und ihrer ersten Ableitung genannt werden mögen, lässt sich für $f(x)$ die im gegebenen Bereich konvergente Reihe ansetzen:

$$\begin{cases} y = A_0 + A_1 \cos\frac{2x\pi}{a} + A_2 \cos 2\frac{2x\pi}{a} + A_3 \cos 3\frac{2x\pi}{a} + \cdots + A_n \cos n\frac{2x\pi}{a} + \cdots \\ \qquad + B_1 \sin\frac{2x\pi}{a} + B_2 \sin 2\frac{2x\pi}{a} + B_3 \sin 3\frac{2x\pi}{a} + \cdots + B_n \sin n\frac{2x\pi}{a} + \cdots \end{cases}$$

Fig. 1.



Hierbei ist:

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a y\,dx;$$

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a y\cos\left(n\frac{2x\pi}{a}\right)dx; \qquad B_n = \frac{2}{a}\int_0^a y\sin\left(n\frac{2x\pi}{a}\right)dx.$$

Je zwei unter einander stehende Glieder der Reihe können in eines vereinigt werden; so ist:

$$A_n \cos n\frac{2x\pi}{a} + B_n \sin n\frac{2x\pi}{a} = \mathsf{A}_n \cos\left(n\frac{2x\pi}{a} - \alpha_n\right),$$

wobei:

$$\mathsf{A}_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

und:

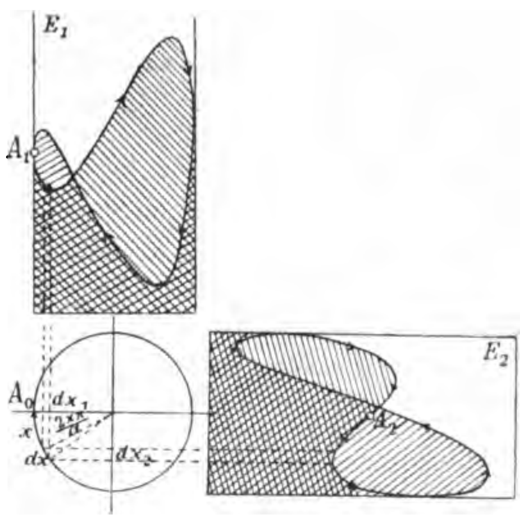
$$\cos\alpha_n = \frac{A_n}{\mathsf{A}_n}; \quad \sin\alpha_n = \frac{B_n}{\mathsf{A}_n}; \quad \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{B_n}{A_n}$$

ist. Nach diesen Vorbemerkungen über ganz bekannte Dinge soll zur graphischen Ermittelung der Koeffizienten übergegangen werden. Das konstante Glied A_0 stellt den Mittelwert der Funktion $f(x)$ im Intervall

$0 < x < a$ dar und lässt sich in der Weise bestimmen, dass man die Fläche $OABC$ mit dem Planimeter ausmisst und durch die Länge des Intervalles a dividiert.

Um die Koeffizienten A_1 und B_1 zu erhalten, denke ich mir die Zeichenebene samt der darauf befindlichen Kurve $y = f(x)$ auf einen Kreiscylinder vom Umfang a so aufgewicknet, dass die X-Axe auf die Basis des Cylinders zu liegen kommt. Wenn die beiden Ordinaten am Beginn und am Schluss des Intervalles übereinstimmen, bildet die Kurve auf dem Cylinder einen geschlossenen Linienzug. Wäre dies nicht der Fall, so müsste man zur Schliessung des Zuges ein Stück Mantellinie hinzunehmen. Es würde dann der Linienzug an der Schliessungsstelle eine ähnliche Stetigkeitsunterbrechung aufweisen, wie solche in endlicher Anzahl auch in den übrigen Teilen der Kurve vorkommen könnten. Ich projiziere nun diesen Linienzug auf zwei zu einander rechtwinklige Ebenen $E_1 E_2$ durch die Axe des Cylinders. Die eine Ebene E_1 geht durch diejenige Mantellinie des Cylinders, auf welche die Anfangs- bezw. Endordinate aufgetragen wurde. Die andere E_2 steht senkrecht zur eben definierten Ebene. Die beiden Projektionen bilden wieder geschlossene Linienzüge, und der von ihnen umgrenzte Flächeninhalt giebt nach Division mit dem halben Cylinderumfang die gesuchten Koeffizienten. Um dies zu beweisen, beachten wir, dass die Projektionen dx_1 bezw. dx_2 des Elementes dx der auf dem Cylinderumfang aufgewickelten X-Axe auf die Ebene E_1:

Fig. 2.



$$dx_1 = dx \cdot \sin \frac{2x\pi}{a},$$

auf die Ebene E_2:

$$dx_2 = dx \cdot \cos \frac{2x\pi}{a}$$

projiziert werden. Das von der Projektion der Kurve umschlossene Flächen-

---

Anmerkung. In der Figur sind die positiv gezählten Flächen von links nach rechts, die negativ gezählten von rechts nach links schraffiert; die Pfeilspitzen an den Kurven geben den Umfahrungssinn für das Planimeter unter der Voraussetzung an, dass der Sinn entgegengesetzt dem Uhrzeiger positive Planimeterablesungen giebt.

stück lässt sich durch Summation der Elemente $y dx_1$ bezw. $y dx_2$ finden, wobei zu beachten ist, dass jene Elemente, welche der Rückseite des Cylinders entsprechen, negativ zu nehmen sind, wie es der Rückläufigkeit der zugehörigen Elemente dx_1 bezw. dx_2 entspricht. Die Elemente $y dx_1$ bezw. $y dx_2$ sind aber keine anderen als jene, welche in den Integralen der Koeffizienten A_1 und B_1 nämlich:

$$\int_0^a y\,dx \cos\frac{2x\pi}{a} \quad \text{und} \quad \int_0^a y\,dx \sin\frac{2x\pi}{a}$$

vorkommen. Man übersieht unmittelbar, dass in diese Integrale die einzelnen Elemente auch genau mit demselben Vorzeichen eingehen, wie bei der Zusammensetzung des Flächeninhaltes der Projektion des Linienzuges.

Die Ermittelung der folgenden Reihenkoeffizienten lässt sich auf ganz ähnliche Art bewirken. Um zum Beispiel A_2 und B_2 zu erhalten, denke ich mir die Zeichenebene samt der Kurve $y = f(x)$ auf einen Cylinder vom Umfang $\frac{a}{2}$ derart aufgewickelt, dass die X-Axe den Umfang der Basis zweimal umschliesst. Aus dem Flächeninhalt der Projektionen dieses neuen Linienzuges auf dieselben zwei zu einander senkrechten Ebenen können die Koeffizienten A_2 und B_2 wiederum durch Division mit $\frac{a}{2}$ gefunden werden. Ganz ähnlich verfährt man bei Aufsuchung der folgenden Koeffizienten. Um beispielsweise A_n und B_n zu finden, hätte man die Kurve $y = f(x)$ auf einen Cylinder vom Umfang $\frac{a}{n}$ derart aufzutragen, dass die X-Axe die Basis n-mal umschlingt. Der Beweis lässt sich durch einfache Wiederholung der Schlüsse führen, die bei der Ableitung der analogen Prozedur für die Bestimmung der Koeffizienten A_1 und B_1 angewendet wurden. Der Unterschied besteht nur darin, dass jetzt zum Bogen x auf dem Basiskreis ein Centriwinkel $n\frac{2x\pi}{a}$ gehört.

Die Verzeichnung der Kurven, deren Flächeninhalte die Reihenkoeffizienten liefern, wäre nach dem angegebenen Verfahren keineswegs besonders umständlich. Sie lässt sich aber noch ganz erheblich vereinfachen, wenn man folgende Umstände beachtet:

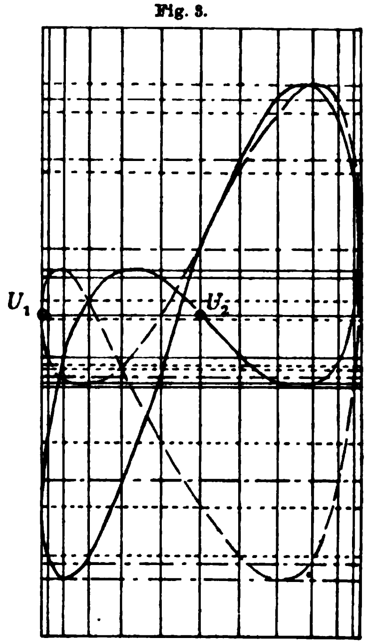
Statt die Kurve $y = f(x)$ auf den Cylinder vom Umfang $\frac{a}{n}$ aufzutragen, kann man dieselbe vorher in der Richtung der Y-Axe auf das n-fache dehnen und diese Kurve mit den gedehnten Abscissen [und unveränderten Ordinaten] auf den Cylinder vom Umfange a auftragen. Die neue gedehnte X-Axe wird diesen Cylinder ebenfalls n-mal umschliessen. Der Flächeninhalt der Projektionen dieser Kurven auf die beiden Ebenen wird dann nur n-mal so gross als beim kleinen Cylinder. Um die Koeffizienten A_n und B_n zu erhalten, hat man dann

die Flächeninhalte nicht mit dem halben Cylinderumfange, sondern mit dem $\frac{n}{2}$-fachen des Cylinderumfanges zu dividieren. Auf diese Weise lassen sich alle Kurven, deren Projektionen die Reihenkoeffizienten geben, auf einen Cylinder auftragen.

Zur wirklichen Verzeichnung der Projektionen schlägt man dann am besten folgendes Verfahren ein:

Man teilt den Cylinderumfang in eine solche Anzahl von gleichen Teilen, dass die Ordnungszahlen der Reihenkoeffizienten als Faktoren in dieser Anzahl enthalten sind, z. B. in 60 Teile, wenn man sich auf die ersten sechs cos- und sin-Glieder beschränkt, oder in 24, wenn man nur bis zu den vierten Gliedern gehen will. Dann zieht man in der Projektion die Erzeugenden des Cylinders, die zu diesen Teilpunkten gehören. Diese geben ein erstes System von Parallel-Linien. Ein zweites zu diesem senkrechtes Parallel-Liniensystem wird nun dadurch erhalten, dass man die Ordinaten der Kurve, die zu diesen Teilpunkten gehören, in vertikaler Richtung aufträgt und horizontale Linien durch die Teilpunkte zieht. Man hat dabei die Vorsicht zu gebrauchen, dass man die Parallel-Linien — etwa durch verschiedene Farben — auseinander hält, welche den einzelnen aufsteigenden und absteigenden Ästen der Kurve entsprechen. Zu dem so gefundenen Parallel-Liniennetz sind nun die Kurven, deren Flächeninhalte die Koeffizienten A_1 und B_1 geben, einfache Diagonalkurven; und zwar ist die Kurve, welche A_1 giebt, jene Diagonalkurve, die beim Punkte U_2 in der Mitte der Projektion des Cylinderumfanges beginnt, während die zum Koeffizienten B_1 gehörige ihren Anfang bei U_1 am Rande der Projektion des Cylinders nimmt. Die Kurven für die höheren Koeffizienten lassen sich in ähnlicher Weise als Diagonalkurven des Netzes finden. Man hat nur, um A_2 und B_2 zu finden, von den Teilpunkten des Cylinderumfanges und den zugehörigen Erzeugenden die ungeraden zu unterdrücken, und die geraden beizubehalten. Bei den Koeffizienten A_3 und B_3 werden alle Teilpunkte unterdrückt, die nicht durch 3 teilbar sind, bei den Koeffizienten A_4 und B_4 jene, die nicht durch 4 teilbar sind und so fort. Man sieht also, dass nach Verzeichnung des Parallel-Liniennetzes die Konstruktion der gewünschten Kurven nur mehr auf die Verbindung der gehörig gewählten Netzpunkte

Fig. 3.



hinauskommt. Um die Reihenkoeffizienten zu bestimmen, hat man die so gezeichneten Kurven mit dem Planimeter zu umfahren und die ermittelten Flächeninhalte durch den halben Umfang $\frac{a}{2}$ und die Ordnungszahl des Koeffizienten zu dividieren.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, dass mit Hilfe unserer Methode auch die Möglichkeit gegeben ist, die Grössen A_n und α_n [Amplitude und Phasenverschiebung] direkt zu bestimmen. Die verschiedenen Diagonalkurven ein und desselben Parallel-Liniennetzes, die nicht gerade von den Punkten U_1 oder U_2 ausgehen, stellen nämlich, wie leicht ersichtlich, die Projektionen der Cylinderkurve auf Ebenen dar, welche gegen die ursprüngliche Projektionsebene E_1 unter verschiedenen Winkeln β geneigt sind. Der Flächeninhalt einer solchen Projektion ist dann durch $\int y\,dx_3$ gegeben, wo

$$dx_3 = dx \cdot \sin\left(\frac{2x\pi}{a} \cdot n - \beta\right)$$

wird. Dieser Flächeninhalt F_3 lässt sich nach Entwickelung des Sinus unter dem Integralzeichen auch in der Form schreiben:

$$\cos\beta \cdot B_n - \sin\beta \cdot A_n.$$

Wählen wir den Winkel β so, dass der Flächeninhalt der Projektion gerade $= 0$ wird, d. h. dass die positiven und negativen Teile des Flächeninhaltes sich aufheben, so kann

$$\sin\beta = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}; \quad \cos\beta = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$$

gesetzt werden. Der Winkel β stimmt dann mit dem Phasenwinkel α_n überein.

Betrachten wir die Projektion auf eine Ebene, welche den Winkel $\alpha = \alpha_n - 90^0$ mit der Ausgangsebene einschliesst, so wird der Flächeninhalt derselben:

$$\cos\alpha\, B_n - \sin\alpha \cdot A_n = \sin\alpha_n \cdot B_n + \cos\alpha_n \cdot A_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = A_n.$$

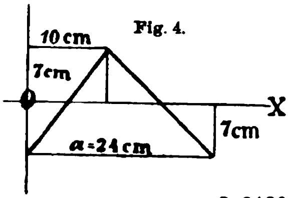
Es ist dies offenbar der absolut grösste Wert, welchen der Flächeninhalt der Projektion der Cylinderkurve auf irgend eine Ebene annehmen kann. Dieser Flächeninhalt dividiert durch den $\frac{n}{2}$-fachen Umfang des Cylinders giebt die Amplitude A_n, der Winkel α, den die zugehörige Projektionsebene mit der ursprünglichen einschliesst, giebt die Phasenverschiebung $\alpha_n = 90^0 + \alpha$.

Bei der wirklichen Ausführung müsste man so vorgehen, dass man zunächst jene beiden Diagonalkurven aussucht, welche am nächsten den Flächeninhalt 0 geben. Die eine, zum Winkel β_1 gehörige, giebt einen positiven, die andere zu β_2 'gehörige einen negativen Inhalt. Zwischen β_1 und β_2 interpoliert man den Winkel $\beta = \alpha_n$ nach Maßgabe der Flächeninhalte. Man sucht dann die Projektion auf die Ebene, die den Winkel $\beta - 90^0$ einschliesst und erhält aus ihr A_n. Das direkte Aufsuchen der Diagonalkurve mit grösstem Inhalt würde für den Phasenwinkel eine ganz unzureichende Bestimmung geben, da sich in

der Nähe des Maximums der Inhalt mit dem Phasenwinkel kaum mehr ändert.

Um die Genauigkeit der harmonischen Analyse mittelst des Planimeters praktisch zu erproben, habe ich einen aus zwei Geraden bestehenden Linienzug von beistehender Form in eine Fouriersche Reihe entwickelt und folgende Formel erhalten:

Fig. 4.



$$\begin{aligned} y = &- 5{,}4450 \cos 15^0 x - 1{,}4590 \sin 15^0 x \\ &- 0{,}3647 \cos 30^0 x + 0{,}6318 \sin 30^0 x \\ &- 0{,}3242 \cos 45^0 x - 0{,}3242 \sin 45^0 x \\ &- 0{,}2736 \cos 60^0 x + 0{,}1579 \sin 60^0 x \\ &- 0{,}0156 \cos 75^0 x - 0{,}0584 \sin 75^0 x \\ &- 0{,}1621 \cos 90^0 x + 0{,}0000 \sin 90^0 x + \cdots \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &+ \frac{2 \cdot 9180}{n^2} [\cos(n \cdot 210^0) - 1] \cos(n \cdot 15^0 \cdot x) + \cdots \\ &+ \frac{2 \cdot 9180}{n^2} \sin(n \cdot 210^0) \cdot \sin(n \cdot 15^0 \cdot x) + \cdots \end{aligned} \right.$$

Die graphische Ermittelung der Koeffizienten nahm ich in doppelter Weise vor. Zunächst an einem Cylinder von 24 cm Umfang, wobei sich für die ersten vier Paare von Gliedern nachstehende Werte ergaben:

$$\begin{aligned} y = &- 5{,}422 \cos 15^0 x - 1{,}483 \sin 15^0 x \\ &- 0{,}355 \cos 30^0 x + 0{,}615 \sin 30^0 x \\ &- 0{,}330 \cos 45^0 x - 0{,}328 \sin 45^0 x \\ &- 0{,}270 \cos 60^0 x + 9{,}155 \sin 60^0 x. \end{aligned}$$

Rechnet man für 24 gleich verteilte Ordinaten die Summe der ersten vier Paare der Reihenglieder nach der genauen Formel und vergleicht man sie mit den Werten, welche aus der graphisch ermittelten Formel folgen, so ergiebt sich ein mittlerer Fehler (Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat) von 0,028 cm, oder $\frac{1}{500}$ der grössten Ordinatendifferenz. Die so erreichte Genauigkeit erscheint um so befriedigender, als die ersten vier Paare von Gliedern die analysierte gebrochene Linie überhaupt nur mit einem mittleren Fehler von 0,182 cm darstellen können, neben welchem der Unterschied der rechnerischen und der graphischen Entwickelung beinahe verschwindet. Um aber zu sehen, wie weit sich die Genauigkeit der Methode steigern lässt, habe ich den gleichen Linienzug nur mit doppelt vergrösserten Ordinaten und mit einem auf 60 cm ausgedehnten Abscissenintervall nochmals analysiert und dabei die lithographisch reproduzierte Vorzeichnung der Projektion der 60 Erzeugenden eines Cylinders von 60 cm Umfang benützt.*

* Bei Benützung einer solchen lithographischen Unterlage darf man natürlich nicht ausser Acht lassen, den Papiereingang durch Umfahrung einer geeigneten Probefläche von bekanntem Inhalt, etwa des lithographierten rechteckigen Umrisses des Cylinders zu bestimmen und in Rechnung zu ziehen. Die bei den beschriebenen Versuchen notwendigen Flächenmessungen und Rechnungen hat mein Assistent Herr R. Lutz in dankenswerter Weise ausgeführt.

Es ergaben sich nun folgende Werte für die ersten sechs Paare von Gliedern:

$$\begin{aligned} y = &- 5{,}436 \cos(15^0 x) - 1{,}460 \sin(15^0 x) \\ &- 0{,}369 \cos(30^0 x) + 0{,}628 \sin(30^0 x) \\ &- 0{,}325 \cos(45^0 x) - 0{,}325 \sin(45^0 x) \\ &- 0{,}271 \cos(60^0 x) + 0{,}156 \sin(60^0 x) \\ &- 0{,}015 \cos(75^0 x) - 0{,}059 \sin(75^0 x) \\ &- 0{,}158 \cos(90^0 x) - 0{,}002 \sin(90^0 x). \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung mit den gerechneten Werten ist nun noch viel besser geworden, nur der erste Koeffizient weicht noch um 0,009 cm ab, sonst kommen keine grösseren Differenzen als 0,004 cm mehr vor. Freilich beansprucht die Aufsuchung der zwölf Koeffizienten auch die Tagesleistung eines gewandten Zeichners.

Die auseinandergesetzte Methode ist durch einen Konstruktionsversuch zur Herstellung eines Harmonischen Analysators, den O. Henrici an der früher citierten Stelle S. 129 unter dem Spezialtitel: „Neues Instrument" beschreibt, ziemlich vorgebildet und mit Rücksicht auf den rein mathematischen Inhalt hätte die Veröffentlichung derselben leicht unterlassen werden können. Ich habe mich indessen auf den Standpunkt gestellt, dass den Technikern eine ihnen gelegene Methode nicht vorenthalten werden soll.

Anmerkung: Während des Satzes vorstehender Zeilen wurde ich vom Herausgeber der Zeitschrift auf eine Arbeit von Perry und Hunt: „The Development of Arbitrary Funktions", Phil. Magazine Vol. XL 5 Ser. July-December 1895, S. 506—511, aufmerksam gemacht, welche den Hinweis auf eine Note des erstgenannten Verfassers in: „The Electrician" vom 28. Juni 1895 enthält. Nach Letzterer geht die Grundidee des auseinandergesetzten Verfahrens auf keinen Geringern als Clifford zurück, von dessen Schülern am Finsbury Technical College dasselbe praktisch ausgearbeitet und erprobt wurde. Die Herren Perry und Hunt haben das Verfahren in der erstgenannten Arbeit auf die Auswertung von Integralen von der Form:

$$\int_0^a y \cdot Q(x)\, dx,$$

worin $Q(x)$ eine bekannte, y eine graphisch gegebene Funktion von x ist, ausgedehnt. Der Wunsch, die Methode weiteren Kreisen zugänglich zu machen, mag es rechtfertigen, dass ich unter den auseinandergesetzten Verhältnissen die Publikation meiner Mitteilung nicht zurückgezogen habe.

Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation.

Von

PAUL GERBER
in Stargard in Pommern.

1. Das Grundgesetz.

Die Gravitationserscheinungen zeigen die einzigen an getrennten Körpern bestehenden Wirkungen, für die man noch keinen Anteil des zwischenliegenden Raumes, d. h. kein Vorhandensein sich von Ort zu Ort mitteilender Veränderungen in ihm nachweisen kann. Um so begreiflicher ist die Hoffnung, dass es schliesslich einmal gelingen werde, den fehlenden Nachweis zu führen. Nur darf man die Sache nicht so betrachten, wie wenn an der Scheinbarkeit jener Ausnahme nicht zu zweifeln sei. Alle bekannten und verstandenen Beobachtungen drängen vielmehr zum Gegenteil. Es muss daher, falls dies dennoch bloss auf mangelnder Erfahrung oder unvollständiger Analyse beruht, erst dargethan werden, dass es Thatsachen giebt, die unsere bisherige Auffassung nach entgegengesetzter Seite berichtigen und ergänzen. Dazu ist es vor allem nötig, jede Hypothese fern zu halten, die mehr annimmt, als dass in dem Raume zwischen zwei gravitierenden Massen etwas geschehe, das teil an der Gravitation hat. Wegen früherer ähnlicher, doch unzureichender Behandlungen der hier erörterten Frage sei auf das der 69. Naturforscherversammlung erstattete Referat über Fernwirkungen von Drude verwiesen.

Zwei gravitierende Massen geben sich als solche durch den Widerstand zu erkennen, den sie einer Vergrösserung ihres Abstandes entgegensetzen. Damit müssen also, während sie selbst in Ruhe oder in Bewegung sein können, die etwa vorhandenen Vorgänge in dem Raume zwischen ihnen zusammenhängen. Offenbar ist mit der Lage oder mit ihr und dem momentanen Bewegungszustande der Massen, soweit äussere Einflüsse ausgeschlossen sind, nicht nur der eine, örtliche Widerstand, sondern auch die Reihe aller bis ins Unendliche folgenden Widerstände bestimmt. Die zu ihrer Überwindung notwendige Arbeit ist also ebenso wie der einzelne Widerstand selbst eine die Gravitation

charakterisierende Grösse. Bloss sie kann hier, wo es darauf ankommt, ob mit der Gravitation sich im Raume unter Zeitverlust ausbreitende Veränderungen verbunden sind, als Grundgrösse angesehen werden. Denn es hat dem Begriffe nach keinen Sinn, von der räumlichen Fortpflanzung des Widerstandes oder der Anziehung zu reden, da Widerstand und Anziehung als solche nur an den Orten vorhanden sind, wo sich die Massen befinden. Aber wenn von einem Vorgange ausgesagt wird, er brauche Zeit, um von einem nach einem anderen Ort zu gelangen, so heisst dies, er hört an dem ersten Orte zu existieren auf, ohne in demselben Augenblick sogleich an dem zweiten Orte zu sein; daher würde die in dem Vorgange enthaltene Energie zeitweise verschwinden, wenn sie nicht durch die zwischen den beiden Orten gelegenen Punkte hindurchginge. Sie ist gleich der genannten Arbeit, sobald der Vorgang zur Gravitation zweier in den Orten befindlichen Massen gehört, da er dann ebenfalls von deren Lage und momentanem Bewegungszustande abhängt und diese nicht zwei verschiedene Energiegrössen bedingen können.

Nun werde, indem zur Unterscheidung die eine Masse die anziehende, die andere die angezogene heisse, unter dem Potential V der anziehenden Masse auf die angezogene m der auf die Einheit der zweiten Masse entfallende Teil der Arbeit verstanden, die zu leisten ist, damit sich die Massen bis ins Unendliche von einander entfernen, die mithin insgesamt Vm betrage. Für den Punkt, in dem sich die festgehalten gedachte Masse m befindet, und dessen Koordinaten, bezogen auf die ebenfalls festgehaltene anziehende Masse, x, y, z seien, kann man nach der in Machs Prinzipien der Wärmelehre beschriebenen Methode V berechnen, indem man es gleich dem Mittelwert aller in nächster Umgebung des Punktes herrschenden Potentiale setzt. V ist ja keine gerichtete Grösse und für eine gegebene Lage unveränderlich in der Zeit. Es sei in m gleich $f(x, y, z)$ und für einen Nachbarpunkt gleich

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l).$$

Ferner bedeute

$$\varphi(\sqrt{h^2+k^2+l^2})$$

das Gewicht des Nachbarpunktes im Mittelwert, das bei Nahwirkungen mit wachsender Entfernung schnell abnimmt. Dann findet man

$$V = \frac{\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+h,\, y+k,\, z+l)\,\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right) dh\, dk\, dl}{\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right) dh\, dk\, dl}.$$

Entwickelt man f nach der Taylorschen Reihe bis zur zweiten Potenz, und integriert man um den Punkt x, y, z herum, so wird

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{df}{dx}h+\frac{df}{dy}k+\frac{df}{dz}l\right)\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)dh\,dk\,dl=0,$$

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}hk+\frac{df}{dx}\frac{df}{dz}hl+\frac{df}{dy}\frac{df}{dz}kl\right)\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)dh\,dk\,dl=0,$$

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)h^2\,dh\,dk\,dl=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)k^2\,dh\,dk\,dl$$

$$=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)l^2\,dh\,dk\,dl.$$

Es bleibt, wenn man

$$\frac{\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)h^2\,dh\,dk\,dl}{\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)dh\,dk\,dl}=n$$

setzt,

$$V=V+\frac{n}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right),$$

also

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt auf bekannte Weise, wenn μ eine Konstante bezeichnet und r der Abstand der Massen ist,

$$V=\frac{\mu}{r}.$$

Hieraus ergiebt sich das Newtonsche Gravitationsgesetz. Denn $V=\frac{\mu}{r}$ gilt auch noch in dem Augenblick, da man die Massen loslässt. Die Zunahme von Vm stimmt mit der erscheinenden lebendigen Kraft dT überein, und darum enthält T in jenem Augenblick ebenso wenig wie V die Änderung von r in der Zeit. Folglich hat man nach den allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, indem man an Stelle der äusseren auf die Masse m wirkenden Kraft den negativen Wert der von ihr ausgeübten Kraft setzt, für die Beschleunigung von m

$$\frac{1}{m}\frac{dT}{dr}=\frac{dV}{dr}=-\frac{\mu}{r^2}.$$

Das Newtonsche Gesetz schreibt die Potentiale vor, die die Massen in jeder Lage erreichen, wenn ihnen die zu deren Zustandekommen erforderliche Zeit zur Verfügung steht. Diese Bedingung ist immer erfüllt, sobald die Massen in ihrer gegenseitigen Entfernung festgehalten werden. Sie hört auf bei eingetretener freier, einander entgegen gerichteter Bewegung, falls jene Zeit eine endlich bemessene Grösse hat. Zwei Umstände sind dabei von Einfluss. Erstens muss

zwar im Abstande $r - \Delta r$ der Massen, wo Δr bei wachsendem r positiv, bei abnehmendem negativ ist, das Potential sich in der im umgekehrten Verhältnis zu $r - \Delta r$ stehenden Grösse zu bilden anfangen, weil sonst nicht einzusehen wäre, wie sich dieses Verhältnis bei der Ruhe der Massen zu erfüllen vermöchte. Aber es gelangt nicht sogleich zur Wirkung an m, da der es bedingende Vorgang von der anziehenden Masse ausgeht und Zeit braucht, um bis zur angezogenen Masse fortzuschreiten. Selbstverständlich findet ein Fortschreiten der gedachten Art auch von der angezogenen zur anziehenden Masse statt, ähnlich wie zu jeder Wärmeausstrahlung zwischen zwei Körpern eine Gegenstrahlung gehört. Das bei dem Abstande $r - \Delta r$ von der anziehenden Masse ausgehende Potential bethätigt sich also in m erst zu einer um Δt späteren Zeit, nachdem der Abstand gleich r geworden ist. Zweitens würde das Potential wohl bei Fernwirkung unmittelbar in seinem vollen Betrage erscheinen; sind jedoch Raum und Zeit in der vorausgesetzten Art mit im Spiel, so hat es auch eine gewisse Dauer nötig, damit es, bei m angelangt, dieser Masse sich mitteile, d. h. den ihm entsprechenden Bewegungszustand von m hervorrufe. Denn nur die Annahme von Fernwirkungen lässt Unstetigkeit in den Erscheinungen zu; ihre Ersetzung durch die Annahme von Nahwirkungen hat vor allem den Zweck, die sich an den übrigen physikalischen und chemischen Veränderungen bewährende Stetigkeit auch in die Auffassung der Gravitation einzuführen. Wie sich daher beim Stosse die Stosskraft aus succ. Elementarstössen zusammensetzt, so geschieht die Übertragung des als Potential anlangenden Vorganges auf m durch schnell aufeinander folgende Differentialpotentiale. Wenn die Massen ruhen, geht die Bewegung des Potentials mit ihrer eigenen Geschwindigkeit an m vorüber; dann bemisst sich sein auf m übertragener Wert nach dem umgekehrten Verhältnis zum Abstande. Wenn die Massen aufeinander zueilen, verringert sich die Zeit der Übertragung, mithin der übertragene Potentialwert im Verhältnis der eigenen Geschwindigkeit des Potentials zu der aus ihr und der Geschwindigkeit der Massen bestehenden Summe, da das Potential in Bezug auf m diese Gesamtgeschwindigkeit hat.

Das Potential bewegt sich ausser mit seiner Geschwindigkeit c noch mit der Geschwindigkeit der anziehenden Masse, von der es ausgeht. Der Weg $r - \Delta r$, den die beiden sich entgegenkommenden Bewegungen, die des Potentials und die der angezogenen Masse, in der Zeit Δt zurücklegen, beträgt daher

$$\Delta t \left(c - \frac{\Delta r}{\Delta t}\right);$$

während $r = c \Delta t$ ist. Also erhält man für den Abstand, bei dem sich das Potential zu bilden anfängt, und dem es umgekehrt proportional ist,

$$r - \Delta r = r\left(1 - \frac{1}{c}\,\frac{\Delta r}{\Delta t}\right).$$

Weil ferner die Geschwindigkeit, mit der die Bewegungen an einander vorbeigehen, den Wert

$$c - \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

hat, fällt das Potential wegen des Zeitverbrauches zu seiner Mitteilung an m auch proportional

$$\frac{c}{c - \frac{\Delta r}{\Delta t}}$$

aus. Man findet so

$$V = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2}.$$

Solange der Weg Δr kurz und deshalb $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ gegen c klein ist, darf man dafür $\frac{dr}{dt}$ setzen. Dadurch wird

$$V = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2},$$

woraus mit Hülfe des binomischen Satzes bis zur zweiten Potenz folgt

$$V = \frac{\mu}{r}\left[1 + \frac{2}{c}\frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Hier ist in dem Ausdruck für V nicht bloss r, sondern auch die Ableitung von r nach der Zeit enthalten. Darum ergiebt sich vermöge der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die Beschleunigung von m, wenn $\frac{dr}{dt}$ mit r' bezeichnet wird,

$$\frac{1}{m}\frac{dT}{dr} - \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr'} = \frac{dV}{dr} - \frac{d}{dt}\frac{dV}{dr'} = -\frac{\mu}{r^2}\left[1 - \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{6r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Die Annahme, dass $\frac{dr}{dt}$ im Vergleich mit c klein ist, trifft im Gebiet der gewöhnlichen Gravitationserscheinungen zu; sonst könnte das Newtonsche Gesetz sich nicht an bewegten Massen in dem Maße bewahrheiten, wie es dies thut. Aber unter besonderen Bedingungen, z. B. durch eine den Massen von aussen erteilte Anfangsgeschwindigkeit, kann $\frac{dr}{dt}$ so gross werden, dass weder $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ ihm gleich gesetzt werden darf, noch die Entwickelung der binomischen Reihe bis zur zweiten Potenz genügt. Die abgeleitete Formel hat daher nur Gültigkeit, wenn die gravitierenden Massen ein freies, nach aussen hin unabhängiges System bilden. In diesem, übrigens vor der Hand wichtigsten Falle bestimmt sie die Veränderung, die das Newtonsche Gesetz dadurch erleidet, dass sich die Potentiale zwischen den Massen nicht momentan, sondern mit Zeitverlust ausbreiten.

2. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Je nachdem die Beobachtungen für die in die vorige Rechnung eingeführte Grösse c einen endlichen oder einen unendlich grossen Wert liefern, findet man mehr oder weniger sicher, dass die Potentiale gravitierender Massen Zeit brauchen, um die zwischen diesen liegenden Abstände zu durchschreiten, oder dass eine solche zeitliche Ausbreitung nicht existiert, mithin die Gravitation auf wahrer Fernwirkung beruht. Besonders bedarf es der Erfüllung zweier Forderungen. Erstens sind wegen des Übergewichtes von c über $\frac{dr}{dt}$ die c enthaltenden Glieder des Ausdruckes für die Beschleunigung der Masse m von dem ganzen Ausdrucke abzusondern und mit den Thatsachen vergleichbar zu machen; zweitens ist die Grössenart zu ermitteln, durch die das Vorhandensein eines endlichen Wertes von c zu erkennen sein muss, und daraufhin dann die Erfahrung zu prüfen. Da der Schauplatz der Thatsachen nur das Planetensystem sein kann, stelle man sich als die anziehende Masse die Sonne, als die angezogene einen Planeten vor. Zur Vereinfachung werde dessen Bewegung auf die Sonne als Anfangspunkt der Koordinaten bezogen, sodass die Konstante μ im Verhältnis der Summe der Massen zur anziehenden Masse vergrössert gedacht werden muss.

Man setze
$$\frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{6r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2} = F.$$
Also ist
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}(1-F),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}(1-F),$$

woraus durch Multiplikation der einen Gleichung mit y und der anderen mit x und durch Subtraktion folgt

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Dies ist die auch bei der Ableitung der Eigenschaften und der Bahn der Planetenbewegung aus dem Newtonschen Gesetze entstehende Gleichung, die durch Integration und Einführung von Polarkoordinaten, wenn ϑ der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der positiven Abscissenaxe ist und L eine Konstante bedeutet, ergiebt

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = L.$$

Setzt man den hierin enthaltenen Wert

$$dt = \frac{r^2 d\vartheta}{L},$$

ferner

$$\frac{x}{r} = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{y}{r} = \sin\vartheta$$

in die Gleichungen für

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2}$$

ein, so lauten diese

$$d\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{L}(1-F)\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

$$d\frac{dy}{dt} = -\frac{\mu}{L}(1-F)\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Mit den Konstanten M und N wird durch Integration

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{L}\sin\vartheta + \left(M + \int\frac{\mu}{L}F\cos\vartheta\, d\vartheta\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \quad \frac{\mu}{L}\cos\vartheta + \left(N + \int\frac{\mu}{L}F\sin\vartheta\, d\vartheta\right).$$

Da $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = L$ ist, findet man aus den beiden letzten Gleichungen

$$r = \frac{L}{\frac{\mu}{L} - \left(M + \int\frac{\mu}{L}F\cos\vartheta\, d\vartheta\right)\sin\vartheta + \left(N + \int\frac{\mu}{L}F\sin\vartheta\, d\vartheta\right)\cos\vartheta}.$$

Die Integrale im Nenner nehmen nach und nach andere und andere Werte an, falls F nicht verschwindet. Setzt man voraus, man wisse ihren Wert zu einer bestimmten Zeit, so kann man sagen, dass der Planet sich zu dieser Zeit auf einer durch jene Gleichung beschriebenen Ellipse befinde. Ist deren halbe grosse Axe a, ihre halbe kleine Axe b, die numerische Exzentricität ε und der Winkel von a mit der positiven Abscissenaxe ω, und löst man die Gleichungen für

$$r = a(1-\varepsilon), \quad r = a(1+\varepsilon)$$

und $r = \frac{b^2}{a}$ nach

$$L,\ M + \int\frac{\mu}{L}F\cos\vartheta\, d\vartheta \quad \text{und} \quad N + \int\frac{\mu}{L}F\sin\vartheta\, d\vartheta$$

auf, so erhält man

$$L = b\sqrt{\frac{\mu}{a}},$$

$$M + \int\frac{\mu}{L}F\cos\vartheta\, d\vartheta = -\frac{\varepsilon}{b}\sqrt{a\mu}\sin\omega,$$

$$N + \int\frac{\mu}{L}F\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\varepsilon}{b}\sqrt{a\mu}\cos\omega.$$

Man sieht, indem man die Unveränderlichkeit von $\frac{b}{\sqrt{a}}$ beachtet, dass sich die Bewegung des Planeten so deuten lässt, wie wenn er

auf einer Ellipse einhergehe, deren ε und ω sich stetig verändern. Nur für den Fall, dass $F = 0$ ist, hört diese Veränderung auf. Sie ist es also, wodurch das Vorhandensein eines endlichen Wertes von c in Wirkung kommt. Man erhält für F, sobald man die beiden letzten Gleichungen nach ϑ differenziert, den Wert von L einsetzt und die eine durch

$$\cos\vartheta \cdot \frac{\sqrt{a\mu}}{b},$$

die andere durch

$$\sin\vartheta \cdot \frac{\sqrt{a\mu}}{b}$$

dividiert,

$$F = -\frac{\sin\omega}{\cos\vartheta}\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{dt}{d\vartheta} - \frac{\varepsilon\cos\omega}{\cos\vartheta}\frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{d\vartheta},$$

$$F = \frac{\cos\omega}{\sin\vartheta}\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{dt}{d\vartheta} - \frac{\varepsilon\sin\omega}{\sin\vartheta}\frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{d\vartheta}.$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke ergiebt sich mit $\alpha = \vartheta - \omega$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon \operatorname{tang}\alpha \frac{d\omega}{dt},$$

woraus rückwärts folgt

$$F = -\frac{\varepsilon}{\cos\alpha}\frac{dt}{d\vartheta}\cdot\frac{d\omega}{dt}.$$

Um mittelst dieses Wertes eine nur Beobachtungsgrössen enthaltende Gleichung für $\frac{d\omega}{dt}$ zu gewinnen, stelle man F durch die Ableitungen von r nach t dar. Man hat, wieder mit Berücksichtigung der Unveränderlichkeit von $\frac{b}{\sqrt{a}}$, ausserdem mit Benutzung der Formeln

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon \operatorname{tang}\alpha \frac{d\omega}{dt},$$

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = L \quad \text{und} \quad L = b\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a}}:$$

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \varepsilon\cos\alpha},$$

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= -\frac{ar^2}{b^2}\left(\cos\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} - \varepsilon\sin\alpha\frac{d\vartheta}{dt} + \varepsilon\sin\alpha\frac{d\omega}{dt}\right)\\
&= -\frac{ar^2}{b^2}\left(-\varepsilon\cos\alpha\operatorname{tang}\alpha\frac{d\omega}{dt} - \varepsilon\sin\alpha\frac{d\vartheta}{dt} + \varepsilon\sin\alpha\frac{d\omega}{dt}\right)\\
&= \frac{a\varepsilon r^2}{b^2}\sin\alpha\frac{d\vartheta}{dt}\\
&= \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\sin\alpha,
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\sqrt{a\mu}}{b}\sin\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\omega}{dt}$$

$$= -\frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\sin\alpha\operatorname{tang}\alpha\frac{d\omega}{dt} + \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\omega}{dt}$$

$$= -\frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\sin\alpha\operatorname{tang}\alpha\frac{d\omega}{dt} + \frac{\varepsilon\mu}{r^2}\cos\alpha - \frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b}\cos\alpha\frac{d\omega}{dt}$$

$$= -\frac{\varepsilon\sqrt{a\mu}}{b\cos\alpha}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\varepsilon\mu}{r^2}\cos\alpha.$$

Also ist

$$F = \frac{3\varepsilon^2 a\mu}{b^2c^2}\sin^2\alpha + \frac{6\varepsilon r\sqrt{a\mu}}{bc^2\cos\alpha}\frac{d\omega}{dt} - \frac{6\varepsilon\mu}{r}\cos\alpha.$$

Daher lautet die gesuchte Gleichung für $\frac{d\omega}{dt}$

$$\frac{\varepsilon r^2\sqrt{a}}{b\sqrt{\mu}\cos\alpha}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3\varepsilon^2 a\mu}{b^2c^2}\sin^2\alpha - \frac{6\varepsilon r\sqrt{a\mu}}{bc^2\cos\alpha}\frac{d\omega}{dt} + \frac{6\varepsilon\mu}{r}\cos\alpha$$

oder nach Einsetzung von $r = \frac{b^2}{a(1+\varepsilon\cos\alpha)}$ und $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und nach Division durch $\frac{\varepsilon r^2\sqrt{a}}{b\sqrt{\mu}\cos\alpha}$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{6\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)\frac{d\omega}{dt} - \frac{3\varepsilon\mu^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)^2\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$+ \frac{6\mu^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)^3\cos^2\alpha.$$

Wenn man den so berechneten Wert der Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ mit den Beobachtungen vergleichen will, hat man zu berücksichtigen, dass die Rechnung nur einen einzigen Planeten voraussetzt. Daher können allein Perihelbewegungen in Betracht kommen, die nicht aus Störungen entstehen. Solche sind bloss beim Merkur bekannt, in einem Betrage von etwa 41″ in einem Jahrhundert. Diese Kleinheit schliesst von vornherein jede erfahrungsmässige Feststellung der stetigen Veränderlichkeit von $\frac{d\omega}{dt}$ aus. Also ist über eine längere Zeit hin zu integrieren. In der letzten Gleichung kommt nur ε, nicht auch $\frac{d\varepsilon}{dt}$ vor; und sofern die Änderungen von ε gegen ε selbst verschwinden, kann man dieses als konstant ansehen. Es genügt danach als Grenzen der Integration $\alpha = 0$ und $\alpha = 2\pi$ zu wählen, da $\frac{d\omega}{dt}$ bei jedem folgenden Umlauf die Werte des vorigen Umlaufes sehr annäherungsweise wiederholt.

Man multipliziere die Gleichung für $\frac{d\omega}{dt}$ mit dt und setze im zweiten und im dritten Gliede der rechten Seite

$$dt = \frac{r^2}{L} d\vartheta = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon\cos\alpha)^2}(d\alpha + d\omega).$$

Durch passende Ordnung und Division ergiebt sich

$$d\omega = \frac{\frac{6\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)\cos^2\alpha - \frac{3\varepsilon\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+\frac{6\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha) - \frac{6\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}(1+\varepsilon\cos\alpha)\cos^2\alpha + \frac{3\varepsilon\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2}\sin^2\alpha\cos\alpha} d\alpha.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch

$$\frac{3\mu}{a(1-\varepsilon^2)c^2} = \frac{\gamma}{c^2},$$

ordnet man nach steigenden Potenzen von $\cos\alpha$, und setzt man zur Abkürzung

$$-\varepsilon\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 3\varepsilon\cos^3\alpha = v,$$

$$3\varepsilon\cos\alpha - 2\cos^2\alpha - 3\varepsilon\cos^3\alpha = w,$$

so wird

$$d\omega = \frac{v}{\frac{c^2}{\gamma} + 2 + w} d\alpha.$$

Angenähert erhält man

$$d\omega = \left[\frac{v}{\frac{c^2}{\gamma}+2} - \frac{vw}{\left(\frac{c^2}{\gamma}+2\right)^2}\right] d\alpha.$$

Für die Perihelbewegung ψ während eines Umlaufes ergiebt sich daher

$$\psi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{v}{\frac{c^2}{\gamma}+2} - \frac{vw}{\left(\frac{c^2}{\gamma}+2\right)^2}\right] d\alpha$$

oder, weil

$$vw = -3\varepsilon^2\cos^2\alpha + 8\varepsilon\cos^3\alpha + 4(3\varepsilon^2-1)\cos^4\alpha - 12\varepsilon\cos^5\alpha - 9\varepsilon^2\cos^6\alpha,$$

$$\psi = \frac{2\pi}{\frac{c^2}{\gamma}+2} + \frac{3\pi(8-\varepsilon^2)}{8\left(\frac{c^2}{\gamma}+2\right)^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{c^2}{\gamma} + 2 = \frac{\pi}{\psi} + \sqrt{\frac{\pi^2}{\psi^2} + \frac{3\pi(8-\varepsilon^2)}{8\psi}}.$$

Beachtet man, dass ψ sehr klein ist, so sieht man, dass das zweite Glied unter der Wurzel gegen das erste verschwindet. Der für $d\omega$ gewählte Näherungsausdruck ist danach noch zu genau, d. h. w hätte von vornherein vernachlässigt werden dürfen. Mithin wird

$$\frac{c^2}{\gamma} + 2 = \frac{2\pi}{\psi},$$

$$c^2 = \frac{2\pi\gamma}{\psi} - 2\gamma,$$

wo aus demselben Grunde 2γ gegen $\frac{2\pi\gamma}{\psi}$ unberücksichtigt bleiben kann. Man erhält daher schliesslich

$$c^2 = \frac{6\pi\mu}{a(1-\varepsilon^2)\psi}.$$

Hierin ist

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2},$$

wenn τ die Umlaufszeit des Planeten bedeutet. Speziell für Merkur gelten folgende Werte:

$$a = 0{,}3871 \cdot 149 \cdot 10^6 \text{ km},$$

$$\varepsilon = 0{,}2056,$$

$$\tau = 88 \text{ Tage},$$

$$\psi = 4{,}789 \cdot 10^{-7}.$$

Man findet damit

$$c = 305500 \text{ km/sec}.$$

Die kleinste bisher gefundene Geschwindigkeit des Lichtes hat Foucault erhalten, gleich 298000 km/sec; die grösste ergiebt sich nach der Methode von Römer aus den neuesten Beobachtungen zu 308000 km/sec; die Geschwindigkeit der elektrischen Wellen fand Hertz in seinen Versuchen 320000 km/sec. Also stimmt die Geschwindigkeit, mit der sich das Gravitationspotential ausbreitet, mit der Geschwindigkeit des Lichtes und der elektrischen Wellen überein. Darin liegt zugleich die Bürgschaft, dass diese Geschwindigkeit existiert.

Freilich wird niemand in Abrede stellen, dass die Perihelbewegung des Merkur von 41″ in einem Jahrhundert auch durch andere, noch unbekannte Umstände bedingt sein könnte, so dass es eine endliche Geschwindigkeit des Gravitationspotentials nicht zu geben brauchte. Man hat aber zu bedenken, dass die hier hauptsächlich entscheidende, übrigens auch die Abweichung von allen früheren Ergebnissen ähnlicher Untersuchungen bedingende Formel für die Abhängigkeit des Potentials von einer solchen Geschwindigkeit auf völlig naturmässigem, nicht erst durch schwierige Hypothesen führendem Wege gewonnen ist. Es wäre daher ein sonderbarer Zufall, wenn die 41 Sekunden des Merkur gerade die Licht- und Elektrizitätsgeschwindigkeit lieferten, ohne mit einer räumlich-zeitlichen Ausbreitung der Gravitation etwas zu thun zu haben, da doch das Medium, worin diese Ausbreitung

und die Bewegung des Lichtes und der elektrischen Wellen erfolgen, derselbe zwischen den Weltkörpern sich erstreckende Raum ist. Nicht einmal die verhältnismässig grosse Perihelbewegung, die man mit dem gefundenen Werte von c für die Venus erhält, nämlich 8″ in einem Jahrhundert, kann als stichhaltiger Einwand gelten; oder eine Revision der Störungen dieses Planeten müsste die Möglichkeit jener Zahl endgültig ausschliessen. Es sei daran erinnert, dass die Berechnungen der säkulären Beschleunigung des Mondes zwischen 6″ und 12″ zu schwanken vermochten. Im übrigen ergeben sich lauter unmerklich kleine Perihelbewegungen. Sie betragen nach den aus den gebräuchlichen Tabellen leicht zu entnehmenden Beobachtungswerten bei der Erde in einem Jahrhundert 3″,6, beim Monde 0″,06, beim Mars 1″,3, beim Jupiter 0″,06, beim Saturn 0″,01, beim Uranus 0″,002 und beim Neptun 0″,0007.

Zur Ausgleichung eines durch Längenmessungen bestimmten Punktes.*

Von

E. Hammer

in Stuttgart.

Eine nur unter besondern Verhältnissen praktisch anwendbare Methode der Einschaltung eines Neupunktes in ein Netz gegebener trigonometrischer Punkte ist die der direkten Messung der Strecken zwischen dem Neupunkte und einigen gegebenen Punkten. Gleichwohl wird diese Methode der Punktbestimmung (die eigentlich nicht mehr trigonometrisch heissen sollte, weil sie keine Winkelmessung erfordert und weil auch die Rechnung selbstverständlich nicht notwendig trigonometrisch geführt werden muss) in den Lehrbüchern der Geodäsie und in einzelnen Katasteranweisungen neben den üblichen Methoden der Bestimmung durch Winkelmessung angeführt, und sie bietet in der That jedenfalls theoretisches und methodisches Interesse.

Die Bezeichnung: „Bestimmung durch Bogenschnitt“, die neuerdings für diese Aufgabe aufgekommen ist, halte ich deshalb für nicht glücklich, weil auch das Rückwärtseinschneiden eine Bestimmung durch Bogenschnitt ist.

1. Einleitung.

Jede Messung zur Bestimmung eines Neupunktes, sei es beim „Einschneiden“ Winkelmessung auf einem der gegebenen Punkte oder Winkelmessung auf dem zu bestimmenden Punkt, sei es bei der uns hier beschäftigenden Aufgabe die Messung der Strecke zwischen

---

* Die folgende methodische Notiz war, als Fortsetzung eines Aufsatzes über graphische Ausgleichung von vorwärts oder rückwärts eingeschnittenen Punkten, für die Zeitschrift für Vermessungswesen (vergleiche daselbst Jahrg. 1896, S. 611; 1897, S. 249) bestimmt. Da sie aber dort immer wieder zurückgestellt werden musste, möchte ich sie in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ veröffentlichen, deren neues Programm ja auch solche einfache praktische Dinge mit umfasst.

einem gegebenen und dem zu bestimmenden Punkt, hat den Zweck, einen planimetrischen „Ort“ für den zu bestimmenden Punkt festzulegen: beim Vorwärtseinschneiden sind diese Örter gerade Linien, die von gegebenen Punkten ausgehen; beim Rückwärtseinschneiden (denken wir uns Winkel gemessen) Kreisbögen, die über gegebenen Strecken als Sehnen und mit den gemessenen Winkeln als Peripheriewinkeln beschrieben werden; bei der Bestimmung durch Längenmessung endlich sind es Kreisbögen, die gegebene Punkte zu Mittelpunkten und die gemessenen Strecken zu Halbmessern haben.

Wenn die Entfernungen des Punktes von zwei gegebenen Punkten gemessen sind, so ist er einfach planimetrisch bestimmt, wie man ihn z. B. als Näherungspunkt für das folgende zu berechnen hat; sind dagegen die Entfernungen nach mehr als zwei gegebenen Punkten gemessen, so handelt es sich um eine Ausgleichungsaufgabe, die rechnerisch oder graphisch gelöst werden kann. Die rechnerische Ausgleichung ist als hübsches einfaches Beispiel für vermittelnde Beobachtungen schon mehrfach behandelt worden, vergl. z. B. Jordan, Handbuch der Vermess. II, 3. Aufl., S. 198—199 („Bogenschnitt mit Ausgleichung“, wobei es sich um Ausgleichung von Abstichen aus einem Plan in kleinem Maßstab handelt); Koll, Meth. der kl. Qu. 1893, S. 123 flg. („Bogenschnitt gemessener Längen“); Anweisung IX für die preussischen trig. und polyg. Arbeiten, 2. Aufl., 1894, Trig. Form. 23. („Bogenschnitt von Messungslinien“, S. 335 flg.); F. G. Gauss, die trig. und polyg. Rechnungen, 2. Aufl., 1893, S. 138, 140, 143 flg. (von Koll), zusammenhängend S. 514 flg. („Bogenschnitt aus Kleinlinien“). Eine graphische Ausgleichung dagegen, die nicht auf fehlerzeigende Dreiecke sich stützen würde, ist meines Wissens bisher nicht angegeben,* und ich möchte daher diese, als hier besonders anschaulich, zur Ergänzung meines in der ersten Anmerkung zitierten Aufsatzes über graphische Ausgleichung, mitteilen. Zum Vergleich sei die rechnerische Ausgleichung nebst einigen Bemerkungen über konstante Fehler vorangesetzt, und zwar sofort mit Übergang zu einem Zahlenbeispiel (der Einfachheit halber, da es ja nur auf die Methoden ankommt, mit nur einer überschüssigen Messung).

---

* Auch z. B. von Weixler nicht, der kürzlich in den „Mitteilungen des k. k. militär-geogr. Instituts“, Band XVI, Wien 1897, eine sehr ausführliche Abhandlung über graphische Ausgleichung gegeben hat, worin die uns hier beschäftigende Aufgabe einmal gestreift wird. Zur Darstellung der Fehlerquadratsummen, die einzelnen Annahmen für den vorwärts oder rückwärts eingeschnittenen Punkt erzeugen, vergl. zu Weixlers Text und Figur (Nr. 2a) auch meinen Aufsatz zur graphischen Ausgleichung in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1896, besonders S. 623—624 mit Fig. 4. Jene Fig. 2a gewinnt ausserordentlich an Anschaulichkeit, wenn man in ihr nur einige wenige Linien gleicher $[\delta^2]$, z. B. in jenem Fall:

$$[\delta^2] = 20,\ 50,\ 100 \text{ und } 200$$

einträgt.

2. Die Aufgabe.

Es sind, auf ebenem Gelände, das auch in sonstiger Beziehung für direkte Längenmessung günstig ist (z. B. Strassen u. dergl.), die drei Punkte B, W, Z durch ihre Koordinaten gegeben:

	x	y
B	+ 23740,40	+ 4728,44
W	+ 24349,08	+ 5041,11
Z	+ 23955,13	+ 5613,97

Um den Neupunkt N zu bestimmen, sind seine Entfernungen von B, W, Z direkt gemessen und es ist als unmittelbares Ergebnis gefunden worden:

$$BN = L_1 = 522{,}60;$$
$$WN = L_2 = 367{,}59;$$
$$ZN = L_3 = 439{,}99;$$

was sind die Koordinaten von $\underline{N}$ (des ausgeglichenen Punktes)?

3. Rechnerische Ausgleichung.

Es seien $(\underline{x}, \underline{y})$ die Koordinaten des gesuchten Punktes $\underline{N}$, (x_0, y_0) die Koordinaten eines Näherungspunktes N_0 (zu berechnen mit Benutzung von zwei der gemessenen Entfernungen), so dass also mit

$$1) \qquad \begin{cases} \underline{x} = x_0 + x \\ \underline{y} = y_0 + y \end{cases}$$

noch die Verbesserungen x, y der Koordinaten von N_0 auf $\underline{N}$ zu bestimmen sind.

Aus den Verbesserungsgleichungen ($\underline{L}$ sind die ausgeglichenen Längen):

$$2) \qquad \begin{cases} \underline{L_1} = L_1 + v_1 = \sqrt{(\underline{x} - x_b)^2 + (\underline{y} - y_b)^2} \\ \underline{L_2} = L_2 + v_2 = \sqrt{(\underline{x} - x_w)^2 + (\underline{y} - y_w)^2} \\ \underline{L_3} = L_3 + v_3 = \sqrt{(\underline{x} - x_z)_2 + (\underline{y} - y_z)^2} \end{cases}$$

sieht man sofort, dass, mit Benutzung des Näherungspunktes $(x_0 y_0)$ zur Durchführung der Rechnung, die Koeffizienten und Absolutglieder der linear gemachten Verbesserungsgleichungen zu berechnen sind aus:

$$3) \qquad \begin{cases} a_k = \dfrac{x_0 - x_k}{L_{0,k}} = \cos(KN_0), \\ b_k = \dfrac{y_0 - y_k}{L_{0,k}} = \sin(KN_0), \\ l_k = L_{0,k} - L_k; \end{cases}$$

dabei ist je $K = B, W, Z$ zu setzen und $L_{0,k}$ bedeutet den Abstand zwischen dem Näherungspunkt $(x_0\, y_0)$ und dem fest gegebenen Punkt $K (= B, W, Z)$.

Die zweite Form für a_k und b_k ist noch angeschrieben, weil man ohnehin die $L_{0,k}$ mit Benutzung der Richtungswinkel (KN_0) rechnen wird (von ganz kleinen Abmessungen abgesehen, bei denen die Quadrattafel ausreichen würde). Nimmt man hier nach vorläufiger Näherungsrechnung an:

4) $$x_0 = +24007{,}70 \mid y_0 = +5177{,}30,$$

so erhält man nach 3), wenn die Absolutglieder nur auf 1 cm gerechnet werden, nämlich:

$$l_1 = L_{0,1} - L_1 = 522{,}42 - 522{,}60 = -0{,}18,$$
$$l_2 = L_{0,2} - L_2 = 367{,}54 - 367{,}59 = -0{,}05,$$
$$l_3 = L_{0,3} - L_3 = 439{,}82 - 439{,}99 = -0{,}17,$$

und wenn die Koeffizienten a, b auf zwei Stellen abgerundet werden, die Verbesserungsgleichungen:

5) $$\begin{cases} v_1 = +0{,}51\,x + 0{,}86\,y - 0{,}18, \\ v_2 = -0{,}93\,x + 0{,}37\,y - 0{,}05, \\ v_3 = +0{,}12\,x - 0{,}99\,y - 0{,}17; \end{cases}$$

dabei sind x, y und l in Metern genommen, was hier offenbar nicht zu unbequemen Zahlen führt.

Was nun die Gewichte angeht, so denken wir uns die L zunächst einmal nur mit unregelmässigen Fehlern behaftet (proportional $\sqrt{L}$ anzusetzen), also die Gewichte umgekehrt proportional L; nimmt man L in Kilometern, so wird:

6) $$\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{0{,}52} = 1{,}9, \\ p_2 = \dfrac{1}{0{,}37} = 2{,}7, \\ p_3 = \dfrac{1}{0{,}44} = 2{,}3 \end{cases}$$

mit absichtlich starker Abrundung und nach der Angabe so, dass $p = 1$ der Strecke 1000 m entspricht.

Mit diesen Zahlen erhält man durch Rechenschieber-Rechnung die Normalgleichungen:

7) $$\begin{cases} 2{,}88\,x - 0{,}37\,y - 0{,}10 = 0. \\ -0{,}37\,x + 4{,}01\,y + 0{,}03 = 0. \end{cases} \quad \Big|\ [pll] = 0{,}134\,;$$

die Auflösung giebt:

8) $$\begin{cases} y = -0{,}01 \text{ m} \quad (P_y = 3{,}96), \\ x = +0{,}03 \text{ m} \quad (P_x = 2{,}85), \\ [pvv] = 0{,}131, \\ \text{somit m. F. der Gewichtseinheit} \\ m = \sqrt{\dfrac{0{,}131}{3-2}} = \pm 0{,}36 \text{ m}. \end{cases}$$

Im ganzen wird also:

$$9)\qquad \underline{N}\begin{cases} \underline{x} = x_0 + x = +\,24007{,}73 \pm 0{,}21, \\ \underline{y} = y_0 + y = +\,5177{,}29 \quad \pm 0{,}18. \end{cases}$$

4. Regelmässige Fehler.

Hier fallen vor allem die unerwartet grossen m. F. auf; $\pm\,0{,}36$ m unregelmässiger m. F. für 1000 m würde meinen Fehler von m_1 (unregelm. m. F. pro Meter) $= \pm\,1{,}16$ cm entsprechen, während unter günstigen Verhältnissen gute Lattenmessung leicht mit m_1 (unregelm. m. F. pro Meter) $= \pm\,1$ mm und noch weniger zu machen ist. Rechnen wir hier die Verbesserungen v der einzelnen Messungen aus, so geben die Verbesserungsgleichungen 5):

$$10)\qquad \begin{cases} v_1 = -\,16_5 \text{ cm}, \\ v_2 = -\,8 \text{ cm}, \\ v_3 = -\,16 \text{ cm}, \end{cases}$$

[somit $[pvv] = 0{,}132$, genügend stimmend mit 8)], also alle v negativ und viel grösser als (bei der selbstverständlichen Festhaltung der Annahme, dass die relative Lage der gegebenen Punkte vollständig genau sei) der Fehler der Längenmessung erwarten lässt.

Ist es hier nicht gerechtfertigt an den L eine konstante Verbesserung anzubringen, z. B. die Annahme zu machen, dass ein Lattenmeter nicht mit dem Koordinatenmeter übereinstimme? Ein Lattenmeter wäre hier (relativ) zu kurz, denn die mit den Latten erhaltenen Zahlen sind zu gross. Das Verhältnis der einzelnen v zu den zugehörigen L ist der Reihe nach rund

$$\frac{1}{3200},\ \frac{1}{4600},\ \frac{1}{2800};$$

das Mittel wäre ungefähr $\frac{1}{3500}$ und mit um soviel verkürzten L könnte man die Ausgleichung wiederholen. Auch abgesehen von einer Verschiedenheit der Länge des Lattenmeters und Koordinatenmeters ist bekanntlich, bei Latten von genau richtiger Länge, bei Messung auf ebenem Boden (und noch mehr bei Absenkeln) eine kleine negative konstante Korrektion der Messungszahlen erforderlich, allerdings nicht so gross, wie oben berechnet, sondern nur

$$\frac{1}{5000} \text{ bis } \frac{1}{6000}$$

der Länge. Nimmt man oben als Reduktionszahl der Messungszahlen $-\frac{1}{4000}$ an, d. h. ändert die L von 522,60, 367,59 und 439,99 auf 522,47, 367,50 und 439,88 und wiederholt mit diesen Zahlen die Ausgleichung, so findet man einen Punkt $\underline{N}$, dessen Abscisse zwar nur um einige cm (etwa 3) grösser wird als oben, und dessen Ordinate etwa 1 cm kleiner ausfällt; aber die m. F. sinken selbstverständlich

sehr bedeutend. Ob man ein solches Verfahren thatsächlich schon bei drei Messungen rechtfertigen könnte, ist fraglich; wenn aber viele Strecken vorliegen und alle v dasselbe Vorzeichen bekommen, insbesondere die $\frac{v}{L}$ ungefähr auf einen gemeinsamen Wert hinweisen, so ist der Neupunkt in der That schärfer bestimmt, als aus den unmittelbaren L hervorgehen würde. In dem Beispiel von Koll (Meth. d. kl. Qu., S. 127) mit den Ergebnissen

$$v_1 = +0{,}07,$$
$$v_2 = -0{,}24,$$
$$v_3 = +0{,}08,$$
$$v_4 = -0{,}18,$$
$$v_5 = -0{,}18$$

(die L sind der Reihe nach 332, 272, 247, 270, 417 m) wäre ein Abzug von etwa $\frac{1}{6000}$ an den L gerechtfertigt. Ganz ohne Willkür würde es bei einem solchen konstanten Koeffizienten nicht abgehen; aber man käme auf diesem Wege jedenfalls zu ebenso zutreffenden oder selbst bessern Resultaten, als wenn man nur dadurch Rücksicht auf die konstanten Fehler nimmt, dass man statt der obigen einfachen Gewichtsannahme

$$p = \frac{C}{L},$$

die also nur auf den unregelmässigen, proportional $\sqrt{L}$ sich vergrössernden Messungsfehler Rücksicht nimmt, Gewichte für die Längenmessungen ansetzt, die nach

$$m_L = \pm c_1 \sqrt{L} + c_2 L,$$

oder besser

11) $$m_L = \sqrt{k_1 L + k_2 L^2}$$

zugleich Rücksicht auf die konstanten Fehler der Längenmessung nehmen sollen. Es ist mit den gewöhnlichen Mitteln (ohne Komparator) z. B. Normalmeter und dem oft verwendeten Stangenzirkel, oft nicht leicht die Länge einer Latte auch nur auf $\frac{1}{2}$ mm festzustellen und die indirekte Vergleichung zweier Lattenpaare durch Messung derselben günstigen Strecke mit scharfen Endpunkten unter Anwendung der beiden Lattenpaare, wobei das eine z. B. bei zwei Messungen 119,45 und 119,46 m, das zweite aber 119,50 und 119,49 lieferte, giebt über den (relativen) regelmässigen Fehler leicht schärfer Aufschluss als direkte Vergleichung mit den oft nur vorhandenen bescheidenen Mitteln; in dem eben angeführten Beispiel wären die Längen an dem zweiten Lattenpaare um 25 mm auf 120 m kürzer (die Zahlen sind grösser) als an dem ersten und es wäre von den durch die zweiten gelieferten

Messungszahlen $\frac{1}{4800}$ abzuziehen, um sie mit Zahlen, die das erste gegeben hat, vergleichbar zu machen. Freilich ist dies nur eine relative Korrektion, über den absoluten Betrag des regelmässigen Lattenfehlers, und also nach weniger über den regelmässigen Gesamtfehler der Messung ist damit durchaus nichts entschieden. Aber man wird in der vorliegenden Ausgleichungsaufgabe mit Verwendung eines solchen konstanten, empirisch bestimmten Koeffizienten der regelmässigen Verbesserung, wo eine solche durch die v entschieden angedeutet ist, wie schon bemerkt, leicht Ergebnisse bekommen, die richtiger sind, als wenn man die L unverändert lässt und nur Gewichte ansetzt, die nach 11) zugleich auf den regelmässigen Fehler Rücksicht nehmen sollen. Nach der Preussischen Katastervorschrift würden z. B. in der obenstehenden Aufgabe (Gelände I) die Strecken Gewichtszahlen gleich 2,86, 4,71, 3,69 statt der oben angenommenen 1,9, 2,7, 2,3 erhalten; die Zahlen der ersten Gewichtsannahme verhalten sich wie 1 : 1,6 : 1,3, die der zweiten (der oben gemachten) wie 1 : 1,4 : 1,2; an den Koordinaten für $\underline{N}$ würde so auch mit den ersten Gewichten kaum etwas gegen oben geändert und jedenfalls würde an den m. F. nicht viel geändert. Insbesondere würden die m. F. von $\underline{x}$ und $\underline{y}$ entschieden zu gross ausfallen, wenn die Punkte B, W, Z als sehr gut bestimmt bekannt sind und die Messung der Strecken L z. B. sicher nicht mit einem grössern (unregelmässigen) Fehler als $\pm 2\sqrt{L}$ mm behaftet ist.

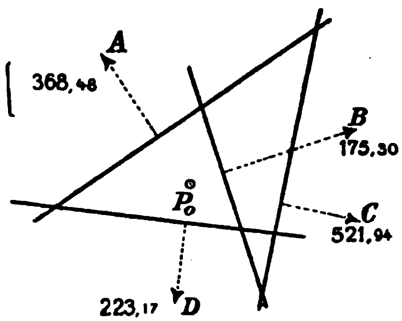
5. Graphische Ausgleichung.

Hier scheint mir nun die graphische Ausgleichung den Vorteil zu bieten, dass sie auf den ersten Blick alle wünschenswerte Auskunft auch über einen etwaigen merklichen konstanten Fehler bietet (selbstverständlich kann man auch bei rechnerischer Ausgleichung den konstanten Fehler leicht absondern; immerhin ist diese Anschaulichkeit des graphischen Verfahrens sehr willkommen).

Durch eines der gemessenen L, z. B. $L_k = KN$, ist als planimetrischer Ort des Neupunktes N ein Kreis um den gegebenen Punkt K als Mittelpunkt und mit L_k als Halbmesser festgelegt. Es sei nun wieder nahe bei N zunächst ein Punkt N_0 fest angenommen, um dessen Verbesserung es sich handelt. In der Nähe von N_0 wird man für eine kurze Strecke den Kreis um K ersetzen können durch die Richtung seiner Tangente; diese steht senkrecht auf dem Halbmesser, d. h. die Richtung der Tangente erhält man durch einen Richtungswinkel der sich von (KN_0) um 90^0 unterscheidet. Diese Richtungswinkel, (KN_0) braucht man ohnehin zur Rechnung der Entfernungen KN_0; da KN gemessen ist, hat man in $(KN_0 - KN)$ auch unmittelbar den Abstand jener Tangente von N_0 gegen K hin (wirklich gegen K hin oder, von K aus, über N_0 hinaus, je nachdem die angegebene Differenz positiv oder negativ ist). Wenn die auf solche Art er-

haltene Ausgleichungsfigur, wenn z. B. die Entfernungen AP, BP, CP, DP von den gegebenen Punkten A, B, C, D aus gemessen sind, die Form von Figur 1 hätte, so wäre an der Berechtigung einer konstanten Verbesserung der Längenmessungen (hier dann mit dem Vorzeichen +) doch kaum zu zweifeln, mag nun diese konstante Abweichung wirklich in einer Differenz zwischen Lattenmeter und Koordinatenmeter oder in irgend einer anderen Quelle regelmässiger Fehler ihren Ursprung haben.

Fig. 1.



In dem in den Abschnitten 2. und 3. behandelten Beispiel hat man folgende Daten zum Auftragen der Bestimmungslinien für N (der Tangenten an die Kreise um B, W, Z).

Näherungspunkt: N_0	$x_0 = +24007{,}70$	$y_0 = +5177{,}30$	
Richtungswinkel: $(KN_0) =$	$(BN_0) = 59^0{,}2$	$(WN_0) = 158^0{,}2$	$(ZN_0) = 276^0{,}9$
somit R.W. der Tangente $= (KN_0) \pm 90^0 =$	$149^0{,}2$	$248^0{,}2$	$6^0{,}9$
Strecken zum Näherungspunkt: $KN_0 =$	522,42	367,54	439,82
Gemessene Strecken: $KN =$	522,60	367,59	439,99
Abstand der Tangente von N_0, gegen K hin, $=$	−0,18	−0,05	−0,17

Mit diesen Richtungswinkeln und Abständen werden die Tangenten in dasselbe Netz im Maßstab 1:10 eingetragen, wie es in dem oben zitierten Aufsatz des Verfassers, Zeitschrift für Vermess. 1896, S. 613 angegeben und verwendet ist (Randteilung in Graden, Koordinatenteilung nur nach Dezimetern, nicht nach Centimetern, also Netz mit cm-, nicht den verwirrenden mm-Linien). Man erhält damit die in Figur 2 stark ausgezogenen Linien.

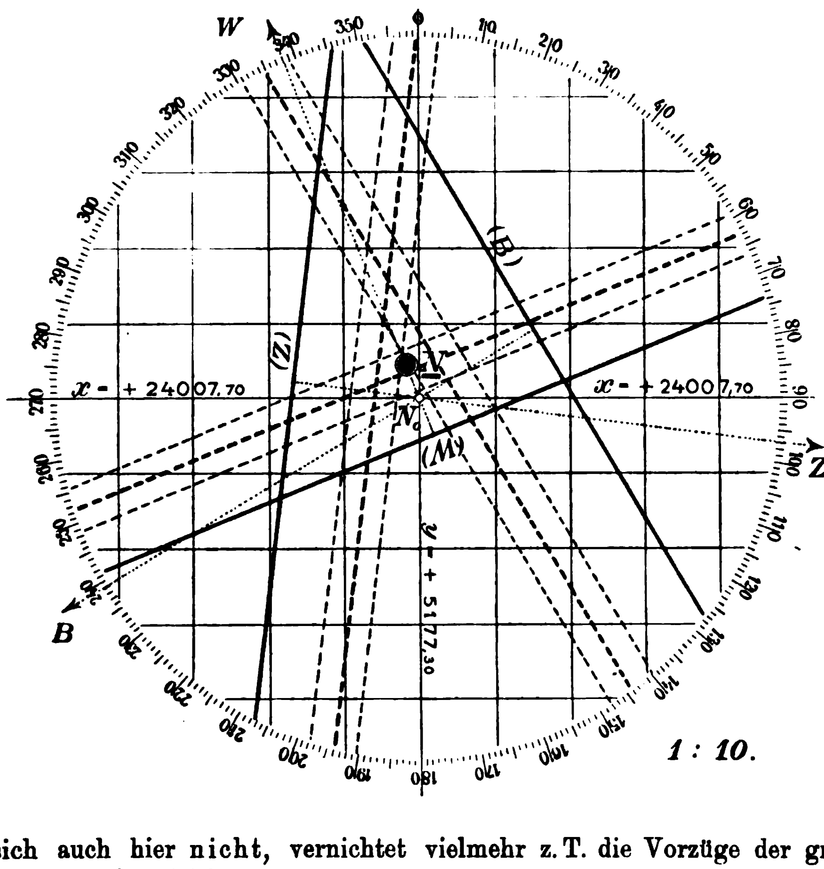
Wählt man ihnen entsprechend rasch nach Gutdünken den Punkt $\underline{N}$ aus, so ist man geneigt, ihn mit etwa

$$\underline{x} = +24007{,}80, \quad \underline{y} = +5177{,}28,$$

also mit einer gegen das Resultat 9) etwas grossen Abscisse anzusetzen.

Man hat aber, wenn man sich $[vv]$ gebildet denkt, zu beachten, dass mit Entfernung des Punktes von der Linie (W) das v_2^2 sehr rasch wächst, während gleichzeitig v_1 und v_3 nur sehr langsam abnehmen. Man wird also mit $\underline{N}$ doch möglichst nahe bei (W) bleiben und damit ein Resultat erhalten, das von 9) praktisch kaum abweicht. Eine Konstruktion des der Methode der kleinsten Quadrate entsprechenden Punktes (vergl. 3.), wie sie Bertot u. a. gegeben haben, empfiehlt

Fig. 2.



sich auch hier nicht, vernichtet vielmehr z. T. die Vorzüge der graphischen Ausgleichung.

In die Figur eingetragen sind nun hier, dem Vorstehenden entsprechend, aber auch noch starke Linien — — —; diese entstehen durch Verkürzung der L um das konstante Maß $\frac{1}{4000}$ von L, d. h. um die oben berechneten Beträge 13, 9 und 11 cm, und neben ihnen sind noch feine Linien — — —, die von mir so genannten Nebenlinien (siehe den oben angeführten Aufsatz und 6.) eingetragen. Man sieht hier auf einen Blick, dass die Verschiebung der —— auf die — — —

als Bestimmungslinien an den Koordinaten des zu wählenden Punktes $\underline{N}$ praktisch so gut wie nichts verändert, auch mit — — — liest man ab:

$$\underline{x} = +24007,76,$$
$$\underline{y} = +5177,28;$$

vergl. dazu die Bemerkungen zur rechnerischen Ausgleichung.

Auch bei dieser einfachen graphischen Ausgleichung ist es als Übungsaufgabe für Studierende (nicht im Sinne wirklicher Anwendung bei Ausgleichungen) ganz empfehlenswert, für eine Anzahl von Punktannahmen in der Umgebung von N_0 die v abzumessen (sei es die auf —— oder — — — sich gründenden) und je die $[pvv]$ zu bilden, endlich aus den so für jene Punkte gewonnenen Zahlen Linien gleicher $[pvv]$ empirisch zu konstruieren. Wer von mittlerer Fehlerellipse noch nichts gehört hat, wird so sehr einfach auf sie hingewiesen.

6. Nebenlinien. Schlussbemerkungen.

(Soldnersche und Gausssche Koordinaten.)

Auch hier wird zweifellos die volle Anschaulichkeit der graphischen Ausgleichung erst erreicht durch die Nebenlinien, die die verschiedene Wertigkeit der einzelnen Bestimmungslinien graphisch zum Ausdruck bringen; sei es, dass man sie auf —— bezieht und dann in ihre Abstände auch den konstanten Fehlerteil mit aufnimmt, oder auf — — — und sich hier wesentlich auf den unregelmässigen Fehler beschränkt. In der obigen Figur 2 ist dies mit der Annahme:

$$\text{unregelmässiger Fehler} = \pm 1,5\sqrt{L}\ \text{mm}$$

geschehen und zwar bezogen auf — — —, bei denen der regelmässige Fehler im wesentlichen beseitigt sein wird. Die Abstände der Nebenlinien — — — von den entsprechenden Hauptlinien werden

$$1,5\sqrt{523},\quad 1,5\sqrt{368}\quad \text{und}\quad 1,5\sqrt{440},$$

also ± 34, ± 29 und ± 32 mm. Dass man sich hier wieder zur Eintragung von Haupt- und Nebenlinien zweckmässig eines Parallellineals bedient, das die Parallelverschiebungen direkt einstellen lässt (vergl. Zeitschrift für Vermessungsw. 1896, S. 616), braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden.

Wenn auch auf die Aufgabe der Ausgleichung überschüssiger Streckenmessungen zur Bestimmung der Lage eines Punktes praktisch nicht viel Gewicht zu legen ist, so sei doch noch daran erinnert, dass man gelegentlich solche Streckenmessung mit Vorwärts- oder Rückwärtsschnitten kombinieren kann, indem der eine oder andere der gegebenen Punkte nahe und für die Längenmessung bequem liegt. Bei graphischer Ausgleichung ist diese Kombination besonders einfach.

Zum Schluss sei auch noch besonders angeführt, dass man bei der Punktbestimmung durch Streckenmessung sehr leicht (etwas bequemer als bei der Winkelmessung) Rücksicht nehmen kann auf die

Verschiedenheit der Streckenverzerrung in verschiedenen, von einem Punkt ausgehenden Richtungen, wenn die Punkte sich auf ein System Soldnerscher Koordinaten (oder ein anderes, nicht winkeltreues System) beziehen. Wenn die Ordinate der Messungsstelle sehr gross ist, so kann ja die Verstreckung, die wie ein mit der Richtung der gemessenen Strecke veränderlicher konstanter Fehler wirkt, sogar für gewöhnliche Lattenmessung fühlbar werden; z. B. ist im Soldnerschen System mit $y = 90$ km der Maximalwert der Verstreckung des Bogendifferentials bereits rund $\frac{1}{10000}$, also neben den andern konstanten Fehlern der Längenmessung wohl fühlbar. Diese differentielle Verstreckung ist bei Soldner Null in der Richtung senkrecht zur x-Axe (Richtungswinkel 90° und 270°) und erreicht ihr Maximum, in Bruchform $\frac{y^2}{2R^2}$, in der Richtung der x-Axe (Richtungswinkel 0° und 180°); in beliebiger Richtung (Winkel α mit der x-Axe) beträgt sie endlich

$$\frac{y^2}{2R^2}\cos^2\alpha.$$

Diese, für verschiedene Richtungen verschiedene, prozentische Vergrösserung der gemessenen Strecken wäre vor ihrer Einführung in die Rechnung anzubringen, wenn man bei besonders scharfer Längenmessung und bei grosser Entfernung der Messungsstelle von der x-Axe, 80 bis 100 km z. B., überhaupt auf sie Rücksicht nehmen will; selbstverständlich gilt dies sowohl für rechnerische als für graphische Ausgleichung. Bei Gaussschen Koordinaten statt Soldnerschen ist diese Projektionsvergrösserung der gemessenen (jedenfalls kurzen, nur einige hundert Meter langen) Strecken für alle dieselbe und kann, wenn sie überhaupt berücksichtigt werden soll, mit der sonst etwa als zweckmässig sich zeigenden konstanten Veränderung dieser Strecken zusammen gemessen werden. Wäre also die Punkteinschaltung durch Längenmessung (statt der durch Winkelmessung) praktisch wichtig, so wäre hier ebensowenig oder weniger als dort die Soldnersche Abbildung im Vorteil gegen die Gausssche und es ist nicht richtig, wenn in der geodätischen Litteratur (im Anschluss an die frühere Entwickelung Jordans, vergl. z. B. Handbuch der Vermessungskunde, 2. Auflage 1878, 2. Band S. 296, 3. Auflage des 3. Bandes, 1890, S. 285—287) immer noch das Gegenteil behauptet wird.

Bemerkung über einen Satz der Differentialrechnung.

Von **G. Kowalewski** in Leipzig.

Gauss (vergl. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale, herausgegeben von E. Netto, 1. Vorl. S. 12) definiert einmal die Stetigkeit einer Funktion in dem folgenden Sinne:

„Geht x von x_0 bis x_1 und nimmt y für diese beiden Werte der Variablen die Werte y_0 und y_1 an, dann giebt es zwischen x_0 und x_1 jedesmal ein x', für welches die Funktion den zwischen y_0 und y_1 beliebig gewählten Wert y' erhält."

Gegenwärtig gilt bekanntlich die von Dirichlet (Crelle, Bd. 4, S. 159) gegebene Definition, welche den Begriff mehr einschränkt, sodass eine Funktion, welche die von Gauss angegebene Eigenschaft hat, nicht notwendig in dem heutigen Sinne stetig zu sein braucht. Eine grosse Klasse von solchen Funktionen bilden z. B. alle Derivierten von stetigen Funktionen.

Im folgenden soll für Funktionen, die nur der Gaussschen Forderung genügen, ein Satz bewiesen werden, der in der Differentialrechnung für stetige Funktionen bewiesen wird. Er lautet:

Hat eine Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(a \dots b)$ einschliesslich der Grenzen die von Gauss angegebene Eigenschaft, besitzt sie ferner an jeder Stelle im Innern des Intervalls eine bestimmte Derivierte und ist $f(a) = f(b)$, so giebt es zwischen a und b eine Stelle ξ, an welcher die Derivierte verschwindet.

Dass $f(x)$ im Innern von $(a \dots b)$ eine bestimmte Derivierte besitzt, soll (im Anschluss an Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer reellen veränderlichen Grösse, Seite 93, § 72) bedeuten, dass für jedes x zwischen a und b der Grenzwert von $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ endlich oder unendlich gross, aber von bestimmtem Vorzeichen, ist; gleichviel, ob δ positiv oder negativ sich der Null nähert.

Konstruiert man um die Stelle $c = \frac{a+b}{2}$ mit einer beliebigen positiven Grösse ε $\left(\text{nur muss } \varepsilon < \frac{b-a}{2} \text{ sein}\right)$ ein Intervall $(c - \varepsilon \dots c + \varepsilon)$ und greift aus demselben zwei Werte x', x'' heraus, so kann möglicherweise $f(x') = f(x'')$ sein. Wenn dagegen $f(x') \gtrless f(x'')$ ist, so ist eine Differenzen $f(x') - f_0$, $f(x'') - f_0$, wo $f_0 = f(a) = f(b)$ sein soll, von Null verschieden. Es sei z. B. $f(x') - f_0 \gtrless 0$. Dann kann man zwei Werte c_1, c_2 so zwischen $f(x')$ und $f(x'')$ wählen, dass $c_1 - f_0$, $c_2 - f_0$ beide von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben. (Man braucht nur c_1, c_2 genügend nahe an $f(x')$ zu wählen.) Weil $f(x)$ die Gausssche Eigenschaft hat, giebt es zwischen x' und x'' zwei Stellen x_1, x_2, sodass $f(x_1) = c_1$, $f(x_2) = c_2$ ist. Dann sind also auch $f(x_1) - f_0$, $f(x_2) - f_0$ beide von einander und von Null verschieden und haben dasselbe Vorzeichen. Ausserdem ist

$$c - \varepsilon < x_1 < x_2 < c + \varepsilon,$$

wenn die Bezeichnung so gewählt wird, dass $x_1 < x_2$ ist. Wenn nun

$$|f(x_1) - f_0| > |f(x_2) - f_0|$$

ist, so liegt $f(x_2)$ zwischen $f_0 = f(a)$ und $f(x_1)$, mithin giebt es zwischen a und x_1 eine Stelle x_2', sodass $f(x_2') = f(x_2)$ ist $(a < x_2' < x_1 < x_2 < c + \varepsilon)$. Im Falle $|f(x_1) - f_0| < |f(x_2) - f_0|$ liegt $f(x_1)$ zwischen $f(x_2)$ und $f_0 = f(b)$, folglich giebt es zwischen x_2 und b eine Stelle x_1', so dass $f(x_1) = f(x_1)$ ist

$$(c - \varepsilon < x_1 < x_2 < x_1' < b).$$

Es hat sich also ergeben, dass einer der folgenden drei Fälle eintritt: Entweder ist $f(x') = f(x'')$ oder $f(x_1') = f(x_1)$ oder $f(x_2') = f(x_2')$, wobei

$$c - \varepsilon < x' < x'' < c + \varepsilon, \quad c - \varepsilon < x_1 < x_1' < b, \quad a < x_2' < x_2 < c + \varepsilon.$$

Dies können wir so ausdrücken:

Ist $f(a) = f(b)$ und hat $f(x)$ in dem Intervall $(a \ldots b)$ mit Einschluss der Grenzen die Gausssche Eigenschaft, so giebt es zu einer beliebig gewählten positiven Grösse ε ein ganz innerhalb $(a \ldots b)$ gelegenes Intervall $(a_1 \ldots b_1)$ von der Grösse $b_1 - a_1 < \frac{b-a}{2} + \varepsilon$ derart, dass $f(a_1) = f(b_1)$ ist.

Diesen Schluss kann man ohne Ende wiederholen. Zu einer beliebig gewählten positiven Grösse ε_1 findet man dann ein ganz innerhalb $(a_1 \ldots b_1)$ liegendes Intervall $(a_2 \ldots b_2)$ von der Grösse $b_2 - a_2 < \frac{b_1 - a_1}{2} + \varepsilon_1$ derart, dass $f(a_2) = f(b_2)$ ist und so fort. Auf diese Weise gewinnt man eine unendliche Reihe von Intervallen

$$(a \ldots b), \ (a_1 \ldots b_1), \ldots (a_n \ldots b_n), \ \ldots,$$

wo jedes ganz in dem vorhergehenden enthalten ist und hinsichtlich der Grösse die Ungleichungen bestehen:

$$b_n - a_n < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} + \varepsilon_{n-1}. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Sind die $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$ so gewählt, dass $\varepsilon_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{4}$ ist, so erkennt man leicht, dass

$$b_n - a_n < \left(\frac{3}{4}\right)^n (b - a)$$

wird, dass also $\lim_{n=\infty} (b_n - a_n) = 0$ wird. Dann aber giebt es einen Punkt ξ, der in allen jenen Intervallen enthalten ist, sodass $a_n < \xi < b_n$ ist. Wir haben also das Resultat:

Hat $f(x)$ in dem Intervall $(a \ldots b)$ einschliesslich der Grenzen die Gausssche Eigenschaft und ist $f(a) = f(b)$, so existiert im Innern von $(a \ldots b)$ eine Stelle ξ, um welche sich Intervalle $(a_n \ldots b_n)$ von beliebiger Kleinheit konstruieren lassen derart, dass $f(a_n) = f(b_n)$ ist.

Ziehen wir jetzt unsere Voraussetzung über die Derivierte von $f(x)$ in Betracht, so ergiebt sich, da die beiden Quotienten

$$\frac{f(a_n) - f(\xi)}{a_n - \xi}, \quad \frac{f(b_n) - f(\xi)}{b_n - \xi},$$

wenn sie nicht verschwinden, entgegengesetzte Zeichen haben, dass nur $f'(\xi) = 0$ sein kann.

Als Beispiel einer Funktion, welche unseren Voraussetzungen genügt, ohne überall stetig zu sein, führen wir die folgende an, in welcher die Quadratwurzeln positiv sein sollen.

$$f(x) = \left(\sin\frac{\pi}{x}\right)^2 + \sqrt{x}, \quad (x > 0), \quad f(0) = 0,$$

$$-f(x) = 2x + \left(\sin\frac{\pi}{x}\right)^2 + \sqrt{-x}, \quad (x < 0).$$

Hier ist $f(1) = f(-1) = 1$). An der Stelle $x = 0$ ist eine Unstetigkeit, während die Gausssche Eigenschaft offenbar besteht und der vorwärts und rückwärts gebildete Differentialquotient gleich $+\infty$ ist.

Bemerkungen zu dem Mittelwertsatz für ein System von n Integralen.

Von **G. Kowalewski** in Leipzig.

In Heft 3 des vorigen Jahrgangs habe ich den Satz aufgestellt, dass für n Integrale $\int_a^b \varphi_i(t)\,dt$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, wo die φ_i reelle und von a bis b stetige Funktionen sind, n Gleichungen bestehen:

$$\int_a^b \varphi_i(t)\,dt = [\lambda_1 \varphi_i(t_1) + \cdots + \lambda_n \varphi_i(t_n)](b - a).$$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ positive Grössen mit der Summe $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ und $t_1, t_2 \ldots t_n$ gewisse Werte aus dem Intervall $(a \ldots b)$. Durch eine einfache Variablenänderung kann man auch den allgemeineren Satz beweisen, dass unter denselben Voraussetzungen n Gleichungen

$$\int_a^b \varphi_i(t) F(t)\,dt = [\lambda_1 \varphi_i(t_1) + \ldots + \lambda_n \varphi_i(t_n)] \int_a^b F(t)\,dt$$

bestehen, vorausgesetzt, dass $F(t)$ von a bis b stetig ist und keinen Zeichenwechsel erleidet.

Für $n = 2$ bin ich zu diesem Satze durch ein Theorem von Weierstrass geführt worden, welches Hermite in seinem Cours von 1882 (gehalten an der Faculté des sciences) in der 7. Vorlesung (Seite 63 der Ausgabe von Andoyer) entwickelt mit Hilfe von Betrachtungen, die der Statik angehören. Setzt man $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ und

$$\int_a^b F(t) f(t)\,dt = \mu \int_a^b F(t)\,dt,$$

wo $F(t)$ von a bis b sein Zeichen nicht ändern soll, so sagt (nach Hermite) der Satz von Weierstrass aus, dass μ das Affix eines Punktes ist, der innerhalb jedes die sämtlichen Punkte $f(t)$ $(a \leq t \leq b)$ umschliessenden convexen Contours liegt. Will man also mit Hilfe des Weierstrassschen Satzes so viel wie möglich über die Lage des Punktes μ aussagen, so muss man den engsten convexen Contour aufsuchen, welcher die Punkte $f(t)$ enthält. Jeder convexe Bereich, der die Punkte $f(t)$ enthält, muss auch ihre Verbindungsstrecken enthalten. Wenn also die Gesamtheit aller Verbindungsstrecken von je zweien der Punkte $f(t)$ oder, wie man sich ausdrücken kann,

aller Sehnen der Kurve $f(t)$ selbst einen convexen Bereich erzeugen würde, so wäre dies offenbar der engste convexe Bereich, der die Punkte $f(t)$ enthält. Man würde in diesem Falle sagen können, der Punkt μ liege in diesem Bereich oder, was dasselbe ist, auf einer Sehne der Kurve $f(t)$. Dies wäre aber auch das Maximum von dem, was man mit Hilfe des Weierstrass-schen Satzes über die Lage von μ aussagen kann. Bei einer Kurve, die sich zeichnen lässt, ist es evident, dass die Sehnen einen convexen Bereich bilden. Wenn man aber $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ nur als stetig voraussetzt, so lässt es sich nicht so leicht einsehen. Ich habe deshalb in der in Heft 3 veröffentlichten Arbeit unter Umgehung dieses Hilfssatzes, nach dessen Beweis ich mich einfach auf das Theorem von Weierstrass hätte stützen können, direkt bewiesen, dass μ ein Punkt auf einer Sehne der Kurve $f(t)$ ist, was ja unmittelbar in meinen Gleichungen

$$\int_a^b \varphi(t)F(t)dt = [\lambda_1\varphi(t_1) + \lambda_2\varphi(t_2)]\int_a^b F(t)dt,$$
$$\int_a^b \psi(t)F(t)dt = [\lambda_1\psi(t_1) + \lambda_2\psi(t_2)]\int_b^b F(t)dt$$

(die in jener Arbeit allerdings nur für $F(t) = 1$ abgeleitet werden) enthalten ist. Später bemerkte ich, dass in eben jener Arbeit auch der Beweis des Satzes implicite enthalten ist, dass die Sehnen von $f(t)$ einen convexen Bereich bilden. Sind nämlich

$$\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2, \quad \lambda_3\omega_3 + \lambda_4\omega_4$$
$$(\omega_i = f(t_i), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \quad a \leq t_i \leq b, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3, \lambda_4 > 0)$$

irgend zwei Punkte des von den Sehnen erzeugten Bereiches, so ist ihre Verhindungsstrecke durch

$$\varkappa_1(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) + \varkappa_2(\lambda_3\omega_3 + \lambda_4\omega_4) \quad (\varkappa_1, \varkappa_2 > 0, \; \varkappa_1 + \varkappa_2 = 1)$$

dargestellt. Da hier aber $\varkappa_1\lambda_1 + \varkappa_1\lambda_2 + \varkappa_2\lambda_3 + \varkappa_2\lambda_4 = 1$ ist, so lässt sich auf Grund der Ausführungen in Heft 3 schliessen, dass diese Verbindungsstrecke nur Punkte enthält, die wieder auf einer Sehne liegen. Der durch die Sehnen von $f(t)$ erzeugte Bereich hat also die Eigenschaft, dass die Verbindungsstrecke von irgend zweien seiner Punkte ganz zu dem Bereich gehört. Dadurch ist aber ein convexer Bereich charakterisiert.

In Wirklichkeit sagt also, wenn man diesen Hilfssatz kennt, der Weierstrasssche Satz dasselbe aus wie mein Mittelwertsatz für $n = 2$. Da aber dieser Hilfssatz nirgends, soweit mir Darstellungen des Weierstrassschen Satzes bekannt sind, erwähnt wird und auch keineswegs selbstverständlich zu sein scheint, so glaube ich auch in dem Falle $n = 2$ eine kleine Ergänzung des Weierstrassschen Satzes gebracht zu haben, während die Verallgemeinerung auf $n > 2$ neu sein dürfte.

Im folgenden mache ich eine Anwendung von dem allgemeinen Mittelwertsatz auf drei Funktionen, die so gewählt werden:

$$\varphi_1(t) = \varphi(t),$$
$$\varphi_2(t) = \psi(t),$$
$$\varphi_3(t) = \varphi(t)\cdot\psi(t).$$

Es ergiebt sich:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = [\lambda_1 \varphi(t_1) + \lambda_2 \varphi(t_2) + \lambda_3 \varphi(t_3)](b-a),$$

$$\int_a^b \psi(t)\,dt = [\lambda_1 \psi(t_1) + \lambda_2 \psi(t_2) + \lambda_3 \psi(t_3)](b-a),$$

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt = [\lambda_1 \varphi(t_1)\psi(t_1) + \lambda_2 \varphi(t_2)\psi(t_2) + \lambda_3 \varphi(t_3)\psi(t_3)](b-a).$$

Multipliziert man die beiden ersten Gleichungen und subtrahiert davon die dritte, nachdem man sie vorher mit $b-a=(b-a)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ multipliziert hat, so kommt nach gehöriger Reduktion:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_a^b \varphi(t)\,dt \cdot \int_a^b \psi(t)\,dt - (b-a)\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt \\ &\qquad = -(b-a)^2 \sum_{i,k}^{1,2,3} \lambda_i \lambda_k (\varphi_i - \varphi_k)(\psi_i - \psi_k), \end{aligned}\right.$$

wo $\varphi_i = \varphi(t_i)$, $\varphi_k = \varphi(t_k)$ sein soll. Aus dieser Gleichung lässt sich ein bemerkenswerter Schluss ziehen. Sind $\varphi(t)$, $\psi(t)$ so beschaffen, dass sie beide fortwährend wachsen oder beide fortwährend abnehmen, wenn t das Intervall $(a \ldots b)$ von a nach b durchläuft, so haben die Differenzen $\varphi_i - \varphi_k$, $\psi_i - \psi_k$ dasselbe Vorzeichen und, da die $\lambda_i \cdot \lambda_k \geqq 0$ sind, so ist

$$\sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k (\varphi_i - \varphi_k)(\psi_i - \psi_k) \geqq 0$$

folglich die rechte Seite der Gleichung sicher nicht positiv, mithin:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt \cdot \int_a^b \psi(t)\,dt \leqq (b-a)\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt.$$

Wenn dagegen $\varphi(t)$ fortwährend zunimmt, $\psi(t)$ aber abnimmt oder umgekehrt, so kommt die Ungleichung:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt \cdot \int_a^b \psi(t)\,dt \geqq (a-b)\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt,$$

weil dann die Differenzen $\varphi_i - \varphi_k$, $\psi_i - \psi_k$ entgegengesetzte Zeichen haben, ihr Produkt also negativ ist.

Diese wichtigen Ungleichungen, welche sich in so einfacher Weise aus dem Mittelwertsatz für $n = 3$ ableiten lassen, rühren von Tschebyscheff her, wie Hermite in dem oben citierten Cours von 1882 (S. 47) mitteilt. Einen Beweis, der sich auf die Betrachtung des Doppelintegrals

$$\int_a^b \int_a^b [\varphi(x) - \varphi(y)][\psi(y) - \psi(y)]\,dx\,dy$$

stützt, findet man im American Journal of Mathematics (vol. VII, S. 377). Dort wird auch eine Reihe von interessanten Anwendungen, namentlich auf elliptische Integrale, vorgeführt.

---

43. Band. **3. Heft.**

ZEITSCHRIFT

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896),
B. WITZSCHEL (1856–1859), M. CANTOR (1859–1896), E. KAHL (1860–1892).

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND **DR. M. CANTOR.**

43. BAND. 3. HEFT.

MIT 17 TEXTFIGUREN UND 2 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.

Ausgegeben am 15. Juli 1898.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Über die automorphe Transformation einer Summe von Quadraten mit Hilfe infinitesimaler Transformationen und höherer komplexer Zahlen.

Von

Professor Beez

in Plauen i. V.

(Fortsetzung.)

§ 2.

Die automorphe Transformation der Summe von drei Quadraten.

Um die Summe von drei Quadraten $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ in die Summe dreier anderer Quadrate $x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2$ überzuführen, hat man

$$1)\quad \begin{cases} x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, \\ x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

zu setzen und den Koeffizienten a_{ik} die Bedingung aufzuerlegen, dass

$$2)\quad \begin{cases} a_{00}^2 + a_{10}^2 + a_{20}^2 = 1, & a_{00}a_{01} + a_{10}a_{11} + a_{20}a_{21} = 0, \\ a_{01}^2 + a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, & a_{00}a_{02} + a_{10}a_{12} + a_{20}a_{22} = 0, \\ a_{02}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, & a_{01}a_{02} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

sei. Infolge davon ist:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1,$$

also

$$\Delta = \pm 1.$$

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des ersten Falles $\Delta = +1$ und nehmen überdies an, dass die identische Transformation $x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$ für $a_{00} = a_{11} = a_{22} = 0$ und $a_{ik} = 0$, wenn k von i verschieden ist, eintritt. Die inverse Transformation, durch welche der Punkt x' wieder in den Punkt x zurückgeführt wird, ist:

$$3)\quad \begin{cases} x_0'' = a_{00}x_0' + a_{10}x_1' + a_{20}x_2', \\ x_1'' = a_{01}x_0' + a_{11}x_1' + a_{21}x_2', \\ x_2'' = a_{02}x_0' + a_{12}x_1' + a_{22}x_2' \end{cases}$$

Denn setzt man in 3) die Werte von x_0', x_1', x_2' aus 1) ein, so erhält man $x_0'' = x_0$, $x_1'' = x_1$, $x_2'' = x_2$.

Die Gleichungen 1) bilden eine dreigliedrige Gruppe, da zwischen den neuen Koeffizienten a_{ik} sechs Gleichungen stattfinden, sie also als Funktionen von drei wesentlichen oder unabhängigen Parametern angesehen werden können. Die Transformation 1), 2) lässt den Koordinatenanfang, den Abstand eines Punktes von demselben, die Entfernung zweier Punkte, die unendlich entfernte Ebene, den unendlich entfernten imaginären Kreis oder den imaginären Kegel $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ unverändert, ausserdem aber auch noch die Ebene $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = c$, wie sich später ergeben wird, wenn die drei wesentlichen Parameter λ_0, λ_1, λ_2 eingeführt worden sind. Zur geometrischen Deutung der Gleichungen 1) nehmen wir zwei rechtwinklige Axensysteme mit gemeinschaftlichem Koordinatenanfang an, von denen das eine fest das andere um den Koordinatenanfang drehbar sei. Die Koordinaten eines Punktes M mögen in dem ersten x_0', x_1', x_2', in dem zweiten x_0, x_1, x_2 sein. Dann bestehen zwischen den beiderlei Koordinaten die Gleichungen 1), welches dieselben sind wie bei der gewöhnlichen Koordinatentransformation, und den Übergang von einem rechtwinkligen System zu einem anderen mit demselben Koordinatenanfang vermitteln. Ist die Änderung in der Lage des beweglichen Systems gegen die Anfangslage nur eine unendlich geringe, so ändern sich die Koeffizienten a_{ik} unendlich wenig, während x_0, x_1, x_2 unverändert bleiben. Man hat also die Gleichungen 1) zu variiren und dabei auf die Gleichungen 2) Rücksicht zu nehmen, sodann die beiden Systeme zusammenfallen zu lassen, wobei $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$, wenn k von i verschieden ist. Wir erhalten aus 2):

$$\delta a_{00} = \delta a_{11} = \delta a_{22} = 0, \quad \delta a_{01} + \delta a_{10} = 0, \quad \delta a_{02} + \delta a_{20} = 0,$$
$$\delta a_{12} + \delta a_{21} = 0.$$

Wir können daher den infinitesimalen Transformationen folgende Gestalt geben:

$$4)\quad \begin{cases} (\delta x_0')_0 = \delta x_0 = x_1 \delta a_{01} - x_0 \delta a_{20}, \\ (\delta x_1')_0 = \delta x_1 = -x_0 \delta a_{01} + x_2 \delta a_{12}, \\ (\delta x_2')_0 = \delta x_2 = x_0 \delta a_{20} - x_1 \delta a_{12}. \end{cases}$$

Setzen wir die Variationen:

$$\delta a_{01}, \quad \delta a_{12}, \quad \delta a_{20},$$

die durch cyklische Vertauschung der Indices 0, 1, 2 in einander übergehen, bezüglich gleich $\lambda_2 \delta t$, $\lambda_0 \delta t$, $\lambda_1 \delta t$,

worin δt eine unabhängige unendlich kleine, λ_0, λ_1, λ_2 beliebige endliche Grössen bedeuten, so sind die Variationen von x_0', x_1', x_2' für $t = 0$

$$5)\quad \begin{cases} (\delta x_0')_0 = \delta x_0 = (\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\delta t, \\ (\delta x_1')_0 = \delta x_1 = (\lambda_0 x_2 - \lambda_2 x_0)\delta t, \\ (\delta x_2')_0 = \delta x_2 = (\lambda_1 x_0 - \lambda_0 x_1)\delta t \end{cases}$$

und die Variation einer beliebigen Funktion $f(x_0, x_1, x_2, t)$:

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}\right)\delta t$$

wird

$$6)\ \delta f = \left\{(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (\lambda_0 x_2 - \lambda_2 x_0)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_1 x_0 - \lambda_0 x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}\delta t,$$

oder nach den willkürlichen Konstanten geordnet:

$$6^*)\quad \begin{cases} \delta f = \Big\{\lambda_0\left(x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \lambda_1\left(x_0\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) \\ \qquad\qquad + \lambda_2\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\Big\}\delta t. \end{cases}$$

Wir bestimmen nun in derselben Reihenfolge wie in § 1 die endlichen Transformationen nach den dort angegebenen drei verschiedenen Integrationsmethoden.

I. Setzen wir den Koeffizienten von δf in 6):

$$(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (\lambda_0 x_2 - \lambda_2 x_0)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_1 x_0 - \lambda_0 x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2} = \varphi f,$$

so finden wir die endlichen Transformationen in der Form:

$$7)\quad x_i' = x_i + t\varphi x_i + \frac{t^2}{2!}\varphi^2 x_i + \frac{t^3}{3!}\varphi^3 x_i + \cdots$$

Nun ist:

$$7^*)\quad \begin{cases} \varphi x_0 = \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2, \\ \varphi^2 x_0 = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)x_0 + \lambda_0\lambda_1 x_1 + \lambda_0\lambda_1 x_2, \\ \varphi^3 x_0 = -(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)\varphi x_0. \end{cases}$$

Setzt man $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = h^2$, so ist also:

$$\varphi^3 x_0 = -h^2\varphi x_0,\quad \varphi^4 x_0 = -h^2\varphi^2 x_0,\quad \varphi^5 x_0 = h^4\varphi x_0,$$
$$\varphi^6 x_0 = h^4\varphi^2 x_0,\ \text{etc.}$$

und es kommt:

$$x_0' = x_0 + t\varphi x_0 + \frac{t^2}{2!}\varphi^2 x_0 - \frac{h^2 t^3}{3!}\varphi x_0 - \frac{h^2 t^4}{4!}\varphi^4 x_0 + \frac{h^4 t^5}{5!}\varphi x_0 + \frac{h^4 t^6}{6!}\varphi^2 x_0 + \cdots$$
$$= x_0 + \varphi x_0\frac{\sin ht}{h} + \varphi^2 x_0\frac{1 - \cos ht}{h^2}.$$

Durch Einführung der Werte von φx_0 und $\varphi^2 x_0$ erhält man endlich:

$$8)\quad \begin{cases} x_0' = x_0\left(1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\frac{1 - \cos ht}{h^2}\right) + x_1\left(\lambda_0\lambda_1\frac{1 - \cos ht}{h^2} + \lambda_2\frac{\sin th}{h}\right) \\ \qquad\qquad + x_2\left(\lambda_0\lambda_2\frac{1 - \cos ht}{h^2} - \lambda_1\frac{\sin ht}{h}\right), \end{cases}$$

woraus durch cyklische Vertauschung der Indices 0, 1, 2:

$$8)\begin{cases} x_1' = x_0\left(\lambda_0\lambda_1\frac{1-\cos ht}{h^2} - \lambda_1\frac{\sin ht}{h}\right) + x_1\left(1-(\lambda_0^2+\lambda_2^2)\frac{1-\cos ht}{h^2}\right) \\ \qquad + x_2\left(\lambda_1\lambda_2\frac{1-\cos ht}{h^2} + \lambda_0\frac{\sin ht}{h}\right) \\ x_2' = x_2\left(\lambda_0\lambda_2\frac{1-\cos ht}{h^2} + \lambda_1\frac{\sin ht}{h}\right) + x_1\left(\lambda_1\lambda_2\frac{1-\cos ht}{h^2} - \lambda_0\frac{\sin ht}{h}\right) \\ \qquad + x_2\left(1-(\lambda_0^2+\lambda_1^2)\frac{1-\cos ht}{h^2}\right). \end{cases}$$

Die Formeln 8) gehen, sobald man

$$h = 1, \quad t = \varphi,$$
$$x_0 = x, \quad x_1 = y, \quad x_2 = z,$$
$$x_0' = x', \quad x_1' = y', \quad x_2' = z',$$
$$\lambda_0 = -x_1, \quad \lambda_1' = -y_1, \quad \lambda_1 = -z_1$$

in die Eulerschen Gleichungen über, die wir in der Vektorengleichung

$$9) \qquad \varrho' - \varrho_1\cos\vartheta = (\varrho - \varrho_1\cos\vartheta)(\cos\varphi + ki\varrho_1\sin\varphi)^*,$$

worin

$$\varrho = x + iy + kz,$$
$$\varrho' = x' + iy' + kz',$$
$$\varrho_1 = x_1 + iy_1 + kz_1,$$
$$\cos\vartheta = xx_1 + yy_1 + zz_1 = x'x_1 + y'y_1 + z'z_1,$$

zusammengefasst haben. Wenn λ_0, λ_1, λ_2 unveränderliche Werte haben und nur t sich ändern kann, so stellen die Gleichungen 8) eine eingliedrige Gruppe mit vertauschbaren Transformationen dar. Dies lässt sich am einfachsten mittelst obiger Vektorengleichung 9) nachweisen.

Man erkennt leicht, dass der Ausdruck

$$\lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2',$$

sobald man für x_0', x_1', x_2' ihre Werte aus 8) einführt, in

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

übergeht, dass also der letztere Ausdruck eine sogenannte Invariante der Transformation ist.** Dasselbe ist auch der Fall mit

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z,$$

dem entsprechenden Eulerschen Ausdruck. Da nun derselbe gleich $\cos\vartheta$ ist, so ergiebt sich, dass, wenn x_1, y_1, z_1 als konstant angenommen werden, auch $\cos\vartheta$ unverändert bleibt. Lässt man daher auf die Transformation:

$$\varrho' = \varrho_1\cos\vartheta + (\varrho - \varrho_1\cos\vartheta)(\cos\varphi + ki\varrho_1\sin\varphi)$$

eine zweite Transformation:

$$\varrho'' = \varrho_1\cos\vartheta + (\varrho' - \varrho_1\cos\vartheta)(\cos\varphi' + ki\varrho_1\sin\varphi')$$

folgen, so erhält man eine Transformation derselben Art:

---

* l. c. S. 54, 1.

** S. diese Zeitschrift 41. Jahrg. S. 54.

$$\varrho'' = \varrho_1 \cos\vartheta + (\varrho - \varrho_1 \cos\vartheta)[\cos(\varphi + \varphi') + k i \varrho_1 \sin(\varphi + \varphi')];$$

die Gleichungen 8) stellen also eine Gruppe von Transformationen dar und zwar eine eingliedrige, da nur ein wesentlicher Parameter t vorhanden ist, eine sogenannte „eingliedrige Untergruppe".

Da t und t' vertauscht werden können, so folgt, dass zwei Transformationen der Gruppe 8) mit einander vertauscht werden können, sobald λ_0, λ_1, λ_2 ihre Werte nicht ändern. Ist letzteres jedoch nicht der Fall, so lässt sich aus Gleichung 9) die Gruppeneigenschaft der Transformation 8) nicht ablesen. Hierzu eignet sich aber in ganz vorzüglicher Weise die Quaternionenform* der Eulerschen Transformation:

10) $$u' = \frac{1}{q} u q,$$

worin

$$u = kix - ky + iz,$$
$$u' = kix' - ky' + iz',$$
$$q = d + kia - kb + ic.$$

Denn lässt man auf 10) die Transformation:

$$u'' = \frac{1}{q'} u' q'$$

folgen, so kommt:

11) $$u'' = \frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{q} u q q'$$

Setzen wir hierin $qq' = q''$, woraus $\frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q''}$ folgt, so lässt sich 11) auch schreiben:

12) $$u'' = \frac{1}{q''} u q'',$$

welche Gleichung eine Transformation derselben Art wie 10) darstellt. Die Transformationen 10) bilden also eine Gruppe. Zwei aufeinander folgende Transformationen sind aber nicht mit einander vertauschbar, da im allgemeinen $q'q$ nicht gleich qq' ist. Die Parametergleichung $q'' = qq'$ stellt ebenfalls eine Gruppe dar und lehrt** aus den Parametern der beiden zusammensetzenden Transformationen die Parameter der resultierenden Transformation zu finden.

Dieselben Resultate erhält man, wenn man die allgemeinen Theoreme der Lieschen Transformationstheorie*** auf den vorliegenden Fall anwendet. Es genügen zu diesem Zwecke folgende Sätze:

1. Zu jeder $r$gliedrigen Gruppe gehören r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen (S. 67).
2. Enthält eine $r$gliedrige Gruppe der Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_n$ die r infinitesimalen Transformationen:

---

* S. diese Zeitschrift, 41. Jahrg. S. 78.

** l. c. S. 79.

*** S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen.

13) $$\varphi_k f = \sum_1^r {}_i\, \zeta_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},^* \qquad k = 1, 2 \ldots r$$

so bestehen zwischen diesen infinitesimalen Transformationen Beziehungen von der Form:

14) $$\varphi_k(\varphi_\gamma f) - \varphi_\gamma(\varphi_k f) = \sum_1^r {}_s\, c_{k\gamma s}\, \varphi_s f,$$

wodie $c_{k\gamma s}$ numerische Konstante bedeuten (S. 150).

3. Das Bestehen dieser Beziehungen ist notwendig und hinreichend, damit r unabhängige infinitesimale Transformationen eine $r$gliedrige Gruppe erzeugen (S. 158).
4. Die endlichen Transformationen einer $r$gliedrigen Gruppe $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ sind dann und nur dann mit einander vertauschbar, wenn alle Ausdrücke

15) $$(\varphi_i \varphi_k) = \varphi_i(\varphi_k) - \varphi_k(\varphi_i)$$

verschwinden (S. 260).

Um diese Kriterien auf die vorliegende Frage anwenden zu können, hat man zunächst zu untersuchen, wie viel unabhängige Parameter die Transformation 8) besitzt. Es scheint auf den ersten Blick, als ob deren vier vorhanden wären, nämlich λ_0, λ_1, λ_2 und t. Doch bemerkt man leicht, dass t sofort in Wegfall kommt, sobald man:

$$\lambda_0 = \frac{l_0}{t}, \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{t}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2}{t},$$

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = h^2 = \frac{H}{t^2}$$

einführt. Es geht dann beispielsweise die erste Gleichung in 8) in die folgende über:

16) $$\begin{cases} x_0' = x_0\left(1 - (l_1^2 + l_2^2)\dfrac{1-\cos H}{H^2}\right) + x_1\left(l_0 l_1 \dfrac{1-\cos H}{H^2} + l_2 \dfrac{\sin H}{H}\right) \\ \qquad\qquad + x_2\left(l_0 l_2 \dfrac{1-\cos H}{H^2} - l_1 \dfrac{\sin H}{H}\right). \end{cases}$$

Dasselbe Resultat hätte man auch erzielt, wenn man in den Formeln 8) $t = 1$ gesetzt hätte. Die identische Transformation tritt ein für $l_0 = l_1 = l_2 = 0$, wodurch auch $H = 0$ wird. Die Transformation 16) ist eine sogenannte kanonische Form der endlichen Transformation, welche nur wesentliche Parameter enthält. Für die kanonische Form der endlichen Transformation hat Lie die allgemeine Form aufgestellt:

17) $$x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k\, \lambda_k \zeta_{ki} + \sum_{k\gamma}^{1\ldots r} \frac{\lambda_k \lambda_\gamma}{1 \cdot 2} \varphi_k(\zeta_{\gamma i}) + \cdots$$
$$i = 1, 2 \ldots n.$$

---

* $\zeta_{xi}(x_1 - x_n)$ sind gegebene Funktionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Sie ergiebt sich aus der Formel 7):

$$x_i' = x_i + t\varphi x_i + \frac{t^2}{1\cdot 2}\varphi^2 x_i + \cdots$$

dadurch, dass man

$$f = 1,$$

18) $$\varphi f = \lambda_0\varphi_0 f + \lambda_2\varphi_1 f + \cdots + \lambda_r\varphi_r f,$$

$$\varphi_k f = \sum_1^r \zeta_{ki}(x_1\ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad k = 1, 2 \ldots r$$

setzt. In unserem Falle, wo $n = r = 3$ ist, würden wir bei der einmal gewählten Bezeichnung:

18*) $$\varphi f = \lambda_0\varphi_0 f + \lambda_1\varphi_1 f + \lambda_2\varphi_2 f,$$

$$\varphi_0 f = \zeta_{00}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \zeta_{01}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_{02}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \quad x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\varphi_1 f = \zeta_{10}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \zeta_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_{12}\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_2\frac{\partial f}{\partial x_0} + x_0\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\varphi_2 f = \zeta_{20}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \zeta_{21}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_{22}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \quad x_1\frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial f}{\partial x_1},$$

erhalten. Die $\zeta_{\gamma i}$ haben also folgende Werte:

$$\begin{aligned} \zeta_{00} &= 0, & \zeta_{01} &= x_2, & \zeta_{02} &= -x_1,\\ \zeta_{10} &= -x_2, & \zeta_{11} &= 0, & \zeta_{12} &= x_0,\\ \zeta_{20} &= x_1, & \zeta_{21} &= -x_0, & \zeta_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun in 18) die Werte von $\varphi_0 f$, $\varphi_1 f$, $\varphi_2 f$ ein, so kommt:

$$\varphi f = (\lambda_0\zeta_{00} + \lambda_1\zeta_{01} + \lambda_2\zeta_{20})\frac{\partial f}{\partial x_0} + (\lambda_0\zeta_{01} + \lambda_1\zeta_{11} + \lambda_2\zeta_{12})\frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$+ (\lambda_0\zeta_{02} + \lambda_1\zeta_{12} + \lambda_2\zeta_{22})\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

folglich:

$$\varphi x_i = \lambda_0\zeta_{0i} + \lambda_1\zeta_{1i} + \lambda_2\zeta_{2i} = \sum_0^2{}_k \lambda_k\zeta_{ki}.$$

Es ist also wie oben 7*:

$$\varphi x_0 = \sum_0^2{}_k \lambda_k\zeta_{k0} = -\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1.$$

Ferner:

$$\varphi^2 x_i = (\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(\lambda_0\zeta_{0i} + \lambda_1\zeta_{1i} + \lambda_2\zeta_{2i}),$$

worin der erste eingeklammerte Ausdruck als Operations- nicht als Multiplikationszeichen aufzufassen ist. Die Ausführung ergiebt:

$$\begin{aligned} \varphi^2 x_i = \lambda_0^2\varphi_0\zeta_{0i} &+ \lambda_0\lambda_1\varphi_0\zeta_{0i} + \lambda_0\lambda_2\varphi_0\zeta_{2i}\\ &+ \lambda_1\lambda_0\varphi_1\zeta_{0i} + \lambda_1^2\varphi_1\zeta_{1i} + \lambda_1\lambda_2\varphi_2\zeta_{2i}\\ &+ \lambda_2\lambda_0\varphi_2\zeta_{0i} + \lambda_2\lambda_1\varphi_2\zeta_{2i} + \lambda_2^2\varphi_2\zeta_{2i}\\ &= \sum \lambda_k\lambda_\gamma\varphi_k(\zeta_{\gamma i}), \end{aligned}$$

also insbesondere:

$$\varphi^2 x_0 = \sum \lambda_k \lambda_\gamma \varphi_k \zeta_{0\gamma} = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) x_0 + \lambda_0 \lambda_1 x_1 + \lambda_0 \lambda_2 x_2$$

wie oben 7*. Aus der kanonischen Form 16) erhält man die Euler
sche, wenn man:

$$\frac{l_0}{H} = -x_1, \quad \frac{l_1}{H} = -y_1, \quad \frac{l_2}{H} = -z_1, \quad H = \varphi$$

setzt. Um nun zu beweisen, dass die Transformationen 8) eine drei gliedrige Gruppe bilden, haben wir aus den drei infinitesimalen Transformationen:

$$\varphi_0 f = \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\varphi_1 f = -x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\varphi_2 f = \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

die drei Klammerausdrücke $(\varphi_0 \varphi_1)$, $(\varphi_1 \varphi_2)$, $(\varphi_2 \varphi_0)$ zu bilden. Es ist

$$(\varphi_0 \varphi_1) = \varphi_0(\varphi_1) - \varphi_1(\varphi_0),$$

$$\varphi_0(\varphi_1) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0},$$

$$\varphi_1(\varphi_0) = x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

also

$$(\varphi_0 \varphi_1) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \varphi_2.$$

Die drei numerischen Koeffizienten $c_{k\gamma s}$ haben hier die Werte:

$$c_{010} = 0, \quad c_{011} = 0, \quad c_{012} = 1.$$

Ebenso findet man:

$$(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_0,$$

$$c_{120} = 1, \quad c_{121} = 0, \quad c_{122} = 0,$$

$$(\varphi_2 \varphi_0) = \varphi_1,$$

$$c_{200} = 0, \quad c_{201} = 1, \quad c_{202} = 0.$$

Da nun die Ausdrücke $(\varphi_i \varphi_k)$ nach der Formel 14) gebildet sind jedoch nicht verschwinden, so folgt, dass die Gleichungen 8) eine drei gliedrige Gruppe darstellen, deren Transformationen nicht mit einander vertauschbar sind.

II. Um die zweite Integrationsmethode in Anwendung bringen zu können, haben wir gemäss den infinitesimalen Transformationen 5) das simultane System:

$$1) \qquad \frac{dx_0'}{\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2'} = \frac{dx_1'}{\lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0'} = \frac{dx_2'}{\lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1'} = dt$$

zu bilden und mit der Bedingung zu integrieren, dass für $t = 0$

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2$$

werde. Wir suchen zwei Integrale, welche t nicht enthalten. Diese beiden Integrale sind zugleich Lösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$2)\quad (\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2')\frac{\partial f}{\partial x_0'} + (\lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0')\frac{\partial f}{\partial x_1'} + (\lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1')\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0;$$

die zwei gesuchten, von t freien Integrale, zugleich Invarianten der Transformation, sind:

$$3)\qquad x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 = c,$$

$$4)\qquad \lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' = c_1,$$

wo c und c_1' Konstante bedeuten. Aus 3) und 4) ergeben sich durch Differentiation:

$$3^*)\qquad x_0'dx_0' + x_1'dx_1' + x_2'dx_2' = 0,$$

$$4^*)\qquad \lambda_0 dx_0' + \lambda_1 dx_1' + \lambda_2 dx_2' = 0$$

und hieraus

$$dx_0' : dx_1' : dx_2' = \lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2' : \lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0' : \lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1',$$

der Gleichung 1) entsprechend. Setzt man ferner der Reihe nach:

$$5)\qquad x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 = f$$

und

$$6)\qquad \lambda_0 x_0' + \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2^2 = f,$$

so dass im ersten Falle:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0'} = 2x_0', \quad \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 2x_1', \quad \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 2x_2',$$

im zweiten

$$\frac{\partial f}{\partial x_0'} = \lambda_0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1'} = \lambda_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2'} = \lambda_2$$

ist, so verschwindet in beiden Fällen durch Einsetzung der vorstehenden Werte die Gleichung 2) identisch. Aus den Gleichungen 3) und 4) bestimmt man nun zunächst:

$$x_1' = \frac{\lambda_1(c_1 - \lambda_0 x_0')}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \pm \frac{\lambda_2\sqrt{M}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

und

$$x_2' = \frac{\lambda_2(c_1 - \lambda_0 x_0')}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \mp \frac{\lambda_1\sqrt{M}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},$$

wo M den Wert hat:

$$M = (c - x_0'^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - (c_1 - \lambda_0 x_0')^2.$$

Hieraus findet man:

$$7)\quad \lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2'^2 = \sqrt{M} = \sqrt{[c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - c_1^2 - \lambda^2 x_0'^2 + 2c_1\lambda_0 x_0']}$$

wenn

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = h^2$$

gesetzt wird.

Zufolge der Gleichung 2):

$$\frac{dx_0'}{\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2} = dt$$

hat man nun:

$$\frac{dx_0'}{\sqrt{[c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - c_1^2 - h^2 x_1'^2 + 2c_1\lambda_1 x_0']}} = dt$$

mit der Bedingung zu integrieren, dass für $t = 0$, $x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$ werde. Setzen wir zur Abkürzung:

$$(h^2 c - c_1^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = m^2,$$

so geht sie in die einfachere:

8) $$\frac{h\,dx_0'}{\sqrt{m^2 - (h^2 x_0' - c_1\lambda_0)^2}} = dt$$

über, woraus man durch Quadratur erhält:

9) $$\frac{1}{h} \arcsin \frac{h^2 x_0' - c_1\lambda_0}{m} = t + c',$$

wo c' eine weitere Konstante bedeutet. Aus Gleichung 9) folgt weite

10) $$h^2 x_0' - c_1\lambda_0 = m \sin h(t + c')$$

und daher:

11) $$\sqrt{m^2 - (h^2 x_0' - c_1\lambda_0)^2} = m \cos h(t + c').$$

Nun ist aber wegen 2) und 8):

$$\frac{h}{\sqrt{m^2 - (h^2 x_0' - c\lambda_0)^2}} = \frac{1}{\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2'},$$

also

12) $$m \cos h(t + c') = h(\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2').$$

Für $t = 0$ findet sich aus 10) und 12):

13) $$\begin{cases} m \sin h c' = h^2 x_0 - c_1\lambda_0, \\ m \cos h c' = h(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2). \end{cases}$$

Die Entwickelung des Ausdruckes $\sin h(t + c')$ ergiebt:

$$h^2 x_0' - c_1\lambda_0 = m \sin ht \cos hc' + m \cos ht \sin hc',$$

folglich mit Berücksichtigung von 13):

$$h^2 x_0' - c_1\lambda_0 = h(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\sin ht + (h^2 x_0 - c_1\lambda_0)\cos ht,$$

woraus:

$$h^2 x_0' = h^2 x_0 \cos ht + c_1\lambda_0(1 - \cos ht) + h(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\sin ht$$

folgt. Setzt man hierin für c_1 seinen Wert aus 4), so erhält man:

$$\begin{aligned} h^2 x_0' &= h^2 x_0 \cos ht + \lambda_0(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(1 - \cos ht) + h(\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2)\sin \\ &= x_0[\lambda_0^2(1 - \cos ht) + h^2 \cos ht] + x_1[\lambda_0\lambda_1(1 - \cos ht) + h\lambda_2 \sin ht] \\ &\quad + x_2[\lambda_0\lambda_2(1 - \cos ht) - h\lambda_1 \sin ht], \end{aligned}$$

woraus sich ohne Mühe die erste Gleichung in 8):

$$\begin{aligned} x_0' = x_0\left(1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\frac{1 - \cos ht}{h^2}\right) + x_1\left(\lambda_0\lambda_1 \frac{1 - \cos ht}{h^2} + \lambda_2 \frac{\sin ht}{h}\right. \\ + x_2\left(\lambda_0\lambda_2 \frac{1 - \cos ht}{h^2} - \lambda_1 \frac{\sin ht}{h}\right. \end{aligned}$$

wieder ableiten lässt.

III. Um das System der Differentialgleichungen:

$$1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_0'}{dt} = \lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2', \\ \dfrac{dx_1'}{dt} = \lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0', \\ \dfrac{dx_2'}{dt} = \lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1' \end{cases}$$

nach der d'Alembertschen Methode zu integrieren, hat man zu setzen:

$$2)\qquad \alpha_0 x_0' + \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' = u',$$

$$3)\qquad \frac{du'}{dt} = \varrho u'$$

worin $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \varrho$ noch näher zu bestimmende Konstante sind. Integriert man die Gleichung 2) und bestimmt die Integrationskonstante so, dass für $t = 0,\quad u' = u_0' = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ wird, so erhält man:

$$4)\qquad u' = u'_0 e^{\varrho t} = (\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) e^{\varrho t}.$$

Aus 2) und 3) ergiebt sich:

$$5)\qquad \alpha_0 \frac{dx_0'}{dt} + \alpha_1 \frac{dx_1'}{dt} + \alpha_2 \frac{dx'_2}{dt} = \varrho(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2),$$

welche durch Einsetzung der Werte von $\frac{dx_0'}{dt}, \frac{dx_1'}{dt}, \frac{dx_2'}{dt}$ aus 1) in

$$\begin{cases} \alpha_0(\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2') + \alpha_1(\lambda_0 x_2' - \lambda_2 x_0') + \alpha_2(\lambda_1 x_0' - \lambda_0 x_1') \\ \qquad = \varrho(\alpha_0 x_0' + \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2') \end{cases}$$

übergeht. Wegen der Unabhängigkeit der Variablen x' zerfällt diese Gleichung in die drei anderen:

$$6)\qquad \begin{cases} \varrho\ \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 - \lambda_1 \alpha_2 = 0, \\ -\lambda_2 \alpha_0 + \varrho\ \alpha_1 + \lambda_0 \alpha_2 = 0, \\ \lambda_1 \alpha_0 - \lambda_0 \alpha_1 + \varrho\ \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

welche nur dann nebeneinander bestehen können, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varrho & \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \varrho & \lambda_0 \\ \lambda_1 & -\lambda_0 & \varrho \end{vmatrix} = \varrho^3 + \varrho h^2, \quad h^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

gleich Null ist. Die Gleichung

$$\varrho^3 + \varrho h^2 = 0$$

hat drei Wurzeln, $\varrho_1 = 0,\ \varrho_2 = ih,\ \varrho_2 = -ih$ und es ist:

$$8)\qquad \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 = \varrho\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2 : \lambda_1\lambda_2 - \varrho\lambda_0 : \varrho^2 + \lambda_2^2.$$

Nun ist nach 4):

$$9)\qquad u' = (\alpha_0 x_0' + \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2') = (\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) e^{\varrho t}.$$

Setzt man hierin für x_0', x_1', x_2' ihre Werte:

$$x_0' = a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2,$$
$$x_1' = a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2,$$
$$x_2' = a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

und berücksichtigt, dass die x von einander unabhängig sind, so e[rhält] man:

$$10)\quad \begin{cases} \alpha_0 a_{00} + \alpha_1 a_{10} + \alpha_2 a_{20} = \alpha_0 e^{\varrho t}, \\ \alpha_0 a_{01} + \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} = \alpha_1 e^{\varrho t}, \\ \alpha_0 a_{02} + \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} = \alpha_2 e^{\varrho t}. \end{cases}$$

Da nun ϱ drei verschiedene Werte hat, so haben wir im ganz[en] neun Gleichungen zur Bestimmung der 9 Koeffizienten a_{ik}. Man fin[det] z. B. a_{00}, a_{10}, a_{20} aus der ersten Gleichung in 10) mit Beachtung d[er] Gleichungen 4), wodurch sie in:

$$(\varrho\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2)(a_{00} - e^{\varrho t}) + (\lambda_1\lambda_2 - \varrho\lambda_0)a_{10} + (\varrho^2 + \lambda_2^2)a_{20} = 0$$

übergeht, wenn man für ϱ nacheinander 0, ih, $-ih$ einsetzt:

$$\lambda_0(a_{00} - 1) + \lambda_1 a_{10} + \lambda_2 a_{20} = 0,$$
$$(ih\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2)(a_{00} - e^{iht}) + (\lambda_1\lambda_2 + ih\lambda_0)a_{10} + (h^2 + \lambda_2^2)a_{20} = 0,$$
$$(-ih\lambda_1 + \lambda_0\lambda_2)(a_{00} - e^{-iht}) + (\lambda_1\lambda_2 + ih\lambda_0)a_{10} + (-h^2 + \lambda_2^2)a_{20} =$$

Nach Beseitigung der imaginären Ausdrücke findet man die d[rei] reellen Gleichungen:

$$\lambda_0 a_{00} + \lambda_1 a_{10} + \lambda_2 a_{20} = \lambda_0,$$
$$\lambda_0\lambda_2 a_{00} + \lambda_1\lambda_2 a_{10} - (h^2 - \lambda_2^2)a_{20} = \lambda_0\lambda_2 \cos ht - h\lambda_1 \sin ht,$$
$$h\lambda_1 a_{00} - h\lambda_0 a_{10} = h\lambda_1 \cos ht + \lambda_0\lambda_2 \sin ht.$$

Die Auflösung dieser drei Gleichungen ergiebt:

$$a_{00} = \cos ht + \lambda_0^2 \frac{1 - \cos ht}{h^2},$$
$$a_{10} = \lambda_0\lambda_1 \frac{1 - \cos ht}{h^2} - \lambda_2 \frac{\sin ht}{h},$$
$$a_{20} = \lambda_0\lambda_2 \frac{1 - \cos ht}{h^2} + \lambda_1 \frac{\sin ht}{h}$$

übereinstimmend mit den in I. und II. gefundenen Resultaten. A[uf] dieselbe Weise findet man aus der zweiten und dritten Gleichung [in] 10 die richtigen Werte von a_{01}, a_{11}, a_{21}; a_{02}, a_{12}, a_{22}.

(Fortsetzung folgt.)

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Kreiselbewegungen der rotierenden Langgeschosse während ihres Fluges.

Von

Prof. Dr. Carl Cranz

in Stuttgart.

A. Einleitung.

Die von Magnus* auf Grund der Kreiseltheorie aufgestellte und durch zahlreiche Versuche unterstützte Erklärung für die nicht unbeträchtliche regelmässige Rechts- bezw. Linksabweichung von Langgeschossen, die aus Gewehren oder Geschützen mit rechts- bezw. linksgewundenen Zügen verfeuert werden, ist nahezu** allgemein angenommen. Darüber jedoch, nach welchen Gesetzen die mitunter mit dem blossen Auge wahrzunehmenden Kreiselbewegungen der Geschossaxe vor sich gehen, welcher Art diese Bewegungen sind, welche Wirkungen sie zur Folge haben, herrscht eine grosse Meinungsverschiedenheit.

a) Magnus selbst, sowie später Kummer*** — Letzterer aus Anlass seiner grundlegenden Untersuchungen über die Komponenten des Luftwiderstands und die Lage des Angriffspunkts auf der Geschoss-

* Magnus, „Über die Abweichung der Geschosse". Abh. d. Berl. Akad. 1852 u. Pogg. Annal. LXXXVIII, 1; auch bes. ersch., Verlag von Dümmler, Berlin 1860. Die Erklärung von Magnus ist kurz die folgende: Da das Langgeschoss rasch rotiert und die Resultante der Luftwiderstände bei der üblichen Form der Geschosse nicht im Schwerpunkt, sondern vor demselben auf der Axe angreift, so ist Anlass zu einer Präzessionsbewegung der Axe um den Schwerpunkt gegeben; die Axe beschreibt einen Kegel um die Richtung des Luftwiderstandes herum; also hebt sich anfangs die Geschossspitze und wendet sich nach rechts. Folglich wirkt der Luftwiderstand mehr gegen die linke Seite des Geschosses, wie gegen ein schiefgehaltenes Brett oder ein Segel und drückt das Geschoss aus der anfänglichen Schussebene nach rechts heraus.

** Betreffs abweichender Meinungsäusserungen vergl: a) Hilken und Zwenger, „Die Erziehung der Einjährig-Freiwilligen". Verlag von Liebel 1894, S. 79, Nr. 3. — b) A. Dähne, „Neue Theorie der Flugbahnen von Langgeschossen". Berlin 1888 bei Eisenschmidt. — c) J. Altmann, österr. Artill.-Lieutenant, „Erklärung und Berechnung der Seitenabweichung rotierender Geschosse". Wien 1897 bei Seidel. Darüber siehe weiter unten.

*** Abh. d. Berl. Akad. Mai 1875; Nachtrag 1876.

axe —, sprechen die Vermutung aus, selbst bei grossen Flugzeit gehe die Präzessionsbewegung der Geschossaxe so langsam vor si dass höchstens eine halbe Pendelung möglich sei, dass also die G schossspitze nur Zeit habe, sich zu heben, rechts zu wenden und et noch zu senken, bevor das Geschoss am Boden aufschlägt. Ei grosse Zahl militärischer Schriftsteller äusserten sich in ähnlicher Wei In einer neueren und besonders viel benützten „Waffenlehre"* fin sich die Bemerkung: „... die Geschwindigkeit dieser kegelförmig Pendelung ist so gering, dass die Geschossaxe auch bei d grössten Schussweiten bezw. Flugzeiten keine volle U drehung, sondern in der Regel nur eine Schwingung v weniger als 90 bis höchstens 180 Grad macht. Die Gescho spitze bleibt stets auf der rechten Seite der Schussebene u durchläuft bei grossen Schussweiten oder kleinen Erhöhungen eine o mehrere Kurven cykloidischer Art um die Berührende der Flugba bei kleinen Schussweiten oder grossen Erhöhungen dagegen nur ei Bruchteil einer Cykloide. (Anmerkung: „Die Vorgänge, Ursachen u Wirkungen der kegelförmigen Geschosspendelung sind so verwick und überdies grossenteils noch so wenig aufgeklärt, dass hier n diese allgemeine Andeutung derselben gegeben werden kann. ist zu hoffen, dass die photographischen Augenblicks-Aufnahm fliegender Geschosse und der Luftbewegungen in ihrer nächsten U gebung — Mach, Salcher, Boys —, sowie die Herstellung v Lichtbildern in der inneren Höhlung fliegender Geschosse — Neesen zur Klärung der noch ungelösten Fragen wesentlich beitragen w den.)..." Diese Angaben sind in Übereinstimmung mit den R sultaten analytischer Berechnungen, wie sie u. a. von zwei hervorrag den Ballistikern, Oberst Ritter von Wuich** und Hauptma Haupt*** ausgeführt wurden. von Wuich erhält als Resultat: „ Rechts-(Links-)Rotation und Luftwiderstandsmittelpunkt vor (hint dem Schwerpunkt, bezw. Rechts-(Links-)Rotation und Luftwiderstan mittelpunkt hinter (vor) dem Schwerpunkt befindet sich die Gescho spitze stets rechts (bezw. links) von der durch die Bahntangente legten Vertikalebene."

Stellt nämlich (Fig. 1) S den Schwerpunkt des Geschosses u die Ebene durch S und $T_0 T_1 T_2 \ldots$ die Vertikalebene dar, welche festgedachtem Schwerpunkt S durch die aufeinander folgenden Flugba

---

* R. Wille, General z. D., „Waffenlehre", Berlin 1896 bei Eisenschmidt, S.

** N. v. Wuich, „Lehrbuch der äusseren Ballistik", Wien 1886 bei Seid S. 360 flg.; bes. vergl. S. 413.

*** P. Haupt, Hauptmann à l. s. des Generalstabs d. deutschen Armee, „Mat matische Theorie der Flugbahnen gezogener Geschosse", Berlin 1876, Vossische Bu handlung, vergl. besonders S. 97. Über die weitere Litteratur des Gegenstan vergl. Cranz, „Kompendium der theoretischen äusseren Ballistik", Leipzig 1 bei B. G. Teubner, S. 456 bis 458.

Tangenten ST_0, ST_1... gelegt ist, so sind die aufeinander folgenden Lagen der Geschosslängsaxe durch ST_0, SA_1, SA_2, SA_3... repräsentiert, so dass die Geschossspitze die Raumkurve $T_0 A_1 A_2 A_3$... beschreibt; oder, was dasselbe ist, denkt man sich (Fig. 2) eine Zeichnungsebene senkrecht zur Tangente ST der Flugbahn gelegt und die Bahn der Geschossspitze auf diese im Raum veränderliche Zeichnungsebene projiziert, so beschreibt bei Rechtsrotation die Spitze (für einen Beobachter, der dem Geschoss folgen würde) die Kurve 1234...; der Beobachter würde somit die Geschossspitze in Spirallinien sich immer weiter von der Vertikalebene durch die Tangente entfernen sehen.

Zu einem etwas andern Ergebnis wird Haupt geführt, der dasselbe wie folgt zusammenfasst: „Die Geschossspitze, welche zuerst

Fig 1.

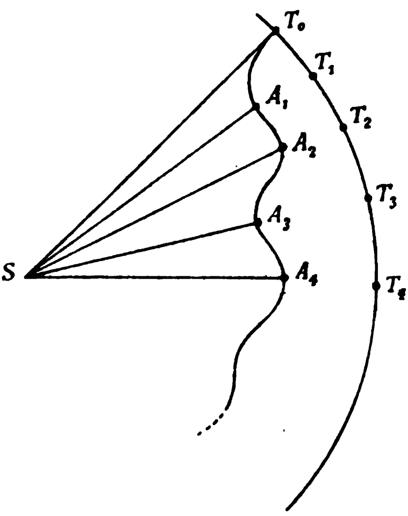
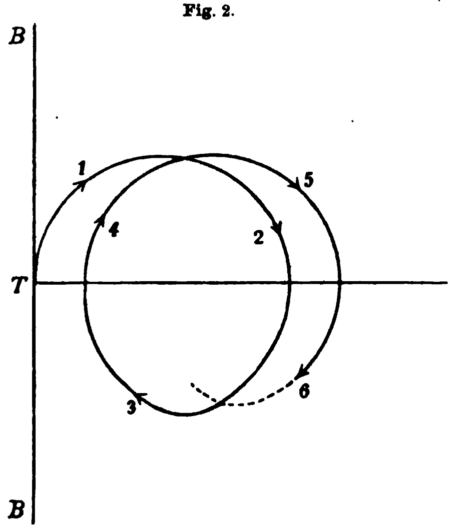


Fig. 2.

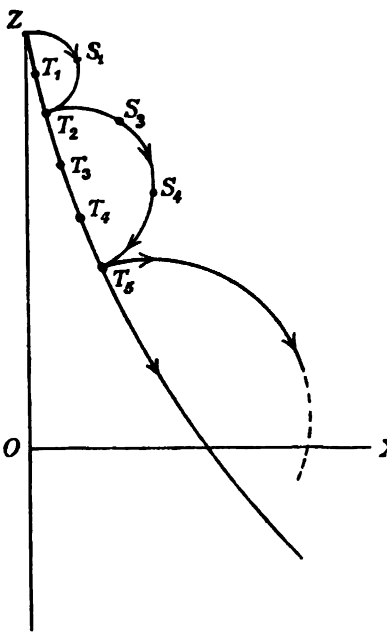


in der Tangente der Flugbahn lag, weicht, nachdem letztere angefangen hat sich zu senken, nach rechts aus und beschreibt, immer rechts bleibend, eine oder mehrere Kurven von cykloidischer Form um dieselbe, bei geringen Entfernungen aber oder hohen Elevationen der Mörser nur einen Bruchteil einer solchen Kurve. Am Ende einer jeden Cykloide treffen Geschossspitze und Tangente der Flugbahn wieder zusammen. Je grösser die Geschwindigkeit der Hauptaxe ist, desto schneller durchläuft sie natürlich diese Cykloiden und desto geringer ist ihr mittlerer Ausschlag. Abgesehen von dieser Bewegung in grossen cykloidenförmigen Bogen vibriert die Geschossspitze in fast unendlich kleinen Cykloiden auf und nieder.“ Durch die Figur 3, welche dem Hauptschen Werke mit geringen Abänderungen entnommen ist, wird das Ergebnis weiterhin erläutert; XOZ ist eine vertikale Zeichnungsebene, senkrecht zu der Vertikalebene durch die Anfangstangente der

Flugbahn gelegt; OX nach rechts, OZ nach oben gerichtet; der Beobachter ist hinter dem Geschütz zu denken; von der Vorwärtsbewegung des Geschossschwerpunkts ist abstrahiert. Die Tangente neigt sich mehr und mehr, zugleich weicht der Geschossschwerpunkt nach der rechten Seite ab; beides ist durch die Kurve $ZT_1T_2T_3\ldots$ angedeutet; die Linie $ZS_1T_2S_3S_4T_5$ etc. stellt dann die Bahn der Geschossspitze dar. In den Punkten T_2 und T_5 etc. fallen Tangente und Geschossaxe zusammen.

Sind die vorstehend geschilderten Anschauungen richtig, findet die Geschossspitze niemals Zeit, einen vollen Umlauf zu vollenden (Magnus, Kummer) oder bleibt die Geschossspitze überhaupt stets auf der rechten Seite der Flugbahnvertikalebene (Mayevski, Haupt, v. Wuich), so versteht man leicht die Thatsache, dass später nicht wieder Linksabweichung eintritt.

Fig. 8.



Berechnet man aber anderseits mit dem bekannten Ausdruck der Kreiseltheorie, der in anderer Form auch von jenen Ballistikern gegeben wird, die Periode einer Geschosspendelung, so findet man, dass in vielen Fällen, z. B. denen der schweren und der leichten Feldkanone, auf dieselbe Flugbahn zahlreiche Pendelungen kommen müssen.

Auch mit den vorhandenen Beobachtungen scheinen jene Anschauungen keineswegs übereinzustimmen:

b) Von veröffentlichten Beobachtungen über Geschosspendelungen liegen jetzt mehrere vor.

Schon aus dem Jahre 1861 führt Rutzky* folgendes an: „... Bei den Schiessversuchen hat es sich ferner noch gezeigt, dass die als Brandgeschosse hergerichteten und der Form nach den andern ganz gleichen Spitzgeschosse mit der Spitze während des Flugs eine desto grössere Spirale beschrieben, je näher sie dem Ende der Flugbahn kommen, was durch den Feuerstrahl, welcher aus den gegen die Spitze befindlichen Öffnungen hervorbrach, und durch den dadurch verursachten Rauch deutlich zu sehen war“.

* Rutzky, „Bewegung und Abweichung der Spitzgeschosse“, 1861, S. 10. Eine ähnliche Bemerkung siehe z. B. bei Hentsch, Ballistik der Handfeuerwaffen, 1873, S. 25.

An der Granate des 21 cm-Mörsers sind die vollen Pendelungen sicherlich öfters mit dem blossen oder dem bewaffneten Auge gesehen worden.

Die einzige exakte Bestimmung der konischen Geschosspendelung, die bisher mit Erfolg durchgeführt worden ist — durch Professor Dr. Neesen* an der Artillerieschule in Berlin-Charlottenburg —, deutet ebenfalls auf mehrere volle konische Pendelungen während desselben Flugs hin. Danach besteht der Weg der Geschossspitze bezüglich des Schwerpunktes im allgemeinen darin, dass anfangs die Spitze sich hebt, dann rechts und abwärts wendet, später wieder sich links wendet und hebt etc. Es wäre nur zu wünschen, dass diese Versuche fortgesetzt und die Kaliber, Geschosslängen, Anfangsgeschwindigkeiten variiert würden.

In neuester Zeit hat Hauptmann Heydenreich** ein umfangreiches und wertvolles Beobachtungsmaterial über den Einfluss der Geschossrotation (ohne mathematische Theorie) gegeben. Speziell über die Geschosspendelungen sagt er hierbei u. a. folgendes:

S. 95: „Die Spitze des Geschosses weicht zunächst nach derjenigen Seite ab, nach welcher die Drehung um die Längsaxe erfolgt, also bei Rechtsdrall nach rechts, bei Linksdrall nach links. In der beständigen Fortsetzung dieses Vorgangs beschreibt sie schliesslich eine schraubenförmige Linie um die Flugbahn des Schwerpunkts herum. Diese schraubenförmigen Drehungen, welche noch von einer Reihe von Nebenschwingungen der Geschossaxe begleitet sind, nennt man konische Pendelungen des Geschosses. Nach Schluss einer jeden Pendelung kehrt dabei die Geschossspitze in eine Lage oberhalb der Flugrichtung des Schwerpunkts zurück. Diese Pendelungen beginnen in der Regel klein und rasch und werden schliesslich grösser und langsamer. Unter sonst gleichen Verhältnissen sind sie um so stärker, je grösser die Geschwindigkeit des Geschosses und die Entfernung des Schwerpunkts von der Angriffsrichtung des vereinigten Luftwiderstandes ist; um so kleiner, je grösser der Drall des Geschützes ist ...; grössere Pendelungen ergeben geringere Trefffähigkeit.“ S. 98 (Anmerkung) wird ein Versuch mit 4 bis 5 Kaliber langen Geschossen z. B. aus einer Kanone mit 500 m Anfangsgeschwindigkeit beschrieben: „...Die Pendelungen waren überaus stark und schnell, etwa 4 bis 5 in der Sekunde; das

* Neesen, „Photographische Aufzeichnung und Theorie der Geschosspendelung“, Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Offiziere 1889, S. 68; 1892, S. 476 und 1894. Diese höchst sinnreiche Methode besteht darin, dass in dem Geschoss selbst eine photographische Platte angebracht ist, auf welcher durch eine Öffnung im Geschossmantel hindurch das Sonnenlicht zeichnet.

** Heydenreich, Hauptmann à l. s. d. kgl. sächs. 1. Feld-Art. Reg. 12, kommand. als Mitglied zur Artillerie-Prüfungskommission „Die Lehre vom Schuss und Schusstafeln“, auf dienstliche Veranlassung bearbeitet. I. und II. Berlin 1898. Verlag von E. S. Mittler & Sohn.

Geschoss glich von hinten gesehen einer rasch sich drehenden Scheib von wechselndem Durchmesser. Ein Geschoss überschlug sich soga etwa 1000 m vor der Mündung..." S. 104 und 105 wird sodann be schrieben, wie „die" Pendelungen das Geschoss aus der Schusseben seitlich ablenken. „Die Ablenkungswerte nehmen im allgemeine mit einer Verlängerung des Geschosses ab und mit einer Verstärkun des Dralls zu."

Hier scheinen ebenfalls Widersprüche vorzuliegen:

Die Pendelungen sollen um die Flugbahn herum erfolgen, gehe dabei unter Umständen sehr schnell vor sich, so dass das Geschos wie eine Scheibe erscheinen kann. Wie sind dann Seitenabweichunge des ganzen Geschosses etwa nur nach rechts möglich?

Ferner, die Pendelungen sind „um so stärker, je grösser die Ge schwindigkeit; um so kleiner, je grösser der Drall ist"; anderseit sind die Abweichungen „um so grösser, je stärker der Drall" (un je grösser die Geschwindigkeit) ist. Man müsste also schliessen: j kleiner die Pendelungen sind, um so grösser sind die Abweichungen Also je kleiner die Ursache, um so grösser die Wirkung? Wi können dann die Pendelungen die Abweichungen verursachen?

Mit den folgenden Versuchen und Berechnungen hoffe ich dies Widersprüche als nur scheinbar entwirrt und gezeigt zu haben, das und wie die erwähnten verschiedenartigen Anschauunge unter sich und mit der Theorie in Einklang gebracht werde können.

Die Lösung der Widersprüche liegt darin, dass bisher mannig fach verschiedene Wirkungen derselben Ursache zugeschriebe wurden.*

Man hat zweierlei Arten von Geschosspendelungen z unterscheiden, welche beide ganz verschiedenen Gesetzen unte worfen sind und zwei verschiedene Gruppen von Wirkunge zur Folge haben; die Präzessionsbewegungen und die Nutation bewegungen.

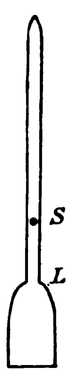
B. Versuche.

1. Zunächst lag mir daran, die Geschosspendelungen, welche b Artilleriegeschossen nur selten und nur unter bestimmten Umstände genau, bei Infanteriegeschossen wohl niemals beobachtet wurden, fü das blosse Auge wahrnehmbar zu machen. Ich versuchte dies vo

* z. B. die (zweifellos richtigen) Heydenreichschen Beobachtungsergebnis sind folgendermassen richtig zu deuten: Die auf S. 95 erwähnten Pendelunge welche die Trefffähigkeit beeinflussen, sind nicht identisch mit den S. 104 e wähnten, welche die Seitenabweichung bewirken. Die von S. 95 können, we man will, als „Nebenschwingungen" von denjenigen S. 104 angesehen werde schwerlich aber kommen zu denen S. 95 weitere Nebenschwingungen hinzu. Di jenigen von S. 95 erfolgen meistens nicht um die Tangente herum, vielmehr di jenigen von S. 104.

erst durch Verlängerung des 11 mm Geschosses, welches dem früheren deutschen Infanteriegewehr M./71 zugehörte; es lassen sich ja bekanntlich bei günstiger Abend- oder Morgenbeleuchtung selbst die Infanteriegeschosse in ihrem ganzen Flug mitunter mit dem blossen Auge verfolgen. Da bei dem normalen Geschoss die Pendelungen mutmasslich sehr schnell vor sich gehen, so suchte ich die Pendelungen zu verlangsamen; es wurden kräftige Messingstäbe von 6 mm Kaliber und von 3, 5, 7 bis 21 cm Länge in die Bleigeschosse eingelötet (Fig. 4) und diese verlängerten Geschosse verfeuert. Trotzdem, dass drei Beobachter* von verschiedenen Standpunkten aus aufmerksam den Flug der Geschosse verfolgten, war nur wenig von denselben zu sehen; die Gesichtswinkel wurden in zu kurzer Zeit ungünstig klein. Dagegen vermochte ich von einer Verdeckung aus, über welche die Geschosse wegflogen, sehr deutlich die Pendelungen mit dem Gehör wahrzunehmen; dieselben hörten sich etwa wie scharfe kräftige Flügelschläge eines vorüberfliegenden Vogels an. Je länger die Geschosse gewählt wurden, um so langsamer erfolgten die regelmässigen Stösse, deren Anzahl pro Sekunde mit der Uhr geschätzt werden konnte und besser mit der aus der Theorie sich ergebenden Formel für die Periode T_1 der Nutationsbewegungen, als mit derjenigen für die Periode T der Präzessionsbewegungen übereinstimmte. (Obgleich die Züge des Infanteriegewehres M./71 rechtsgewunden sind, zeigte sich dabei starke Linksabweichung; es lässt sich dieser Umstand leicht damit erklären, dass der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten wegen der besonderen Form dieser verlängerten Geschosse hinter dem Schwerpunkt S in L liegen musste.)

Fig. 4.



War nun bei diesen Pendelungen, die gehört wurden, der Sinn linksläufig, so handelte es sich der Kreiseltheorie gemäss um Präzessionsbewegungen, also um diejenigen konischen Pendelungen, welche den bekannten langsamen Bewegungen des Kreisels, sowie dem sehr langsamen Umlauf der Erdaxe um die Normale zur Ekliptik in rund 26000 Jahren entsprechen; war dagegen der Sinn rechtsläufig, so waren es ohne Zweifel Nutationsbewegungen; und da bezüglich aller Geschosspendelungen, über deren Beobachtung ich Zahlenangaben erhalten konnte, insbesondere auch bezüglich der Neesenschen Versuche die Rechnung zeigte, dass die beobachtete Anzahl von Pendelungen pro Sekunde weit besser der Formel für T_1 als der für T entspricht, so lag die Vermutung nahe, dass dies bei kleinen Geschwindigkeiten allgemein zutreffe, dass diejenigen Geschosspendelungen, welche sich der Beobachtung durch das Auge zunächst darbieten und

* Den Herren Prof. Lachenmaier und Dr. Vogt bin ich für ihre Mithilfe bei diesen Versuchen (Nr. 1 u. 2) zu Dank verpflichtet.

welche auch Herr Neesen beobachtet hat, meist Nutations bewegungen, nicht Präzessionsbewegungen sind. Es war deshal von Wert, die Pendelungen wirklich zu sehen.

2. Es wurde bei Nacht geschossen; die erwähnten verlängerte Geschosse des Infanteriegewehrs M./71 waren an ihrem vorderen Enc mit einem Feuerwerkskörper (Schwärmer), oder aber — dem Ra schlag eines Bekannten zufolge — mit einem Drahtnetzchen versehe das ein Stück Phosphor enthielt; die Schwärmer wurden entzünd und sodann die Geschosse abgefeuert, der Phosphor entzündete sic beim Flug von selbst. Die Pendelungen traten zwar deutlich hervo und es sind beide Methoden für die Gewinnung erster allgemein Anhaltspunkte bei der Beurteilung von Geschosspendelungen oder fü die Demonstration einer Flugbahn zu empfehlen; allein, da nur d Geschossspitze sichtbar war, so lag keine Gewissheit darüber vor, o und wann das Geschoss sich nach hinten überschlagen habe. Au diesem Grunde kehrte ich zur Beobachtung bei Tage zurück.

3. Auf Grund der Formel für T_1 konstruierte ich ein kleines ge zogenes Mörsermodell der Art, dass bei einer Anfangsgeschwindig keit v_0 der Translationsbewegung von 20 bis 30 m/sec 1 bis 2 Pende ungen pro Sek. wahrnehmbar sein mussten, falls sich überhaupt Pende ungen zeigten. Länge des Mörsers 30 cm; äusserer Durchmesser 5 cn die Drall-Länge musste sehr klein gewählt werden — 7 cm — un genügende Rotationsgeschwindigkeit r um die Längsaxe des Geschosse zu erzielen, dagegen die Geschosslänge sehr bedeutend, damit das Ve hältnis $A:C$ genügend gross war (C Trägheitsmoment um die Läng axe, A dasselbe um eine Senkrechte zur Axe durch den Schwerpunkt das Geschoss, das stets wieder von neuem benutzt wurde, bestand i seinem hinteren Teil aus der zum Muttergewinde des Laufs gehörige Schraubenspindel und war vorn „ogival" zugespitzt; es wurden ve schiedene Geschosslängen verwendet, bis zu 17 Kalibern (Näheres sieh Beispiele w. u.). Die Ladung bestand aus Schiessbaumwolle,

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \cdots \text{ bis } 2 \text{ g.}$$

Die Züge waren links gewunden.

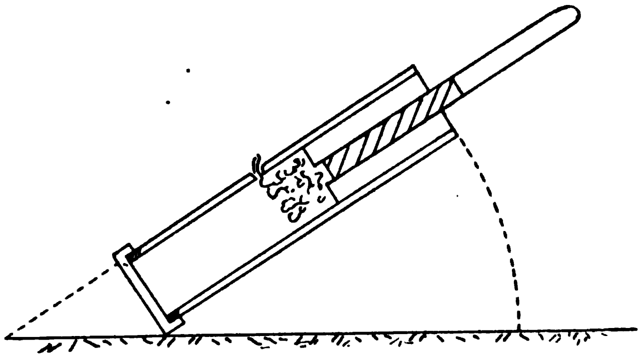
Schon die ersten Schüsse ergaben, dass die Geschosspendelunge wegen der kleinen Translationsgeschwindigkeit aufs deutlichste mi dem Auge wahrnehmbar und zu verfolgen und ihre Zahl pro Se mit Hilfe eines mit Hemmungsvorrichtung versehenen Chronometer der noch $\frac{1}{5}$ Sek. anzeigte, leicht annähernd zu bestimmen war; die Ze einer vollen Pendelung änderte sich nämlich im Verlauf derselben Flug bahn nicht wahrnehmbar, wegen der kleinen Schussweite von höchster 50 m und der kleinen Anfangsgeschwindigkeit.

Mit diesem Mörsermodell wurden ca. 100 Schiessversuche au geführt und Beobachtungen angestellt, die zum Teil im Folgenden au

geführt sind; jede einzelne Nummer ist ein Beweis dafür, dass diejenigen Geschosspendelungen, welche bei grossem Drallwinkel und kleiner Anfangsgeschwindigkeit zunächst in die Erscheinung treten, nichts anderes sind als die Nutationen.

Da naturgemäss ohne weitere Hilfsmittel an dem fliegenden Geschoss keine exakten absoluten Messungen ausgeführt werden können,

Fig. 5.



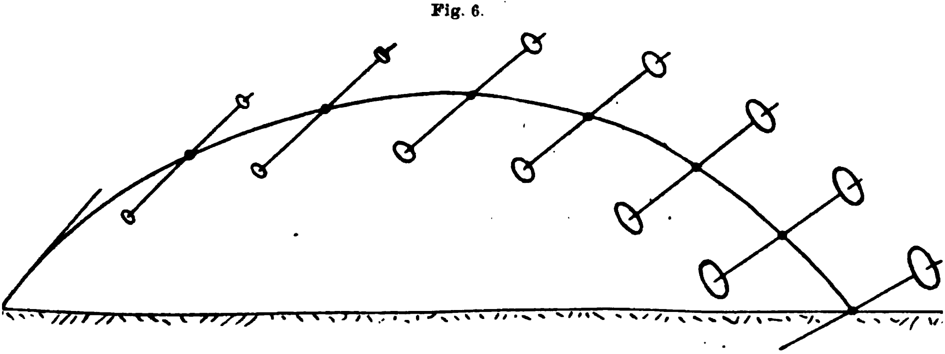
so stellte ich, stets paarweise, Vergleichsversuche an auf Grund der Formeln (s. w. u.) für die Periode T und Amplitude A der Präzessionsbewegungen:

$$\text{I)}\quad T = \frac{2\pi \cdot Cr}{M}; \qquad \text{II)}\quad A = \sqrt{f^2 + (\dot{\vartheta}_0 - \omega)^2},$$

wo $f = \frac{Cr}{M} \cdot \frac{g}{v_x}$ und für die Periode T_1 und Amplitude A_1 der Nutationsbewegungen:

$$\text{III)}\quad T_1 = \frac{2\pi \cdot A}{\sqrt{C^2 r^2 - 4AM}}; \quad \text{IV)}\quad A_1 = \frac{2 \cdot s_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}};$$

Fig. 6.



Hier ist M das Luftwiderstandsmoment bezüglich des Schwerpunkts $= W \cdot h_1$, wo h_1 den Abstand zwischen Schwerpunkt und Angriffspunkt L der Luftwiderstandsresultanten auf der Geschossaxe darstellt, v_x die horizontale Geschwindigkeit des Schwerpunkts, s_0 ein seitlicher

Anfangsstoss, der auf die Axe an der Mündung ausgeübt wird, ϑ_0 —
der Winkel zwischen der Anfangsrichtung der Flugbahntangente ur
deren Richtung zur Zeit t.

Es wurden verschiedene Versuchsanordnungen getroffen, bei dene
die Grössen A, C, r etc. verändert wurden; solche Versuchspaare wurd
bevorzugt, welche bei derselben Änderung einer Grösse entgegengesetz
Änderung von T und T_1 bezw. von A und A_1 geben und damit ei
Entscheidung über die Frage „Nutation oder Präzession?" herbeiführ
mussten.

a) Schüsse unter Abgangswinkel 45°; Anfangsgeschwindigke
$v_0 = 21$ m. Die Geschossbahn wurde sowohl von hinten als von d
Seite betrachtet. Es zeigte sich, dass die Geschossaxe durchschnittli
sich selbst parallel weiterging, nur gegen das Ende der Flugbahn si
die Axe mehr nach dem Horizont zuneigte. Hierbei beschrieb um d
Schwerpunkt als Spitze die Geschossaxe Doppelkegel im Sin
des Dralls, also linksläufig; die Geschossspitze bewegte sich in zah
reichen kreisähnlichen Bogen (in der Fig. 6 angedeutet). D
Amplituden dieser Bogen zur selben Zeit wechselten von Schuss
Schuss nicht wenig, zwischen ca. 5° und 30°; im Verlauf derselb
Flugbahn nahm stets die Amplitude der Pendelungen zu. Die Geschos
spitze blieb bei diesen Pendelungen durchweg über der Flugbah
tangente; stets schlug deshalb das Geschoss zuerst mit dem hinter
Ende auf dem Boden auf; einmal blieb das Geschoss sogar in dies
Lage im Boden stecken, die Geschossspitze schief nach oben gericht

Die Dauer einer Präzessionspendelung ist berechnet $T = 22$ Se
die Dauer einer Nutationspendelung berechnet $T_1 = 0{,}65$ Sek., beo
achtete Dauer 0,5 bis 0,75 Sek. Es handelt sich somit um Nutatione
die sehr langsame Präzession äusserte sich offenbar nur darin, da
die Mittellage der Geschossaxe im Verlauf des Flugs sich etwas, u
ca. 15°, nach dem Horizont zu neigte, die Spitze des Geschosses si
senkte.

Bei Schüssen unter anderen Abgangswinkeln dieselbe sekundlic
Zahl von Pendelungen.

b) Auch bei Schuss vertikal aufwärts, wo zur Präzessior
bewegung kein Anlass gegeben war, blieb die Zahl und Amplitude d
Nutationen dieselbe.

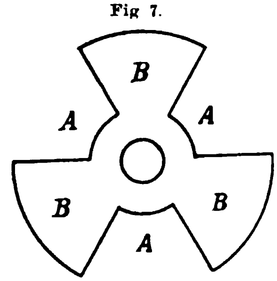
c) Schüsse mit zwei gleich schweren, aber verschied
langen Geschossen gleicher Anfangsgeschwindigkeit (Ansatz an de
Geschoss einerseits von Eisen, anderseits von Holz, gleichen Kaliber
Die Verlängerung des Geschosses erzeugt nach Formel I grösseres
in M, also kleineres T; nach III, wo im Nenner das erste Glied se
überwiegt, wird durch die Verlängerung kleineres $C:A$, also grösseres
erzeugt. Die Beobachtung ergab beim kürzeren Geschoss die Pendelung
periode $\frac{5}{9}$ Sek., beim längeren $\frac{5}{7}$ Sek., entsprechend Formel III.

d) Der Geschossschwerpunkt wurde variiert. Erster Schuss mit Schwerpunkt in der Geschossmitte (ebenda eine verschiebbare Bleimasse), an der Geschossspitze eine kleine Korkscheibe, damit sicher der Luftwiderstand an der Spitze angreift; zweiter Schuss, Bleimasse und Korkscheibe vertauscht. Dadurch war beide mal h_1 nahezu gleich gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen; ferner das zweite Mal A grösser als das erste Mal, die andern Grössen unverändert. Waren also die Pendelungen Präzessionen, so musste nach I deren sekundliche Zahl unverändert bleiben, aber der Umlaufssinn wurde umgekehrt; waren es dagegen Nutationen, so blieb der Sinn unverändert, dagegen wurde die Umlaufszeit grösser.

Beobachtet wurde das letztere.

e) Trägheitsmoment C variiert. An der Geschossspitze wurden der Reihe nach drei gleich schwere Korkscheiben von immer grösserem Durchmesser senkrecht angebracht und je mit gleicher Ladung unter 45° geschossen; in I) wächst dann sowohl C als M proportional dem Quadrat des Radius, also bleibt T konstant; in III) wird C grösser, also T_1 successiv kleiner; beobachtet wurde letzteres; die Pendelungen erfolgten immer schneller, waren bei der breitesten Scheibe von 6 cm Durchmesser kaum mehr zu zählen. Dasselbe bei vertikalem Schuss.

Fig 7.



f) Nur M variiert. Um einen besonders überzeugenden Vergleichsversuch zu erzielen, bei welchem die Formeln I) und II) entgegengesetzte Resultate liefern mussten und nur eine einzige Grösse, der Luftwiderstand in M, sich ändert, wurden an der Spitze des Geschosses senkrecht zur Axe zugleich zwei Metallscheiben von der Form der Figur 7 aufgesteckt. Erstens wurde die eine so gestellt, dass bei beiden Scheiben die Flügel B übereinanderstanden, und geschossen; das zweite Mal die eine so gedreht, dass die Flügel B der einen über den Ausschnitten A der andern standen, folglich die volle Scheibe sich dem Luftwiderstand entgegensetzte. Nach I) wurde im zweiten Fall der Nenner M gegenüber dem ersten Fall vergrössert (im Verhältnis 3:2), also T im selben Verhältnis verkleinert. Nach III) wurde der Nenner ein wenig verkleinert, T_1 vergrössert. Thatsächlich zeigte sich das letztere (15 Pendelungen in 5 Sek., gegen vorher 17). Dasselbe bei schiefem und vertikalem Schuss.

g) Es wurde der Reihe nach mit $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \cdots$ 2 g Ladung geschossen (schief und vertikal), die Zahl der Pendelungen pro Sekunde nahm zu, aber auch die Amplitude; nach der Formel II) für Präzessionsbewegung würde die Amplitude A abnehmen, nach IV) nimmt A_1 mit s_0 zu; es fand sich bei vertikalem Schuss:

bei $\frac{1}{2}$ g Ladung, Amplit. i. höchst. Punkt ca. 5°, b. Aufschl. am Boden ca. 10°,
„ $\frac{3}{4}$ „ „ „ „ „ 20°, „ „ „ 35°,
„ $\frac{5}{4}$ „ „ „ „ über 90°, „ „ grosse Ampl.,
„ 2 „ „ Überschlagen des Geschosses bald nach Verlassen des Laufs, Herabfallen unter vollen Rotationen um den Schwerpunkt in nahezu vertikaler Ebene.

h) In einem hohen Saal, der oben eine Öffnung besitzt, wurde vertikal aufwärts geschossen, und von der Öffnung aus die Geschossbewegung, speziell die Bahnen der Geschossspitze, während der einzelnen Pendelungen von oben betrachtet. Es zeigten sich Kurven ähnlich der in Figur 42 (siehe Heft 4 d. Zeitschr.).

C. Theorie.

Eine analytische Theorie der Kreiselbewegungen rotierender Langgeschosse hat der Verfasser früher (l. c. § 28) unter Voraussetzung des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes gegeben. Dieselbe soll im Folgenden unter weniger beschränkenden Annahmen von neuem durchgeführt werden: erstens gilt die folgende Theorie für jedes beliebige Luftwiderstandsgesetz, zweitens ist angenommen, dass die Geschossaxe im Anfang der Flugbahn einen seitlichen Stoss erleide, der speziell auch Null sein kann; ferner, dass anfangs die Tangente und die Geschossaxe nicht zusammenfallen.

Die Bewegung des Geschosses kann, wie bekannt, zerlegt gedacht werden in eine Translationsbewegung des Schwerpunkts, die so vor sich geht, wie wenn im Schwerpunkt alle äusseren Kräfte, parallel versetzt, angreifen würden, und in eine Drehung des Geschosses um den Schwerpunkt, wobei diese Drehung in derselben Weise erfolgt, wie wenn der Schwerpunkt im Raume relativ fest wäre. Beide Bewegungen sind von einander abhängig, worin der Grund für die Kompliziertheit des Problems und für die Unmöglichkeit liegt, dasselbe in aller Strenge zu lösen. Diese gegenseitige Abhängigkeit leuchtet auch ohne Rechnung sofort ein: Je grösser die Schwankungen bezüglich der Bahntangente sind, welche die Geschossaxe periodisch um den Schwerpunkt vollführt, um so grösser werden die Unterschiede des Luftwiderstands gegenüber dem Geschoss, welches mehr seine Langseite diesem Widerstande darbietet, um so mehr also wird die Flugbahn des Schwerpunkts abgeändert; andererseits, je grösser die Krümmung der Flugbahn ist, um so mehr ändert sich der Winkel zwischen der Richtung der Bahntangente in einem beliebigen Punkt und zwischen der Richtung der Anfangstangente, um so grösser also werden die Amplituden bei den Kreiselbewegungen der Geschossaxe sein müssen.

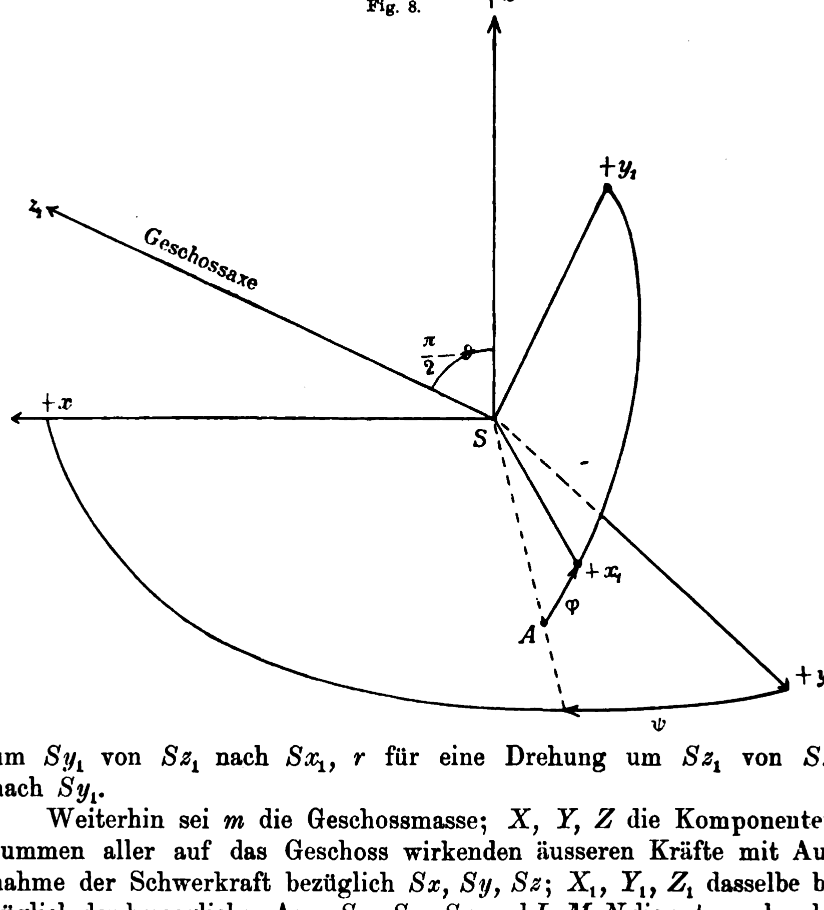
Diese wechselseitige Abhängigkeit der beiden Bewegungen nötigt dazu, ein passendes Näherungsverfahren einzuschlagen; lässt doch schon die (für die Praxis wichtigste) Aufgabe, welche gewöhnlich als das „ballistische Problem“ im engeren Sinne bezeichnet wird, diejenige nämlich, bei welcher von der Rotation des Geschosses um den Schwerpunkt abstrahiert und das Geschoss als Massenpunkt betrachtet wird, bekanntermassen keine strenge Lösung zu. Das im Folgenden, wie in der früheren Arbeit, angewendete Verfahren besteht nun darin, dass die Gleichungen der Translationsbewegung zunächst ohne Rücksicht auf die Rotationsbewegung näherungsweise gelöst, sodann die betreffenden Ausdrücke in die Gleichungen der Rotationsbewegung eingesetzt und diese integriert werden. Die so gewonnenen Integrale werden dann — falls dazu fortgeschritten werden soll, die Geschossabweichungen infolge der Rotationsbewegungen zu berechnen — rückwärts wieder dazu verwendet, die Gleichungen der Translationsbewegung nachträglich mit gewissen Korrektionsgliedern zu versehen. Es ist dies ein Verfahren, wie es in ähnlicher Weise bei Störungsrechnungen der Astronomie Anwendung findet.

Durch die Mitte O der Geschütz- oder Gewehrmündung seien drei feste Koordinatenaxen Ox, Oy, Oz gelegt; die Axe Ox horizontal und positiv in der Schussrichtung; Oy ebenfalls horizontal und positiv nach links (die Ausdrücke rechts, links, oben, unten durchweg bezüglich des Schützen gebraucht); die z-Axe vertikal, positiv nach oben. Der Geschossschwerpunkt S habe nach t Sekunden, vom Verlassen der Mündung an gerechnet, die Koordinaten xyz; durch S denke man sich drei Axen Sx, Sy, Sz parallel und gleichsinnig mit Ox, Oy, Oz gelegt, sowie drei andere Axen Sx_1, Sy_1, Sz_1, welch letztere mit dem Geschoss fest verbunden sind und Hauptträgheitsaxen vorstellen (die Figur 8 ist gezeichnet für einen Beobachter, welcher von der linken Seite der Flugbahn aus nach dem Geschoss sieht, also geht für diesen Sx nach links, Sy nach vorn, Sz nach oben). Die Axe Sz_1 sei die Längsaxe des Geschosses, das als Kreiscylinder mit aufgesetzter Spitze zu denken ist; ihre Neigung gegen die Horizontalebene Sx, Sy möge ϑ sein; positiv, falls die Geschossaxe sich oberhalb dieser Ebene xSy befindet, negativ, wenn unterhalb, somit $\sphericalangle\, zSz_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta$. Die beiden anderen, im Geschoss festen Axen Sx_1, Sy_1 seien auf Sz_1 senkrecht; die Ebene x_1Sy_1 schneide die Horizontalebene xSy nach SA und $\sphericalangle\, ySA$ sei mit ψ bezeichnet, ψ gezählt von der $+y$-Axe zur $+x$-Axe; endlich sei $\sphericalangle\, ASx_1 = \varphi$, und zwar sei der positive Drehungssinn von φ dadurch festgelegt, dass bei wachsendem φ einem Beobachter, der von S aus in der Richtung der Geschossaxe Sz_1 sieht, das Geschoss und mit ihm die Ebene x_1Sy_1 rechtsläufig, im Sinn der Uhrzeigerbewegung sich dreht, also in der Weise, wie es bei den deutschen Geschützen mit ihren rechtsläufig gewundenen Zügen der Fall ist. Durch

die Angabe von ϑ, φ, ψ ist in jedem Augenblick die Lage des Ge schosses bezüglich des Schwerpunkts S festgelegt; anfangs liege di Geschossaxe in der Schussebene xSz und sei gegen den Horizont u den wahren Abgangswinkel ϑ_0 geneigt, auch falle anfangs Sx_1 m SA zusammen, so dass für $t = 0 : \psi = 0$, $\varphi = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$.

p, q, r seien wie üblich die Komponenten der variablen Dre geschwindigkeit um die beweglichen Axen Sx_1, Sy_1, Sz_1; dabei p positi für eine Drehung um Sx_1 von Sy_1 nach Sz_1, q für eine Drehun

Fig. 8.



um Sy_1 von Sz_1 nach Sx_1, r für eine Drehung um Sz_1 von Sx nach Sy_1.

Weiterhin sei m die Geschossmasse; X, Y, Z die Komponente summen aller auf das Geschoss wirkenden äusseren Kräfte mit Aus nahme der Schwerkraft bezüglich Sx, Sy, Sz; X_1, Y_1, Z_1 dasselbe b züglich der beweglichen Axen Sx_1, Sy_1, Sz_1 und L, M, N die entsprechende Momentensummen; A, B, C die Trägheitsmomente um Sx_1, Sy_1, Sz Dann sind die Gleichungen für die Translationsbewegung des Schwe punkts:

$$1) \qquad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z - mg$$

und diejenigen für die Rotation um den Schwerpunkt nach Euler:

$$2)\quad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr + L, \quad B\cdot\frac{dq}{dt} = (C-A)rp + M, \\ C\frac{dr}{dt} = (A-B)\cdot pq + N; \end{cases}$$

dabei ist

$$3)\quad \begin{cases} p = -\cos\vartheta\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\cdot\frac{d\vartheta}{dt}, \\ q = -\cos\vartheta\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\cdot\frac{d\vartheta}{dt}, \\ r = \frac{d\varphi}{dt} - \sin\vartheta\cdot\frac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

woraus auch folgt:

$$3a)\quad \cos\vartheta\cdot\frac{d\psi}{dt} = -p\cdot\sin\varphi - q\cdot\cos\varphi, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -p\cos\varphi + q\sin\varphi.$$

Die Kosinus $a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 c_1 c_2 c_3$ der Winkel zwischen den beweglichen Axen der $x_1 y_1 z_1$ und den festen xyz (vergl. das Schema) hängen mit den Winkeln φ, ψ, ϑ durch die Eulerschen Formeln zusammen:

	x_1	y_1	z_1
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

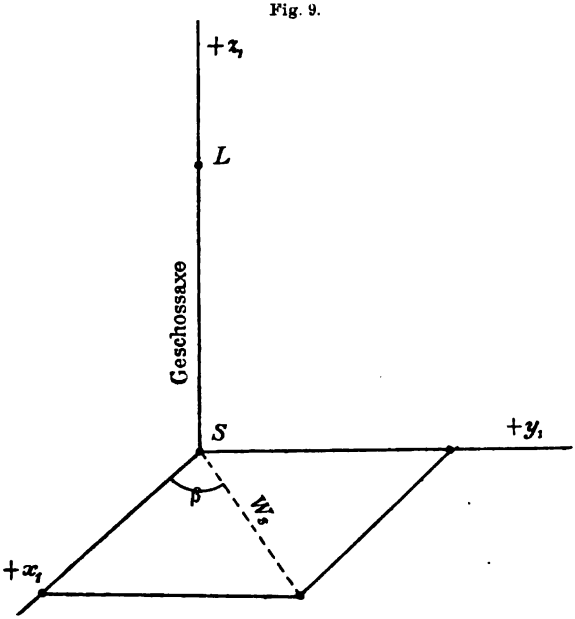
$$4)\quad \begin{cases} a_1 = -\sin\vartheta\cdot\cos\psi\cdot\sin\varphi + \sin\psi\cdot\cos\varphi \\ b_1 = -\sin\vartheta\cdot\cos\psi\cdot\cos\varphi - \sin\psi\cdot\sin\varphi \\ c_1 = \cos\vartheta\cdot\cos\psi \\ a_2 = \sin\vartheta\cdot\sin\psi\cdot\sin\varphi + \cos\psi\cdot\cos\varphi \\ b_2 = \sin\vartheta\cdot\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cdot\sin\varphi \\ c_2 = -\cos\vartheta\cdot\sin\psi \\ a_3 = \cos\vartheta\cdot\sin\varphi \\ b_3 = \cos\vartheta\cdot\cos\varphi \\ c_3 = \sin\vartheta. \end{cases}$$

Die Kräfte, welche auf das Geschoss wirken, sind die Schwerkraft, der normale Luftwiderstand, die Luftreibung oder der tangentielle Widerstand (Poissonscher Effekt), und die Wirkung der an dem Geschoss adhärierenden Luft gegenüber der Luft, in welcher sich dasselbe bewegt (Magnus-Effekt). Die Schwerkraft kommt in den Gleichungen 2) nicht vor, da die Resultante der Schwerkräfte durch S geht.

Die normalen Luftwiderstände gegen die einzelnen Teile der Geschossoberfläche setzen sich zu einer Resultante zusammen, welche in einem variablen Punkt L der Geschossaxe, $SL = h_1$, angreift; diese Resultante sei in ihre Komponenten, W_p und W_s, parallel und senkrecht zur Geschossaxe Sz_1 zerlegt gedacht; der Winkel zwischen W_s und Sx_1 sei β. Die Grössen W_p, W_s und h_1 variieren in wenig einfacher Weise mit dem Winkel α zwischen Geschossaxe Sz_1 und Flugbahntangente ST, die Tabellen I, II und IV (siehe Heft 4 dieser Zeitschr.) geben für verschiedene Winkel α und verschiedene Geschosslängen diese Werte, wie sie nach den Formeln von Kummer berechnet

sind. Bezüglich des tangentiellen Luftwiderstandes haben Poisson und Heim für Kugeln rechnerisch nachgewiesen, dass er ein nur minimaler sein könne; die oben angeführten Versuche haben weiterhin bewiesen, dass auch für die jetzigen Langgeschosse die Wirkung der Luftreibung zum mindesten erheblich kleiner ist, als diejenige des normalen Widerstands; es ist deshalb im folgenden von der Wirkung der Luftreibung abstrahiert; es könnte dieselbe auch erst dann in Rechnung gezogen werden, wenn Versuche über die eventuelle zeitliche Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit um die Längsaxe vorlägen.

Fig. 9.



Der Effekt von Magnus endlich kommt für Langgeschosse wohl nur bezüglich der Translationsbewegung und überhaupt nur dann in Betracht, wenn die Geschossaxe gegen die Bahntangente beträchtlich geneigt ist. So soll im Folgenden — wie dies von den Ballistikern, die sich bisher rechnerisch mit den Geschosspendelungen befassten, stets geschehen ist — ausser der Schwerkraft nur der normale Luftwiderstand in die Rechnung einbezogen werden. Es ist danach:

$$X_1 = W_s \cdot \cos\beta, \quad Y_1 = W_s \cdot \sin\beta, \quad Z_1 = W_p;$$

ferner ist, da der Angriffspunkt $x_1 y_1 z_1$ der Luftwiderstandsresultante auf der Axe Sz_1 liegt:

$$5) \quad \begin{cases} L = z_1 Y_1 - y_1 Z_1 = z_1 Y_1 = h_1 \cdot W_s \cdot \sin\beta \\ M = x_1 Z_1 - z_1 X_1 = -z_1 X_1 = -h_1 \cdot W_s \cdot \cos\beta \\ N = y_1 X_1 - x_1 Y_1 = 0. \end{cases}$$

Deshalb und wegen $A = B$ giebt die dritte Gleichung 2) $\frac{dr}{dt} = 0$; die Komponente der Rotationsgeschwindigkeit um die Geschossaxe ist also konstant.

Es ist nun $\cos\beta$, $\sin\beta$, X, Y, Z zu bilden. Die Kosinus der Winkel zwischen der Bahntangente und den festen Axen sind:

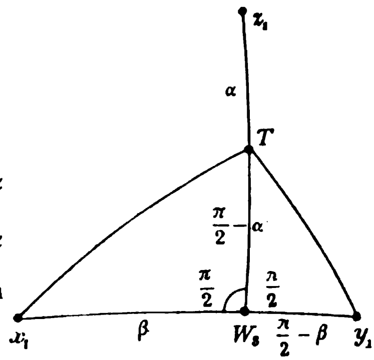
$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

die Ebene durch die Tangente ST und die Geschossaxe Sz_1 soll den Winkel β mit der Sx_1-Axe bilden, somit erhält man aus dem rechtwinkligen Dreikant Sx_1, ST, SW_s (wo $SW_s \parallel W_s$ durch S):

$$\left\{\begin{aligned} \cos(ST^\wedge Sx_1) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ &= a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \cos(ST^\wedge Sy_1) &= \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ &= b_1 \frac{dx}{ds} + b_2 \frac{dy}{ds} + b_3 \frac{dz}{ds}, \end{aligned}\right.$$

Fig. 10.



oder

$$6) \quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta &= \left(a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds}\right) : \sin\alpha \\ \sin\beta &= \left(b_1 \frac{dx}{ds} + b_2 \frac{dy}{ds} + b_3 \frac{dz}{ds}\right) : \sin\alpha \end{aligned}\right.$$

ferner ist für den Winkel α zwischen ST und Sz_1:

$$7) \qquad \cos\alpha = c_1 \frac{dx}{ds} + c_2 \frac{dy}{ds} + c_3 \frac{dx}{ds}$$

und endlich ist:

$$8) \quad \left\{\begin{aligned} &X = a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1, \quad Y = a_2 X_1 + b_2 Y_1 + c_2 Z_1, \\ &Z = a_3 X_1 + b_3 Y_1 + c_3 Z_1. \end{aligned}\right.$$

Damit erhalten die sechs Gleichungen 1) und 2) für die Translation und Rotation die folgende Form:

$$9) \quad \left\{\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= a_1 \cdot W_s \cdot \cos\beta + b_1 \cdot W_s \cdot \sin\beta + c_1 \cdot W_p \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= a_2 \cdot W_s \cdot \cos\beta + b_2 \cdot W_s \cdot \sin\beta + c_2 \cdot W_p \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} &= a_3 \cdot W_s \cdot \cos\beta + b_3 \cdot W_s \cdot \sin\beta + c_3 \cdot W_p - mg \end{aligned}\right.$$

(dabei der Luftwiderstand negativ zu rechnen).

$$10) \quad \left\{\begin{aligned} A \cdot \frac{dp}{dt} + (C - A) \cdot rq &= \quad h_1 \cdot W_s \cdot \left(b_1 \frac{dx}{ds} + b_2 \frac{dy}{ds} + b_3 \frac{dz}{ds}\right) : \sin\alpha \\ A \cdot \frac{dq}{dt} - (C - A) \cdot rp &= - h_1 \cdot W_s \cdot \left(a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds}\right) : \sin\alpha. \end{aligned}\right.$$

In der That hängen, wie oben bemerkt, die beiden Bewegungen wechselseitig von einander ab, denn die Gleichungen 9) enthalten $a_1 a_2 \ldots$, also wegen 4) die Winkel ϑ, ψ; und die Gleichungen 10) enthalten $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Dem angeführten Plan zufolge werden zunächst die Gleichungen 9) für die Translationsbewegung des Schwerpunkts ohne Rücksicht auf die Rotation gelöst; eine solche Lösung ist z. B. in dem Siacci-Kruppschen System von Gleichungen gegeben:

$$z = x\,(\operatorname{tg}\vartheta_0 + \varkappa F_{v_0}) - \varkappa^2 (Y_{v_x} - Y_{v_0}), \quad \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\vartheta_0 - \varkappa\,(F_{v_e} - F_{v_0})$$
$$t = \varkappa\,(T_{v_e} - T_{v_0}), \quad x = \varkappa\,(X_{v_e} - X_{v_0}).$$

Hier bedeutet ω den Horizontalneigungswinkel der Tangente in de Punkt (xz), der nach t Sekunden erreicht ist; die Werte X, F, T, Y si aus Tabellen zu entnehmen; $\varkappa = \frac{P \cdot 1{,}206}{R^2\pi \cdot \delta \cdot \lambda}$, P Geschossgewicht in k $R^2\pi$ der Querschnitt des Geschosses in qcm, δ das Gewicht von 1 cb Luft, λ ein Faktor, der von der Spitzenform abhängt und für norma Kruppsche Geschosse $= 1$ ist. Man kann auf diese Weise für irge eine Zeit t die Lage (x, z) des Geschosses berechnen; y ist dabei =

Noch einfacher ist es, nach der graphischen Methode d Verfassers* die Flugbahn zu konstruieren; es lassen sich dann die z sammengehörigen Zeiten t, Abscissen x, Ordinaten z, Tangentenwinkel Bahngeschwindigkeiten v leicht entnehmen.

Es sei vorausgesetzt, dass dies geschehen sei, dass man also f eine grössere Anzahl von Flugbahnpunkten, zunächst ohne Rücksic auf die Rotation, die Werte t, x, z, ω, v, also auch $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ kenn während vorerst $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ genommen wird.

Ferner soll die folgende Berechnung nur Giltigkeit haben, wer die Beobachtung (an Scheibendurchschlägen etc.) aufgezeigt hat, da die Winkel ϑ und ψ klein sind, und zwar sei vorausgesetzt, dass d Winkel ϑ und ψ so klein seien, dass die Quadrate gegenüber der Ei heit vernachlässigt werden können, dann ist

$$a_1 = -\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cos rt; \quad b_1 = -\vartheta \cdot \cos rt - \psi \sin rt;$$
$$c_1 = +1; \quad a_2 = \cos rt, \quad b_2 = -\sin rt,$$
$$c_2 = -\psi, \quad a_3 = \sin rt, \quad b_3 = \cos rt, \quad c_3 = +\vartheta;$$

damit werden die Gleichungen 6):

$$\begin{cases} \cos\beta = \left[\frac{dx}{ds}(-\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cos rt) + \frac{dy}{ds} \cdot \cos rt + \frac{dz}{ds} \sin rt\right] : \sin \\ \sin\beta = \left[\frac{dx}{ds}(-\vartheta \cdot \cos rt - \psi \sin rt) - \frac{dy}{ds} \cdot \sin rt + \frac{dz}{ds} \cos rt\right] : \sin \end{cases}$$

---

* Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 1897, S. 197. (S. 2 Z. 16 lies $15\frac{14}{16}{}^\circ$ statt 24° 52'. Ferner ist hinzuzufügen, dass Hr. A. Indra gegenüb Hr. Ökinghaus die Priorität dafür in Anspruch nimmt, zuerst die Hyperb als ballistische Kurve systematisch behandelt zu haben. In der That h schon 1876 Hr. Indra das betr. Gleichungssystem aufgestellt, dasselbe übrigens einer weit allgemeineren, auf synthetisch-geometrische Betrachtungen gegrü deten Weise abgeleitet: Alois Indra, jetzt Oberst und Präses im technisch Militärkomité in Wien, „Graphische Ballistik, synthetische Behandlung der B wegung im materiell erfüllten Raum, Anwendung auf die Geschossbewegung Wien 1876, bei Seidel. Seitdem hat Hr. Ökinghaus die Hyperbeltheorie auf zah reiche Einzelprobleme der Ballistik angewendet und erheblich erweitert.)

Denkt man sich hier den Zähler und Nenner je mit der Bahngeschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = v$ multipliziert, setzt nach dem Obigen vorerst $\frac{dy}{dt} = 0$, und bezeichnet $\frac{dx}{dt} = v \cdot \cos\omega$, $\frac{dz}{dt} = v \cdot \sin\omega$, wo ω der Horizontalneigungswinkel der Tangente ist, so wird:

$$\cos\beta = [v \cdot \cos\omega\,(-\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cos rt) + v \cdot \sin\omega \cdot \sin rt] : v \cdot \sin\alpha,$$

oder:

$$12)\quad \begin{cases} \cos\beta = \frac{\cos\omega}{\sin\alpha} \cdot [-\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cos rt + \sin rt \cdot \operatorname{tg}\omega] \\ \sin\beta = \frac{\cos\omega}{\sin\alpha} \cdot [-\vartheta \cdot \cos rt - \psi \sin rt + \cos rt \cdot \operatorname{tg}\omega]. \end{cases}$$

Hierbei ist:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} - \psi \cdot \frac{dy}{ds} \mp \vartheta \cdot \frac{dz}{ds} = \left[\frac{dx}{dt} - \psi \cdot \frac{dy}{dt} \mp \vartheta \cdot \frac{dz}{dt}\right] : \frac{ds}{dt},$$

oder jetzt:

$$13)\quad \cos\alpha = \cos\omega - \vartheta \cdot \sin\omega.$$

Dass es in der That gestattet ist, $\psi \cdot \frac{dy}{dt}$ gegen $\frac{dx}{dt}$ zu vernachlässigen, ergiebt sich aus dem Beispiel der schweren Feldkanone; für diese ist z. B.:

nach $t =$	$x =$	$y =$	$z =$	$\frac{dx}{dt} =$	$\frac{dy}{dt} =$	$\frac{dz}{dt} =$
sec	m	m	m	m/sec		
0	0	0	0	425	0	115
1,26	491	0,25	126	358	0,2	80
2,79	1002	1	239	316	0,6	64
4,48	1512	1,5	329	287	0,9	44

Da n. V. $|\psi| < 1$, leuchtet die Berechtigung des Gesagten ein. Ferner ist in 3) und 3a); $\cos\vartheta = 1$; $\sin\vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt}$ ist klein gegen $\frac{d\varphi}{dt}$, da $\frac{d\psi}{dt}$ (s. u.) und ϑ klein sind.

Mit den Ausdrücken 12) werden, unter Berücksichtigung von 5) die Gleichungen 2) resp. 10) der Rotation des Geschosses um den Schwerpunkt nunmehr die folgenden:

$$14)\quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} - \frac{A-C}{A} \cdot rq = \frac{M}{A} \cdot (-\vartheta \cdot \cos rt - \psi \cdot \sin rt + \cos rt \cdot \operatorname{tg}\omega) \\ \frac{dq}{dt} + \frac{A-C}{A} \cdot rp = -\frac{M}{A} \cdot (-\vartheta \cdot \sin rt + \psi \cdot \cos rt + \sin rt \cdot \operatorname{tg}\omega), \end{cases}$$

wobei:

$$M = \frac{W_s \cdot h_1 \cdot \cos\omega}{\sin\alpha}$$

ist. Dazu kommen die Gleichungen:

$$15)\quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = -p \sin rt - q \cdot \cos rt \\ \frac{d\vartheta}{dt} = -p \cdot \cos rt + q \sin rt. \end{cases}$$

Die Bewegung des Geschosses denken wir uns in genügend kleine Intervalle zerlegt, so dass bei der Berechnung innerhalb jedes einzelnen Intervalls ein anderer konstanter Mittelwert von $W_s \cdot h_1 \cos\omega : \sin\alpha$ angenommen werden kann; die Tabelle III resp. IV giebt die Werte von $W_s : \sin\alpha$ und von h_1, die graphische Darstellung der Translationsbewegung lieferte in jedem Augenblick ω, so dass der Ausdruck M als gegeben zu betrachten ist; die Tabelle III und das weiter unten durchgeführte Beispiel zeigt, dass M wenig rasch sich ändert.

Das Gleichungssystem 14) und 15) lässt sich dann nach Poissons Vorgang wie folgt integrieren. Man versucht, für p, q, ϑ, ψ Integrale in der Form zu finden:

$$p = f_1 \cdot \cos rt + f_2 \cdot \sin rt + p_1, \qquad \vartheta = f_3 \cdot \cos rt + f_4 \cdot \sin rt + \vartheta_1$$
$$q = f_2 \cdot \cos rt - f_1 \cdot \sin rt + q_1, \qquad \psi = f_4 \cdot \cos rt - f_3 \cdot \sin rt + \psi_1,$$

wobei $f_1 f_2 f_3 f_4 p_1 q_1 \vartheta_1 \psi_1$ 8 Funktionen der Zeit darstellen, welche noch zu berechnen sind. Dies geschieht, indem die eben angeschriebenen Werte für $p q \vartheta \psi$ in 14) und 15) eingesetzt und die Koeffizienten von $\cos rt$ und $\sin rt$, sowie die von den periodischen Gliedern freien Terme beiderseits einander gleichgesetzt werden. Man erhält so 8 Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen $f_1 f_2$ etc.; in 4 dieser Gleichungen kommen $df_1 | dt$ neben $f_2 \cdot r$, $df_2 | dt$ neben $f_1 \cdot r$, $df_3 | dt$ neben $f_4 \cdot r$, $df_4 | dt$ neben $f_3 \cdot r$ vor; vernachlässigt man diese Ableitungen der Funktionen gegen die Produkte dieser Funktionen mit dem meist grossen r — unter dem Vorbehalt, dass später durch die Analogie der Kreiseltheorie etwaige Korrektionen in den entstehenden Ausdrücken eintreten sollen —, so lassen sich $f_1 f_2 f_3 f_4$ sofort bestimmen; für $p_1 q_1 \vartheta_1 \psi_1$ bleiben einfache Differentialgleichungen erster Ordnung, welche leicht integriert werden können. Damit hat man:

$$f_1 = M \cdot \psi_1 : Cr \qquad p_1 = C' \sin\beta_1 + D' \cos\beta_1$$
$$f_2 = M \cdot (\vartheta_1 + \operatorname{tg}\omega) : Cr \qquad q_1 = C' \cos\beta_1 - D' \sin\beta_1$$
$$f_3 = -q_1 : r \qquad \vartheta_1 = -A' \sin\beta_2 - B' \cos\beta_2$$
$$f_4 = -p_1 : r \qquad \psi_1 = A' \cos\beta_2 - B' \sin\beta_2,$$

wobei:

$$\beta_1 = \frac{A-C}{A} \cdot rt + \frac{M}{Ar} \cdot t$$
$$\beta_2 = \frac{M}{Cr} \cdot t$$

und A', B' Funktionen von t sind, nämlich:

$$A' = A_1 - \int \frac{M}{Cr} \cdot \operatorname{tg}\omega \cdot \cos\beta_2 \cdot dt, \quad B' = B_1 + \int \frac{M}{Cr} \cdot \operatorname{tg}\omega \cdot \sin\beta_2 \cdot dt.$$

$A_1 B_1 C' D'$ sind Integrationskonstanten, die sich aus dem Anfangszustand ergeben; über die Berechnungen der letzteren Integrale siehe w. u.

Damit erhält man:

$$p = \frac{M}{Cr}\cdot\left\{\cos\beta_2\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot \operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right) - \sin\beta_2\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right)\right\}\cdot\cos rt$$
$$+ \frac{M}{Cr}\cdot\left\{\sin\beta_2\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right) + \cos\beta_2\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right) + \operatorname{tg}\omega\right\}\sin rt$$
$$+ C'\sin\beta_1 + D'\cos\beta_1,$$

oder

$$16)\left\{\begin{aligned} p = C'\sin\beta_1 + D'\cos\beta_1 + \frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin rt \\ + \frac{M}{Cr}\left\{\cos(rt-\beta_2)\cdot\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right)\right. \\ \left. + \sin(rt-\beta_2)\cdot\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right)\right\},\end{aligned}\right.$$

ebenso

$$17)\left\{\begin{aligned} q = C'\cos\beta_1 - D'\sin\beta_1 + \frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos rt \\ + \frac{M}{Cr}\cdot\left\{-\sin(rt-\beta_2)\cdot\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right)\right. \\ \left. + \cos(rt-\beta_2)\cdot\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right)\right\}.\end{aligned}\right.$$

$$18)\left\{\begin{aligned} -\vartheta = \frac{C'}{r}\cdot\cos(rt-\beta_1) + \frac{D'}{r}\cdot\sin(rt-\beta_1) \\ + \sin\beta_2\cdot\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt\right) \\ + \cos\beta_2\cdot\left(B_1 + \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right).\end{aligned}\right.$$

$$19)\left\{\begin{aligned} \psi = -\frac{C'}{r}\cdot\sin(rt-\beta_1) + \frac{D'}{r}\cdot\cos(rt-\beta_1) \\ + \cos\beta_2\cdot\left(A_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_1\cdot dt\right) \\ - \sin\beta_2\cdot\left(B_1 - \int\frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2\cdot dt\right).\end{aligned}\right.$$

Im Anfang der Bewegung, die wir von der Mündung des Gewehrs oder Geschützes abrechnen, falle zunächst die Geschossaxe in die Richtung der Anfangstangente, so dass für $(t = 0)$:

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = 0$$

ist. Zugleich aber erhalte die Geschossaxe einen seitlichen Stoss, der ihr die Winkelgeschwindigkeiten p_0 und q_0 erteile;

$$(t = 0): p = p_0, \quad q = q_0.$$

Damit wird:

$$20)\begin{cases} p_0 = D' + \frac{M}{Cr}\cdot A_1 & A_1 = p_0 : \left(\frac{M}{Cr} - r\right) \\ q_0 = C' + \frac{M}{Cr}(\operatorname{tg}\vartheta_0 + B_1) & B_1 = \left(q_0 + r\,\vartheta_0 - \frac{M}{Cr}\cdot\operatorname{tg}\vartheta_0\right) : \left(\frac{M}{Cr} - \right. \\ -\vartheta_0 = \frac{C'}{r} + B_1 & C' = -r\operatorname{tg}\vartheta_0 - r\,B_1 \\ 0 = \frac{D'}{r} + A_1 & D' = -r\,A_1. \end{cases}$$

Ferner sind die beiden in 16) bis 19) vorkommenden Integrale

$$F = \frac{1}{Cr}\cdot\int M\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{Cr}\cdot\int M\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_3\cdot dt$$

zu ermitteln.

Es sei im Folgenden die Abkürzung $M : Cr = N$ eingeführt und dar erinnert, dass wir einen Mittelwert von N in den einzelnen Intervallen a nahmen; in β_2 und β_1 wurden die Integrationskonstanten so bestimn dass für $t = 0$, $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 0$ ist, weil nur im Anfang $\psi = 0$ u $\vartheta = \vartheta_0$ sein soll; also muss auch in den beiden Integralen von 0 bi integriert werden. Es lässt sich nun wiederholt die teilweise In gration anwenden; hierbei treten jedoch immer höhere Potenzen d Faktors $(g\cdot Cr):(v\cdot\cos\omega\cdot M)$ auf, von welchem sich später zeig wird, dass er von der Grössenordnung von ψ ist, und von welche daher die höheren Potenzen nach der ersten weggelassen werden (z. bei der Granate der deutschen Feldkanone, Schussweite 4500 m, nim dieser Faktor vom Abgangspunkt bis zum Auffallpunkt zu von 0,002 bis 0,00304); man hat damit:

$$F = \int N\cdot\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot dt = \int\operatorname{tg}\omega\cdot\cos\beta_2\cdot d\beta_2 = \operatorname{tg}\omega\cdot\sin\beta_2 + \frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\beta_2}\cdot(\cos\beta_2 - 1);$$

nun ist $dx = -\frac{v^2}{g}\cdot d\omega$, eine Gleichung, die für jedes Luftwiderstand gesetz allgemein giltig ist (vergl. Kompendium S. 81); somit ist:

$$\frac{d\operatorname{tg}\omega}{dt} \text{ oder } \frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\cos^2\omega} : \frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{g}{v^2}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{v_x},$$

wenn v_x die Horizontalkomponente $v\cdot\cos\omega$ der Bahngeschwindigk des Schwerpunktes darstellt; somit hat man:

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\beta_2} = -\frac{g}{v_x} : \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{g\cdot Cr}{v_x\cdot M};$$

(in 4 Beispielen der Praxis nahm $Cr : M$ numerische Werte zwisch 0,1 und 2 an, während v_x zwischen 180 und 400 lag). Man h danach oder nach dem Mittelwertsatz:

$$21)\qquad F = \sin\beta_2\cdot\operatorname{tg}\omega + f\cdot(1 - \cos\beta_2),$$

wobei $f = (g\cdot Cr) : (v_x\cdot M)$ ist.

Analog ist:

$$F_1 = \int N \operatorname{tg}\omega \cdot \sin\beta_2 \cdot dt = \int \operatorname{tg}\omega \cdot \sin\beta_2 \cdot d\beta_2$$

$$= -\operatorname{tg}\omega \cdot \Big|_0^t \cos\beta_2 + \int_0^t d(\operatorname{tg}\omega)\cos\beta_2,$$

oder bei demselben Verfahren:

22) $$F_1 = -\cos\beta_2 \cdot \operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\vartheta_0 - f \cdot \sin\beta_2.$$

Diese Werte 20), 21), 22) sind noch in den Ausdrücken 16) bis 19) zu verwenden; so kennt man in jedem Moment die Lage der momentanen Drehaxe und diejenige der Geschossaxe. Letzere ist für die Ballistik von der grösseren Bedeutung; daher beschäftigen wir uns nur mit den Ausdrücken ϑ und ψ und deren geometrischer Deutung. Es wird:

$$\left\{\begin{aligned}\vartheta = {} & (\vartheta_0 + B_1)\cos(rt - \beta_1) + A_1 \cdot \sin(rt - \beta_1) - A_1 \sin\beta_2 - B_1 \cos\beta_2 \\ & + \sin\beta_2 \cdot [\sin\beta_2 \cdot \operatorname{tg}\omega + f \cdot (1 - \cos\beta_2)] \\ & - \cos\beta_2 \cdot (\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\omega \cdot \cos\beta_2 - f \cdot \sin\beta_2)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\psi = {} & (\vartheta_0 + B_1)\sin(rt - \beta_1) - A_1 \cdot \cos(rt - \beta_1) + A_1 \cos\beta_2 - B_1 \sin\beta_2 \\ & - \cos\beta_2 \cdot [\sin\beta_2 \cdot \operatorname{tg}\omega + f \cdot (1 - \cos\beta_2)] \\ & - \sin\beta_2 \cdot (\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\omega \cdot \cos\beta_2 - f \cdot \sin\beta_2),\end{aligned}\right.$$

oder:

23) $$\vartheta = \vartheta_r + \vartheta_n,$$

wobei:

$$\vartheta_r = \operatorname{tg}\omega + f \cdot \sin\beta_2 + \cos\beta_2 \cdot (\operatorname{tg}\vartheta_0 - \operatorname{tg}\omega)$$

$$\vartheta_n = \{p_0 \cdot [\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] + q_0\,[\cos\beta_2 - \cos(rt - \beta_1)]\} : (r - N).$$

24) $$\psi = \psi_r + \psi_n,$$

wobei:

$$\psi_r = f - f \cdot \cos\beta_2 + \sin\beta_2 \cdot (\operatorname{tg}\vartheta_0 - \operatorname{tg}\omega)$$

$$\psi_n = \{q_0 \cdot [\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] - p_0 \cdot [\cos\beta_2 - \cos(rt - \beta_1)]\} : (r - N)$$

mit den Abkürzungen:

25) $$\left\{\begin{aligned} & \beta_1 = \frac{A-C}{A} \cdot rt + \frac{M}{Ar} \cdot t; \quad \beta_2 = \frac{M}{Cr} \cdot t; \\ & N = \frac{M}{Cr}; \quad f = \frac{g \cdot Cr}{v_x \cdot M}.\end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke 23) und 24) lassen eine verhältnismässig einfache **geometrische Deutung** zu.

Wir legen durch den festgedachten Schwerpunkt S des Geschosses eine horizontale Äquatorebene, ferner durch S und die Flugbahntangente ST eine vertikale Anfangs-Meridianebene; beschreiben weiter um S mit der Längeneinheit $SS_1 = ST = 1$ m eine Kugelfläche, welche von S aus be-

trachtet und dementsprechend gezeichnet sei. Der Äquator und der Anfangsmeridian, welche sich in S_1 schneiden, werden als sphärische Koordinatenaxen $S_1\psi$ und $S_1\vartheta$ benützt. In Beziehung auf dieses sphärische Koordinatensystem auf der Kugel stellen dann ψ resp. ϑ die Länge resp. Breite desjenigen Punktes P vor, welcher sich auf der Verlängerung der Geschossaxe in der Entfernung $SP = 1$ m befindet. Die Figur 11 ist für einen Beobachter gezeichnet, welcher von hinten das Geschoss betrachtet; der Geschossschwerpunkt ist also vor dem Papier zu denken.

Wir suchen die Kurve, welche der Punkt P der Geschossaxe im Lauf der Zeit beschreibt, von seiner Anfangslage O aus (Winkel $OSS_1 = \vartheta_0$). Der Punkt T der Tangente fällt anfangs in O, rückt von da auf der ϑ-Axe abwärts; zur Zeit t ist Winkel $TSS_1 = \omega$; im Flugbahnscheitel

Fig. 11.

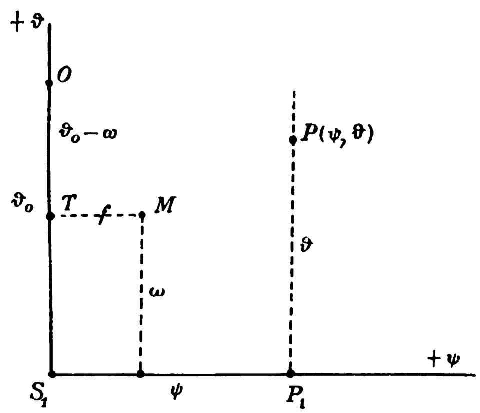
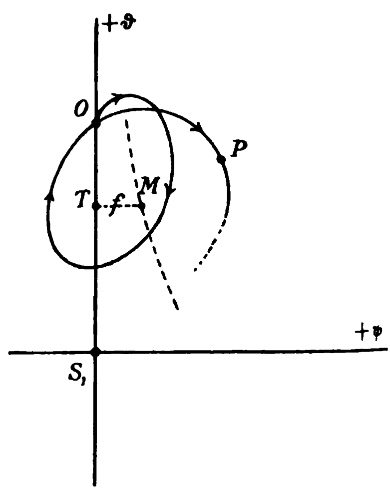


Fig. 12.



ist T in S_1 angelangt etc.; die Bewegung von T auf der Ordinatenaxe, also die Änderung von ω mit der Zeit, ist hierbei durch die vorhergehende (graphische) Lösung der Translationsbewegung gegeben zu denken; ebenso ist die Bahngeschwindigkeit v des Schwerpunkts und ihre horizontale Komponente $v_x = v \cdot \cos\omega$ zu jeder Zeit bekannt.

Nun lassen sich die Ausdrücke ϑ und ψ in zwei wesentlich verschiedene Teile und lässt sich demgemäss die Bewegung der Geschossaxe in zweierlei Bewegungen spalten, wovon die eine als die reguläre Präzession (ϑ_r, ψ_r), die andere als die Nutation infolge eines Anfangsstosses (ϑ_n, ψ_n) zu bezeichnen ist.

a) Sieht man nämlich von einem Anfangsstoss $p_0 q_0$ ab, so reduzieren sich ϑ und ψ auf die Ausdrücke:

$$26)\quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta = \vartheta_r = \omega + f \cdot \sin\beta_2 + \cos\beta_2 \cdot (\vartheta_0 - \omega) \\ \psi = \psi_r = f \;\; - f \cdot \cos\beta_2 + \sin\beta_2 \cdot (\vartheta_0 - \omega) \end{array} \right\} \quad \text{(reguläre Präzession);}$$

hieraus:

27) $$(\vartheta - \omega)^2 + (\psi - f)^2 = f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2;$$

d. h. wenn kein Anfangsstoss stattfindet, beschreibt Punkt P der Geschossaxe eine spiralenförmig sich erweiternde Kurve (Fig. 12), die stets wieder durch die Anfangslage O geht und die aufgefasst werden kann als ein veränderlicher Kreis durch den festen Punkt O; der Mittelpunkt M dieses Kreises, mit den Koordinaten ω und f, rückt hierbei von O aus (mehr oder weniger) nach rechts und abwärts (in derselben Weise wie der Endpunkt T der Flugbahntangente auf der Ordinatenaxe $S_1 O$ abwärts rückt), vorausgesetzt, dass erstens das Gewehr oder Geschütz Rechtsdrall besitzt, das Geschoss rechtsläufig um die Geschossaxe rotiert (r positiv), und dass zweitens die Resultante der Luftwiderstände vor dem Schwerpunkt auf der Geschoss-

Fig. 13.

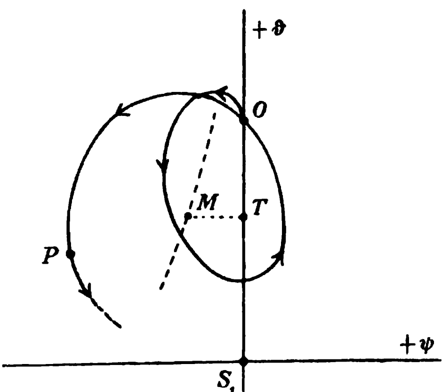
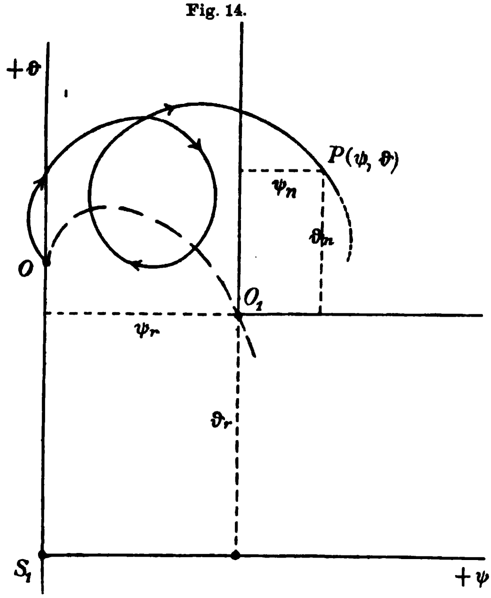


Fig. 14.



axe angreift (Moment M positiv). Dasselbe ist der Fall, wenn r und M negativ sind. Wenn dagegen bei Rechtsdrall die Resultante zwischen Schwerpunkt und Geschossboden angreift oder umgekehrt bei Linksdrall dieselbe ihren Angriffspunkt zwischen Schwerpunkt und Geschossspitze hat, so wird die Präzessionsbewegung der Geschossspitze linksläufig erfolgen (Fig. 13), der Mittelpunkt M des veränderlichen Kreises liegt in diesem Fall links und rückt abwärts.

Der Radius $OM = \sqrt{f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2}$ des veränderlichen Kreises vergrössert sich stetig, weil der Winkel $\vartheta_0 - \omega$ zwischen Anfangstangente der Flugbahn und Tangente in einem variablen Punkt mit der Zeit stetig wächst und ebenso meistens der Ausdruck

$$f = g \cdot \frac{C \cdot r}{M \cdot v_x};$$

denn das Drehmoment M des Luftwiderstands wird zwar in den meist Fällen zunehmen; aber es nimmt v_x ab (während von r angenomm wird, dass es konstant bleibt, was freilich nur angenähert richtig s dürfte); jedenfalls ergiebt die Rechnung, dass f meistens zunimmt u die Bahn des Punktes P der Geschossspitze in immer weiteren Wi ungen verläuft.

Wie man sieht, ist der veränderliche Kreis unsymmetrisch züglich der Flugbahnvertikalebene OSS_1; da die Rechnung nicht zur Ermittelung der Seitenabweichung y des Geschossschwerpun hier durchgeführt wird, so sei schon an dieser Stelle bemerkt, d eben diese Unsymmetrie der Grund für diese Derivation ist; in der T wird die Seitenabweichung wesentlich durch die Grösse

$$f = g \cdot \frac{C \cdot r}{M \cdot v_x}$$

nach Grösse und Vorzeichen bedingt; sind r und M beide positiv o beide negativ, so ergiebt sich Rechtsabweichung; ist nur eine beiden Grössen negativ, Linksabweichung.

Die Zeit T eines vollen Umlaufs der Geschossspitze, also Periode der regulären Präzession, ergiebt sich nach 25) aus $\beta_2 = 2\pi$

$$28)\qquad T = \frac{2\pi \cdot C \cdot r}{M};$$

auch diese Zeit ist variabel, und zwar nimmt T im allgemeinen ab

b) Wir gehen über zur Beschreibung der Nutationsbewegun also zur Deutung der Terme ϑ_n und ψ_n, welche nur bei einem Anfan stoss auftreten:

$$29)\quad \begin{cases} \vartheta_n = \{p_0[\sin\beta_2 - \sin(rt-\beta_1)] + q_0[\cos\beta_2 - \cos(rt-\beta_1)]\} : (r- \\ \psi_n = \{q_0[\sin\beta_2 - \sin(rt-\beta_1)] - p_0[\cos\beta_2 - \cos(rt-\beta_1)]\} : (r- \end{cases}$$

(Nutation infolge eines Anfangsstosses.)

Da diese sich zu den vorhergehenden ϑ_r und ψ_r einfach addier so können sie betrachtet werden als die sekundären sphärischen ordinaten ϑ_n, ψ_n eines Koordinatensystems, dessen Ursprung O_1 (Fig. 1 mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{M}{Cr}$ auf der (ausgezogenen) Präzessio kurve wandert und den variablen Punkt P von Figur 12 und 13 erset Durch Quadrieren und Addieren wird aus 29):

$$(r-N)^2 \cdot (\vartheta_n^2 + \psi_n^2) = 2 \cdot (p_0^2 + q_0^2) \cdot [1 - \sin\beta_2 \cdot \sin(rt-\beta_1) - \cos\beta_2 \cdot \cos(rt-\beta_1)]$$

oder

$$30)\qquad O_1P = \sqrt{\vartheta_n^2 + \psi_n^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2}}{r-N} \cdot \sin\frac{rt-\beta_1-\beta_2}{2}.$$

Die bezüglich O_1 betrachtete Bewegung des Punkts P der Gescho axe kann somit ebenfalls wieder als ein veränderlicher Kreis a

gefasst werden, dessen Mittelpunkt in O_1 liegt und dessen Radius periodisch sich ändert, zuerst $= 0$ ist, dann die Maximalgrösse

$$2 \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2} : (r - N)$$

annimmt, wieder Null wird etc.

Derselbe Wert von $O_1 P$ wird wieder erreicht nach der Zeit T_1, die sich ergiebt aus:

$$\frac{rt - \beta_1 - \beta_2}{2} = \pi;$$

also ist:

$$r T_1 - \frac{A - C}{A} \cdot r T_1 - \frac{M}{Cr} \cdot T_1 - \frac{M \cdot T_1}{A \cdot r} = 2\pi,$$

oder:

31) $$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr} - \frac{M}{Ar}}.$$

Da im Nennerausdruck das Glied $Cr : A$ im allgemeinen bei weitem überwiegt, so ist erstens diese Nutationsperiode T_1 im allgemeinen eine schnellere als die Präzessionsperiode; und zweitens wechselt der Sinn, in welchem die Nutationsbögen beschrieben werden, nur mit r; diese Bögen werden also bei Rechtsdrall rechtsläufig, bei Linksdrall linksläufig beschrieben, mag Rechts- oder Linksabweichung des Schwerpunkts erfolgen, mag also die Präzessionsspirale rechts- oder linksläufig beschrieben werden.

Im ganzen führt somit die Geschossspitze P bezüglich des Schwerpunkts die folgende Doppelbewegung aus: Falls kein Anfangsstoss vorhanden war, beschreibt die Geschossspitze von ihrer Anfangslage O aus mit der langsamen Periode T die spiralförmige ausgezogene Kurve Fig. 12 resp. 13, deren Windungen sich allmählich erweitern, die aber immer wieder durch O geht; bei positivem r (Rechtsdrall) und positivem Drehmoment M, ebenso bei negativem r und negativem M wird diese Spirale rechtsläufig beschrieben; wenn dagegen nur eine der beiden Grössen r, M negativ ist, linksläufig. Im allgemeinen jedoch ist diese Präzessionskurve nur die Leitkurve für die (gestrichelt gezeichneten) Nutationsbögen (Fig. 14), die von der Geschossspitze beschrieben werden, mit der schnelleren Periode T_1 und mit Amplituden, die von dem Anfangsstoss und von den Grössen r, C, A, M abhängen.

Spezieller Fall einer geradlinigen Bewegung des Schwerpunkts.

a) Die Geschossaxe falle anfangs mit der Bewegungsrichtung des Schwerpunkts zusammen.

Dieser Fall ist bei einem sehr rasanten, auf kurze Entfernung abgegebenen horizontalen Schuss aus einem kleinkalibrigen Gewehr nahezu verwirklicht; vollkommen bei einem vertikalem Schuss. Im ersteren Fall ist jederzeit $\omega = \vartheta_0 = 0$ (dasselbe ist bei vertikalem Schuss der Fall, wenn man die x-Axe, welche bisher horizontal angenommen war, mit der vertikalen zusammenfallen lässt).

In den Gleichungen 16) bis 19) ist $\omega = 0$, $\vartheta_0 = 0$ zu nehme und es wird:

$$\begin{cases} p = C' \sin\beta_1 + D' \cos\beta_1 + N \cdot [A_1 \cos(rt - \beta_2) + B_1 \sin(rt - \beta_2)] \\ q = C' \cos\beta_1 - D' \sin\beta_1 + N \cdot [- A_1 \sin(rt - \beta_2) + B_1 \cos(rt - \beta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\vartheta = \frac{C'}{r} \cos(rt - \beta_1) + \frac{D'}{r} \sin(rt - \beta_1) + A_1 \sin\beta_2 + B_1 \cos\beta_2 \\ \psi = -\frac{C'}{r} \sin(rt - \beta_1) + \frac{D'}{r} \cos(rt - \beta_1) + A_1 \cos\beta_2 - B_1 \sin\beta_2. \end{cases}$$

Für $t = 0$ ist $p = p_0$, $q = q_0$, $\vartheta = 0$, $\psi = 0$, somit:

$$A_1 = p_0 : (N - r),\ B_1 = q_0 : (N - r);\quad C' = - r q_0 : (N - r);$$
$$D' = - r p_0 : (N - r);$$

damit erhält man genau wieder die Ausdrücke ϑ_n, ψ_n für die Nu tationsbewegung infolge eines Anfangsstosses 29), nämlich:

$$32)\ \begin{cases} \vartheta = \{p_0 \cdot [\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] + q_0 \cdot [\cos\beta_2 - \cos(rt - \beta_1)]\} : (r - N \\ \psi = \{q_0 \cdot [\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] - p_0 \cdot [\cos\beta_2 - \cos(rt - \beta_1)]\} : (r - N \end{cases}$$

Es hat sich also in diesem Fall die frühere spiralenförmige Pr zessionskurve auf den Punkt S_1 reduziert. Fig. 15 giebt die hyp cykloidische Bahn der Geschosssspitze in diesem Fall. Die Amplitu jedes einzelnen Teilbogens, also der Radius des umhüllenden Kreis ist wiederum:

$$2 \cdot \sqrt{p_0^2 + q_0^2} : (r - N);$$

die Periode wieder:

$$T_1 = 2\pi : \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr} - \frac{M}{Ar}\right).$$

b) Die Geschossaxe bilde anfangs den Winkel ϑ_0 mit de geradlinigen Bewegungsrichtung des Schwerpunkts.

Die Anfangsbedingungen sind jetzt:

$$\text{für } t = 0 : \vartheta = \vartheta_0,\quad \psi = 0,\quad p = p_0,\quad q = q_0,$$

ferner: anfangs und weiterhin $\omega = 0$. Damit erhält man aus de Gleichungen 17) bis 19):

$$p_0 = D' + N \cdot A_1,\qquad -\vartheta_0 = \frac{C'}{r} + B_1,$$
$$q_0 = C' + N B_1,\qquad 0 = \frac{D'}{r} + A_1.$$

Berechnet man daraus A_1, B_1, C', D' und setzt die Werte in die Gleic ungen 18) und 19) ein, so wird:

$$33)\qquad \begin{cases} \vartheta = \frac{\vartheta_0}{r - N} \cdot [r \cdot \cos\beta_2 - N \cdot \cos(rt - \beta_1)] + \vartheta_n \\ \psi = \frac{\vartheta_0}{r - N} \cdot [r \cdot \sin\beta_2 - N \cdot \sin(rt - \beta_1)] + \psi_n, \end{cases}$$

wobei ϑ_n und ψ_n wieder die früheren Werte für die Stossnutatione vorstellen.

Ist der Anfangsstoss $p_0 q_0$ Null, so fallen die Glieder ϑ_n und ψ_n weg und die Kurve 33) hat eine Gestalt ähnlich der in den Figuren 19, 20, 23, je nach Grösse und Vorzeichen von r, N etc. Es überwiegen nämlich die ersten Glieder mit $r \cdot \cos \beta_2$ und $r \cdot \sin \beta_2$ (z. B. für die schwere Feldkanone ist in nicht zu grosser Entfernung von der Mündung $r = 632$, $N = 9$); die Glieder mit $rt - \beta_1$ variieren mit wachsendem t sehr rasch zwischen -1 und $+1$, dagegen die mit β_2 langsam. Daher besteht die Bahn der Geschossspitze aus Bögen,

Fig. 15.

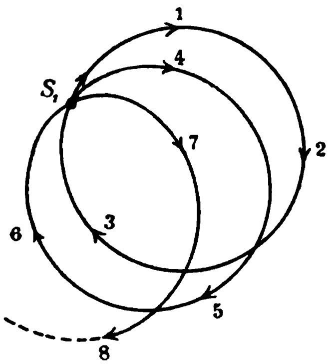
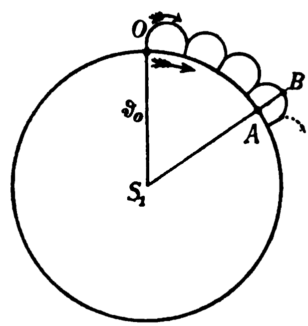


Fig. 16.



welche auf dem festen Kreis um S_1 mit Radius ϑ_0 aufsitzen. Man hat nämlich in diesem Fall durch Quadrieren und Addieren:

$$\vartheta^2 + \psi^2 = \left(\frac{\vartheta_0}{r - N}\right)^2 \cdot [r^2 + N^2 - 2 N r \cdot \cos(rt - \beta_1 - \beta_2)].$$

Anfangs und so oft wieder $rt - \beta_1 - \beta_2$ um 2π gewachsen ist, ist der Abstand der Geschossspitze von S_1 gleich ϑ_0, dabei hat zugleich der Kosinus seinen grössten, jener Abstand seinen kleinsten Wert; der grösste Wert $S_1 B$ wird erreicht, wenn der Kosinus gleich -1 ist, dann ist $S_1 B = \vartheta_0 \cdot \frac{r+N}{r-N}$; somit ist die Amplitude AB gleich:

$$\vartheta_0 \cdot \frac{r+N}{r-N} - \vartheta_0;$$

hierfür lässt sich leicht ein einfacher Näherungswert berechnen; bringt man auf eine Benennung, dividiert Nenner und Zähler mit r, entwickelt nach Potenzen des kleinen Bruchs $\frac{N}{r}$ und behält davon nur die erste Potenz bei, so wird die Amplitude

34) $$AB = 2 \cdot \vartheta_0 \cdot \frac{N}{r}.$$

Die Periode dieser stossfreien Nutationen ist wieder:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr} - \frac{M}{Ar}}.$$

Ist unter den sonst gleichen speziellen Voraussetzungen der Anfangsstoss $p_0 q_0$ nicht Null, so treten die Glieder ϑ_n und ψ_n hinzu, so dass man, je nach Grösse und Richtung von p_0 und q_0 Figuren wie in 27, 29, 34, 36 erhält.

Anmerkung. Stossfreie Nutationen erhält man übrigens auch in dem allgemeinen Fall 23) und 24), falls vorausgesetzt wird, dass schon an der Mündung die Geschossaxe und die Tangente einen kleinen endlichen Winkel α_0 mit einander bilden, also wenn für

$$t = 0; \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon; \quad \psi = \psi_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0$$

ist. Die Gleichungen 20) zur Bestimmung der Konstanten werden dann ein wenig andere und man erhält schliesslich:

$$\vartheta = \vartheta_r + \vartheta_n + \vartheta'_n,$$

wo ϑ_r und ϑ_n die Werte von 23) sind und

$$\begin{cases} \vartheta'_n = -\frac{\psi_0}{r-N}[r \cdot \sin\beta_2 - N \cdot \sin(rt - \beta_1)] \\ \qquad + \frac{\varepsilon}{r-N}[r \cdot \cos\beta_2 - N \cdot \cos(rt - \beta_1)]. \end{cases}$$

$$\psi = \psi_r + \psi_n + \psi_n':$$

ψ_r und ψ_n siehe 24)

$$\begin{cases} \psi'_n = -\frac{\psi_0}{r-N}[-r \cdot \cos\beta_2 + N \cdot \cos(rt - \beta_1)] \\ \qquad + \frac{\varepsilon}{r-N}[r \cdot \sin\beta_2 - N \cdot \sin(rt - \beta_1)]. \end{cases}$$

Eben diese Glieder ϑ'_n und ψ'_n liefern die stossfreien Nutationen.

(Schluss folgt.)

Perspektiv-Reisser.

Von

E. Brauer

in Karlsruhe.

Hierzu Tafel V und VI, Fig 1—4.

Der Perspektivreisser ist ein Zeichenapparat zur Erleichterung der Anfertigung eines perspektivischen Bildes auf Grund von zwei Parallelprojektionen eines räumlichen Objektes.

In der Darstellung Figur 1 (Taf. V) ist angenommen, dass von dem Gegenstand Grundriss und Aufriss gegeben sind. Zur Erläuterung der Arbeitsweise wurde die Spitze des Obelisk benützt, welche im Grundriss mit O_1, im Aufriss mit O_2 bezeichnet ist. Beide Punkte werden durch bewegliche Lineale berührt, O_1 durch das Grundrisslineal PO_1, welches um P drehbar ist, O_2 durch das Aufrisslineal KO_2, welches durch Schlitz und Zapfen gezwungen ist, mit der unteren Kante die Richtung durch den Zapfenmittelpunkt K einzuhalten.

Durch mechanische Verbindungen sind zwei andere Lineale gezwungen, den Bewegungen von PO_1 und KO_2 zu folgen, die senkrechte Parallelschiene M_3O_3 und die Fluchtpunktschiene FO_3. Die Lage der ersteren wird allein vom Grundriss vermittelst PO_1, die Lage der letzteren vom Aufriss vermittelst KO_2 bedingt. Der Schnittpunkt der beiden Schienenkanten M_3O_3 und FO_3, nämlich O_3 ist der gesuchte Ort des Punktes O in der Perspektive, zu dessen Darstellung nur erforderlich ist, die Lineale mit O_1 und O_2 in Berührung zu bringen und den Kreuzungspunkt der beiden Schienen mit Nadel oder Bleistiftspitze zu markieren.

Der geometrische Zusammenhang der Bewegungen stützt sich auf eine Beziehung, welche Professor G. Hauck zum ersten Male in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin 1883 Nr. 8 veröffentlichte. In Figur 2 (Taf. VI) sei I ein abgegrenzter Teil der Grundrissebene, genannt Grundrisstafel, entsprechend II die Aufrisstafel, III die Perspektivtafel. A sei das Auge eines Beschauers (Projektionscentrum), P dessen Grundriss, der Fusspunkt, K dessen Aufriss, der Kernpunkt (nach Hauck). Der Strahl AK schneidet die Perspektivtafel in F, dem sogenannten Fluchtpunkte der zu II nor-

malen Geraden, während der Sehstrahl AO die Perspektivtafel im Punkte O_3, dem perspektivischen Bilde von O durchbricht.

Legt man durch AO eine zu I normale und eine zu II normale Ebene — dieselben sind in Figur 2 durch Schraffierung hervorgehoben — so ergiebt erstere in I und III die Schnitte PMO_1 und MO_3 letztere in II und III die Schnitte KLO_2 und FLO_3. Diese Geraden sind geometrisch gleichbedeutend mit den in Figur 1 (Taf. V) mit denselben Buchstaben bezeichneten Lineal- und Schienenkanten, und man erkennt, dass der Punkt M es ist, welcher PMO_1 mit MO_3 verknüpft, während der Punkt L die gleiche Rolle in Bezug auf KLO_2 und FLO_3 spielt.

Offenbar genügen diese beiden Verknüpfungen, um aus den Richtstrahlen PO_1 und KO_2 in Grundriss und Aufriss die Strahlen MO_3 und FO_3, also auch ihren Schnittpunkt O_3 geometrisch abzuleiten, ohne dabei den wirklichen Sehstrahl AO zu benutzen. Es ist also nur die Aufgabe zu lösen, diese geometrische Beziehung in einen zwangläufigen Mechanismus zu übersetzen.

Die räumliche Anordnung der drei Tafeln kann dabei nicht wohl festgehalten werden. Wir bringen sie vielmehr zur Erleichterung des Zeichnens in parallele Lage, ohne doch die Verknüpfungspunkte M und L aus dem Auge zu verlieren.

Zunächst werde die Perspektivtafel III so weit gedreht, bis III mit II parallel wird, die Grundrissspur $III\,III$ in Figur 3 also übergegangen ist in $III'\,III'$ in Figur 4 (Taf. VI). Hierbei löst sich der Verknüpfungspunkt M auf in M_1, den Punkt des Strahles PO_1, welcher am gleichen Ort bleibt und in M_3, den Fusspunkt des Lotes M_3O_3. M_1 und M_3 sind nun durch die Beziehung verknüpft, dass sie auf den Geraden $III\,III$ und $III'\,III'$ in Figur 4 (Taf. VI) liegen, und dass der Winkel M_1PM_3 stets gleich ist dem Winkel γ, um welchen III gegen II gedreht werden musste.

Auch der Punkt L ist durch diese Drehung in zwei Punkte zerfallen. L_2, dem Strahle KO_2 angehörig, deckt sich zunächst noch mit L, während L_3, an der Drehung von III teilnehmend, zunächst in eine neue Lage gelangt ist, deren Grundriss mit L' bezeichnet ist.

Dreht man nun weiter die Aufrisstafel II um ihre untere, die Perspektivtafel aus der Lage $III'\,III'$ um ihre obere Kante in gleichem Drehungssinne soweit, bis sie mit I parallel liegen, so entsteht die in Figur 4 (Taf. VI) dargestellte Lage, und zwar liegen I und II nun in gleicher Höhe, III dagegen darüber. Wie leicht einzusehen, bleiben die Punkte L_2 und L_3 an zwei senkrechte Gerade gebunden, auf denen sie sich, verschiedenen Punkten O_2 entsprechend, so verschieben, dass ihre Höhe sich stets um gleichviel beiderseits verändert, die Strecke L_2L_3 also konstant bleibt. Ersetzt man daher die Strahlen KL_2 und FL_3 durch Linealkanten, so kann zwischen L_2 und L_3 eine Verbindungs-

stange von konstanter Länge als mechanische Verknüpfung angebracht werden.

Wird ferner aus zwei Linealen PM_1 und PM_3 ein fester Winkel γ hergestellt, welcher um P drehbar ist, so kann der Arm PM_3 zur Bewegung eines in der Linie $III' III'$ laufenden Schiebers dienen, welcher mit der Parallelschiene $M_3 O_3$ zu einem Stück vereinigt ist. Die erhöhte Lage der Perspektivtafel gewährt den freien Raum zur unbehinderten Bewegung des Grundrisswinkels $M_1 PM_3$, doch braucht der Höhenunterschied nur einige Centimeter zu betragen.

Wie aus Figur 1 (Taf. V) ersichtlich, besitzt der Grundrisswinkel noch ein drittes zu PM_1 rechtwinkliges Lineal. Dasselbe kann dazu dienen, einen Grundriss anzuvisieren, welcher auf der rechten Seite vom Perspektivbrett liegt, und welcher gegen den links liegenden um 90^0 gedreht ist. Ein zu diesem passender Aufriss würde als Seitenriss zu bezeichnen sein. Das Aufrisswerk ist so eingerichtet, dass eine symmetrische Umstellung mit einigen einfachen Handgriffen ausführbar ist, so dass auch der Seitenriss als Grundlage für die Ausführung der Perspektive dienen kann.

Bei der technischen Durchbildung der Einzelheiten ist besonders Gewicht auf die Erzielung leichten aber doch spielfreien Ganges gelegt. Zu diesem Zweck sind alle vorkommenden Führungen so eingerichtet, dass nur eine Kante als genaue Führungskante dient, während die zweite etwas federt und nur dazu dient, die sichere Anlage des geführten Stiftes oder Schlittens an der Hauptkante zu erzwingen.

Mit Rücksicht auf körperliche Bequemlichkeit sind für die Richtlineale die unteren Kanten als Richtkanten benützt, weil sie dem Auge leichter erreichbar sind. Als Zeichenkanten der Schienen $M_3 O_3$ und $FL_3 O_3$ dienen jedoch die Kanten links und oben, was für Licht von links vorteilhaft ist.

Für die in Fig. 1 (Taf. V) dargestellte Anordnung ist auf die Möglichkeit verzichtet, den Winkel γ zu variieren, derselbe ist 45^0. Wird auch hierdurch die Vielseitigkeit der Benützung beschränkt, so hat anderseits der Apparat an Einfachheit gewonnen, und es ist eine besondere Einstellung entbehrlich geworden. Trotzdem ist das Bild keineswegs auf einen einzigen Fall beschränkt, da man den Grundriss in seinem Felde nicht nur verschieben, sondern auch drehen kann. Letzteres bedingt allerdings, wie das in Fig. 1 (Taf. V) gewählte Beispiel zeigt, als Aufriss eine schiefe Projektion.

Im Vergleich mit dem Hauckschen Perspektiv-Apparat und meiner früheren Ausarbeitung* desselben bleibt der Perspektiv-Reisser insofern zurück, als eine mechanische Verknüpfung zwischen zusammengehörigen Punkten O_1 und O_2 fehlt. Dieser Mangel ist jedoch

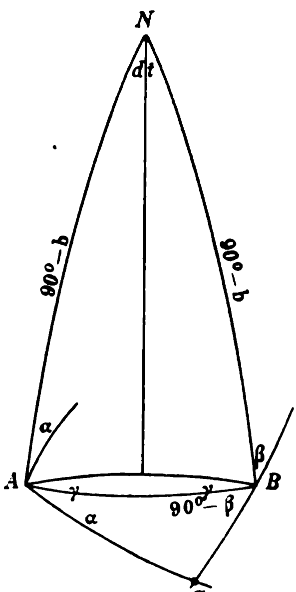
* Hauck-Brauers Perspektiv-Zeichenapparat. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Band 35, S. 782.

weniger erheblich, als es zunächst scheinen mag, da er nur bei Kurv fühlbar wird, indem er hier eine vorhergehende Markierung zugeor neter Punkte mit der Reissschiene nötig macht. Demgegenüber i hervorzuheben, dass der Apparat keinen besonderen Raum beanspruc da ein gewöhnliches Reissbrett als Grundlage dient, dass die erford lichen Handgriffe sich von denen des gewöhnlichen gebundenen Zei nens fast gar nicht unterscheiden, ferner dass der Apparat sich au auf schräger oder senkrechter Fläche anordnen lässt, was besond für grosse Zeichnungen von Vorteil sein würde, endlich dass der Pr nur ein kleiner Bruchteil von dem meines früheren Apparates ist.

Über das Foucaultsche Pendel.

Von **K. Th. Vahlen** in Königsberg i. Pr.

Die Theorie des Foucaultschen Pendels wird entweder mit den Hil mitteln der analytischen Mechanik in voller Strenge oder in elementa aber ganz unbefriedigender Weise gegeben, indem man von der falsch Voraussetzung ausgeht: die Schwingungsebenen in aufeinander folgend Zeitmomenten seien parallel; währe sie sich doch im Erdmittelpunk schneiden.



Bei der fundamentalen Bedeutu des Gegenstandes wird eine hinreiche strenge und doch einfache Behandlu nicht unerwünscht sein.

Es werde zunächst ganz allgeme ein unter dem Einfluss einer Centralkr frei schwingendes ebenes Pendel b trachtet. Eine beliebige Ortsänderu des Aufhängepunktes P ist zusamme zusetzen aus einer Bewegung des innerhalb der Schwingungsebene E u einer Bewegung des P auf einem u das Kraftcentrum M zu E senkrec konstruierten Kreisbogen. Bei der erst Bewegung wird eine Veränderung d Schwingungsebene nicht eintreten; b der zweiten wird die neue Schwingung ebene, wie die alte, auf dem Kreisbogen senkrecht stehen.

Sei nun die Centralkraft die Anziehungskraft der Erde, das Pend nahe der Erdoberfläche über dem Punkte A aufgehängt; die Bewegu des Aufhängepunktes die aus der Erddrehung folgende. Die Breite von sei b, die Poldistanz AN.

Es komme im Zeitmoment dt der Punkt A nach B. Die Schwingung ebene mache in A den Winkel α, in B den Winkel $\beta = \alpha + d\alpha$ mit de

betreffenden Meridian. Der Winkel ANB in Zeitmaß ($360^0 = 24$ Stunden) ist dt; der Winkel zwischen dem Hauptkreisbogen AB und dem Parallelkreisbogen AB sei γ.

Die Bewegung des Pendels von A nach B werde zerlegt in die Bewegung von A nach C längs des Hauptkreisbogens AC, senkrecht zur Schwingungsebene in A; und in die Bewegung von C nach B längs des Hauptkreisbogens CB, senkrecht zu AC. Am Ende der ersten Bewegung wird, nach Obigem, die Schwingungsebene durch CB angegeben; bei der zweiten bleibt sie unverändert. Daraus folgt, dass CB mit dem Parallelkreisbogen BA den Winkel Kompl. β bildet. Zerlegt man das gleichschenklige Dreieck NAB in zwei rechtwinklige, so folgt aus einem derselben:

$$\operatorname{tg}\gamma = \sin b \cdot \operatorname{tg}\frac{dt}{2},$$

oder, wegen der Kleinheit der Winkel:

I) $$2\gamma = dt \cdot \sin b.$$

Das kleine rechtwinklige Dreieck ACB kann als eben betrachtet werden und giebt:

II) $\text{Kompl.}(\alpha + \gamma) = \gamma + \text{Kompl.}\beta$, also $\beta - \alpha$, oder $d\alpha = 2\gamma$.

Aus I) und II) folgt schliesslich:

III) $$d\alpha = dt \cdot \sin b,$$

d. h. die Pendelebene dreht sich proportional der Zeit; der Proportionalitätsfaktor ist gleich dem Sinus der Breite.

Über die kubischen und biquadratischen Gleichungen, von denen eine Wurzel durch rational ausführbare Wurzelausziehungen gefunden werden kann.

Von **K. Th. Vahlen** in Königsberg i. Pr.

Diese Gleichungen lassen sich in einfacherer Weise finden als Kummer* gezeigt hat.

Soll die kubische Gleichung $z^3 - az^2 + bz - c = 0$ (a, b, c rational) eine Wurzel

$$z_1 = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}$$

auf rationalem Wege liefern, so müssen $\sqrt[3]{B}$ und $\sqrt[3]{C}$ rational sein; also wird $z_1 = p$, $z_2 = q + r\sqrt{-3}$, $z_3 = q - r\sqrt{-3}$; p, q, r rational. Dann ist in der That:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B} + \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{C} = -\frac{a}{3} + q \pm r\sqrt{-3},$$

also

$$\sqrt[3]{B} = \frac{a}{3} - q - r, \qquad \sqrt[3]{C} = \frac{a}{3} - q + r,$$

beide rational.

---

* Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1880.

Eine biquadratische Gleichung mit der kubischen Resolvente

$$z^3 - az^2 + bz - c = 0$$

hat die Wurzeln:

$$x_1 = A + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad x_2 = A + \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$

$$x_3 = A - \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_4 = A - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

Die kubische Resolvente muss zu den oben behandelten gehören, al ist $z_1 = p$, $z_2 = q + r\sqrt{-3}$, $z_3 = q - r\sqrt{-3}$; p, q, r rational. Solle die Wurzelausziehungen in x_1 ausführbar sein, so muss $\sqrt{z_1}$ rational, $\sqrt{}$ und $\sqrt{z_3}$ von der Form $\gamma' \pm \delta' \sqrt{-3}$ sein, wo γ' und δ' rational sind. D vier Wurzeln werden:

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma + \delta\sqrt{-3} \quad x_4 = \gamma - \delta\sqrt{-3},$$

wo α, β, γ, δ rational sind. Eine Gleichung mit solchen Wurzeln hat der That die verlangte Eigenschaft; denn es wird $x_1 + x_2$ also $\sqrt{z_1}$ rationa ferner $x_1 - x_2 \pm x_3 \mp x_4$ also $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ von den Formen $\gamma' \pm \delta' \sqrt{-}$ woraus die erforderlichen Eigenschaften auch für die kubische Resolvente folge

Will man Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen vermeiden, so nehm man die Cartesischen Formeln:

$$x_1 = A + \sqrt{z_1} + \sqrt{a - z_1 + 2\sqrt{\frac{c}{z_1}}}, \quad x_2 = A + \sqrt{z_1} - \sqrt{a - z_1 + 2\sqrt{\frac{c}{z_1}}}$$

$$x_3 = A - \sqrt{z_1} + \sqrt{a - z_1 - 2\sqrt{\frac{c}{z_1}}}, \quad x_4 = A - \sqrt{z_1} - \sqrt{a - z_1 - 2\sqrt{\frac{c}{z_1}}}$$

Setzt man, wie erforderlich:

$$z_1 = p, \quad a = p + 2q, \quad c = p(q^2 + 3r^2),$$

so wird:

$$x_1 = A + \sqrt{p} + \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}, \quad x_2 = A + \sqrt{p} - \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}$$

$$x_3 = A - \sqrt{p} + \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}, \quad x_4 = A - \sqrt{p} - \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}$$

Soll x_1 sich durch ausführbare Wurzelausziehungen ergeben, so müsse ferner $\sqrt{p}$ und $\sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}$ rational sein; dann wird auch

$$\frac{\sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}}{\sqrt{-3}} = \frac{2r}{\sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}}$$

rational, also die vier Wurzeln: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma + \delta\sqrt{-3}$, $x_4 = \gamma - \delta\sqrt{-3}$; α, β, γ, δ rational. Eine Gleichung mit solchen Wurzel hat die verlangte Eigenschaft. Denn die Wurzeln der kubischen Resolvent sind rationale Funktionen von $x_1x_2 + x_3x_4$, $x_1x_3 + x_2x_4$, $x_1x_4 + x_2x_3$, als von den Formen p, $q + r\sqrt{-3}$, $q - r\sqrt{-3}$; p, q, r rational. Ferner i $x_1 + x_2$ und $x_1 - x_2$ also $\sqrt{p}$ und $\sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + 3r^2}}$ rational.

ZEITSCHRIFT

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896), B. WITZSCHEL (1856–1859), M. CANTOR (1859–1896), E. KAHL (1860–1892).

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND DR. M. CANTOR.

43. BAND. 4. u. 5. HEFT.

MIT 26 TEXTFIGUREN.

Ausgegeben am 13. September 1898.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1898.

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Kreiselbewegungen der rotierenden Langgeschosse während ihres Fluges.

Von

Prof. Dr. Carl Cranz

in Stuttgart.

Schluss.

D. Vergleichung der vorstehenden Resultate mit denen der Kreiseltheorie.

Mit einem Kreiselapparat könnte, wenn auch etwas umständlich, ie Bewegung der Geschossaxe um den Schwerpunkt S auf folgende Veise nachgeahmt werden:

Man denke sich einen Kreisel, dessen Schwerpunkt S fester Untertützungspunkt ist, mit seiner Figurenaxe, zugleich Hauptträgheitsaxe, ertikal gestellt und in dieser Lage in rasche Rotation versetzt. Eine ussere Kraft K drücke in einem Punkt L der Axe ($SL = h_1$) auf iese, zunächst in der vertikalen Richtung durch den Schwerpunkt. Tach und nach werde die Neigung der Kraftrichtung gegen die Vertikale ach einem bestimmten Gesetz vergrössert; zugleich variiere die Grösse er Kraft und rücke der Angriffspunkt L gegen den Schwerpunkt S ı. (Unter Umständen sei auch ein seitlicher Anfangsstoss auf die xe ausgeübt, und nehme ferner die Rotationsgeschwindigkeit des reisels um die Figurenaxe mit der Zeit ab.)

Bei dieser Annahme entspricht die anfängliche Richtung der Kreiselxe der Anfangsrichtung der Flugbahntangente, die Kraft K der Luftiderstandsresultanten, der Punkt L dem variablen Angriffspunkt dieser esultanten auf der Axe. Man erkennt unmittelbar, dass dieses Proem wesentlich über dasjenige der gewöhnlich behandelten Kreiselewegung hinausgeht; selbst dann, wenn man, wie es hier geschehen t, nur den normalen Luftwiderstand, nicht auch die Reibung zwischen uft und Geschoss berücksichtigt. Beide Probleme, das der Geschossewegung und das der gewöhnlichen Kreiselbewegung, würden hinchtlich der mechanischen Behandlung erst dann identisch werden, enn der Luftwiderstand nach Grösse und Richtung konstant bliebe nd in demselben Punkt der Axe angriffe, was wieder die andere Bengung in sich schlösse, dass der Geschossschwerpunkt sich geradıig gleichförmig bewegte.

Für diese spezielle Annahme mögen die in Betracht kommende Resultate der Kreiseltheorie* — für die Zwecke mancher Leser etwa ausführlicher — hier zusammengestellt werden, übrigens sogleich m den Ausdrücken der Geschossbewegung.

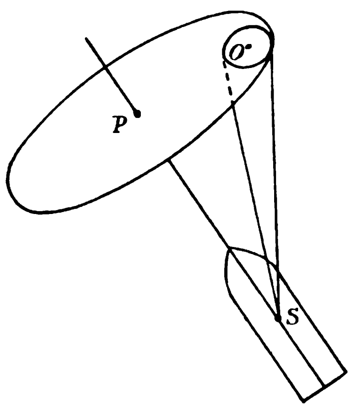
I. Bewegung im luftleeren Raum. Die Geschossaxe fäll mit der anfänglichen Rotationsaxe zusammen und ist zu gleich Hauptträgheitsaxe.

In diesem Fall bleibt die Geschossaxe während des ganzen Geschos flugs sich selbst parallel. Dasselbe würde beobachtet, wenn im luf erfüllten Raum die Luftwiderstandsresultante jederzeit durch de Schwerpunkt ginge.

II. Bewegung im luftleeren Raum. Die anfänglich Rotationsaxe bildet mit der Figurenaxe und Hauptträgheits axe durch den Schwerpunkt einen sehr kleinen Winkel.

Den Schwerpunkt S des Geschosses denken wir uns fest ode was auf dasselbe hinauskommt, wir folgen in Gedanken dem Geschos und betrachten von hinten desse Bewegung allein bezüglich de Schwerpunkts S. Man hat sich nu zwei Kreiskegel zu denken, erster einen im Geschoss festen und m diesem beweglichen Kegel, desse Spitze S und dessen Axe die Figuren axe oder Geschossaxe SP ist, zweiten einen im Raum festen Kegel S(ebenso mit der Spitze in S; beid berühren sich nach einer gemein schaftlichen Mantellinie. Der beweg liche Kegel SP rollt auf dem feste SO ohne zu gleiten ab; die augen blickliche gemeinschaftliche Berüh ungsmantellinie ist die momentane Drehaxe, um welche in de betreffenden Moment die Drehung stattfindet. SO stellt die Richtun der Laufaxe vor (Fig. 17).

Fig. 17.



III. Bewegung im lufterfüllten Raum. Die Geschossax SP bildet zu irgend einer Anfangszeit den Winkel γ_0 ode S_1SO mit der Richtung S_1S des Luftwiderstands. Kein An fangsstoss.

In den folgenden Figuren ist der Schwerpunkt S vor der Zeich nungsfläche, senkrecht über S_1 vorzustellen; P sei derjenige Punkt de

* Vergl. hierüber das vollständigste Werk: F. Klein und A. Sommerfel „Über die Theorie des Kreisels", Leipzig von 1897 an, B. G. Teubner, Kap. IV, §§ und 2; Kap. V, § 2. (Herr A. Sommerfeld hatte die Güte, aus dieser in kurze erscheinenden Fortsetzung einige Resultate, insbesondere die Kurventypen b treffend, dem Verfasser im voraus mitzuteilen.)

ıxe, für welchen $SP = 1$ m ist; sämtliche Kurven liegen auf einer ɩugelfläche um S mit Radius 1 m. Man hat vier Fälle zu unterscheiden.

a) Greift die Resultante des Luftwiderstands vor dem Schwer-ɔunkt, also zwischen Geschossspitze und Schwerpunkt auf der Geschoss-ıxe an, und dies ist bei der jetzt üblichen Form der Langgeschosse neistens der Fall, und ist ausserdem der Lauf mit rechtsläufig ge-vundenen Zügen oder Rechtsdrall versehen, so besteht die Bahn der Ge-

Fig. 18.

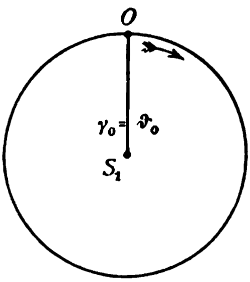


Fig. 19.

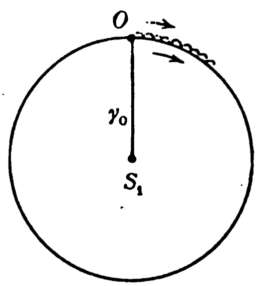


Fig. 20.

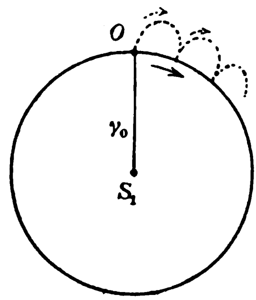


Fig. 21.

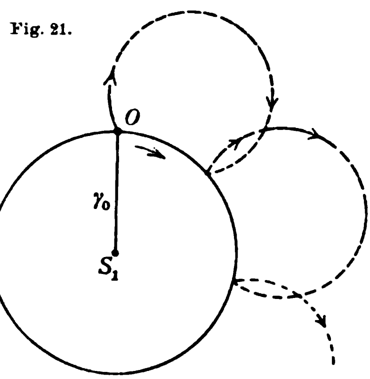


Fig. 22.

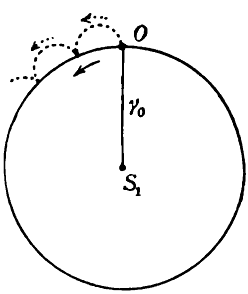
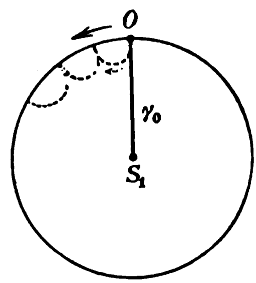


Fig. 23.



chossspitze aus den gestrichelt gezeichneten mehr oder weniger grossen ɜögen (Fig. 18 bis 21), welche auf dem ausgezogen gezeichneten Grenz-ɾreis mit Radius SO_1 oder γ_0, dem Präzessionskreis, aufstehen und ıach aussen gehen.

Und zwar, falls der Bruch $(C^2 r^2):(4AM)$, den wir Stabilitäts-aktor σ nennen wollen, gross ist, sind diese Bögen äusserst klein, so ıass die Bahn für das Auge der Präzessionskreis selbst ist (Fig. 18). Die ɩichtung des ausgezogenen Pfeils giebt die Bewegungsrichtung der Ge-chossspitze an. Sogleich an dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass ieser konstante Kreis (Fig. 18) das Analogon zu dem veränderlichen ɩreis (Fig. 12, 13, siehe 3. Heft) ist, welcher in dem allgemeineren Fall er Geschossbewegung von dem Punkt P der Geschossaxe, dem Geschoss-nde, wie wir P heissen wollen, beschrieben wird. Wenn der Wert es Stabilitätsfaktors σ abnimmt, dadurch, dass r abnimmt oder M zu-ımmt, oder beides der Fall ist, so erhält man der Reihe nach die

Figuren 19 bis 21, mit immer grösser werdender Amplitude AB (Fig.2
der Nutationsbögen. Diese Amplitude ist, wenn sie klein ist, n
genügender Annäherung gleich $\frac{2 \cdot MA}{C^2 r^2} \cdot \sin \gamma_0$; falls sie gross ist, h
man $\cos (S_1 B) = \sigma \underline{(+)} \sqrt{\sigma^2 + 1 - 2 \cdot \sigma \cdot \cos \gamma_0}$; zieht man von dem erh
tenen Winkel $S_1 B$ den Winkel $S_1 A$ oder γ_0 ab, so erhält man
Amplitude AB oder Winkel ASB.

Der Winkel $S_1 SB$ bleibt $< 90^0$, falls $\sigma > (1:2 \cos \gamma_0)$ ist. Wi
σ noch kleiner, so fliegt das Geschoss zeitweise in einer Lage, wo

Fig. 24.

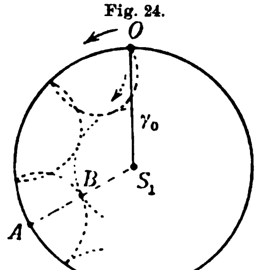


Fig. 25.

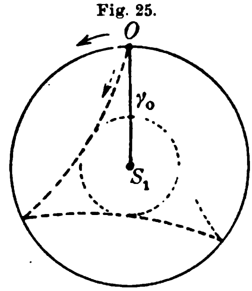


Fig. 26.

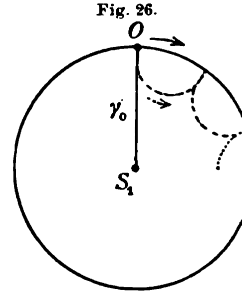


Fig. 27.

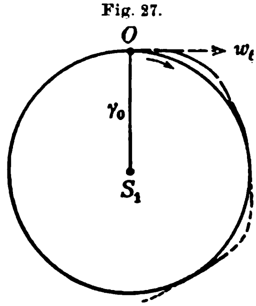


Fig. 28.

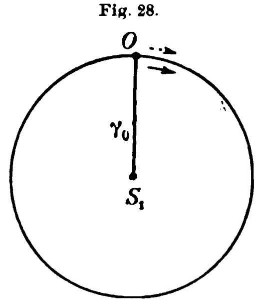
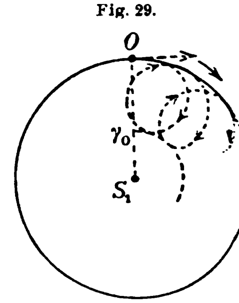


Fig. 29.



die Axe senkrecht zur Bewegungsrichtung des Schwerpunkts ste
und beginnt weiterhin, nämlich bei weiterer Abnahme von σ, si
nach hinten zu überschlagen.

b) Liegt bei Linksdrall der Angriffspunkt vor dem Schwerpun
so hat man ähnliche Kurvenformen wie vorhin; nur sind die beid
Pfeilrichtungen umgekehrt, wie z. B. Figur 22.

c) und d) Liegt der Angriffspunkt der Resultanten auf der A
hinter dem Schwerpunkt, zwischen Geschossboden und Schwerpun
so befinden sich die Bögen der stossfreien Nutation auf der inner
Seite des Präzessionskreises (Fig. 23 bis 26). Dabei beziehen sich
drei Figuren 23 bis 25 auf den Fall der Rechtsrotation, des Recht
dralls; man erkennt, wie mit abnehmendem Stabilitätsfaktor σ
Amplitude AB successiv wächst, wie also der die Bögen nach inn
zu begrenzende Kreis kleiner und kleiner wird. Die Figur 26 dageg
zu welcher die entsprechenden anderen für abnehmendes σ zu denk
sind, bezieht sich auf den Fall des Linksdralls.

IV. Bewegung im lufterfüllten Raum. Die Geschossspitze
halte anfangs einen zur Präzessionsbewegung (Pfeil ausgezogen)
ngentiellen Stoss w_t (Pfeil gestrichelt). Dabei sei w_t positiv ge-
:hnet, wenn die Pfeile gleichgerichtet sind, andernfalls negativ.

a) Der Anfangsstoss erfolge in derselben Richtung, in der die
äzessionsbewegung vor sich geht (w_t positiv). Man erhält der Reihe
ch die Figuren 27 bis 33, falls entweder bei gleichem Wert des
abilitätsfaktors σ die Grösse w_t des Stosses wächst oder bei gleichem
oss σ abnimmt, oder wenn zugleich w_t wächst und σ abnimmt.

Verfolgt man diese Figuren, so bemerkt man, dass, bei gleichem
und wachsendem w_t, anfangs die Bögen sich abflachen, dann mit

$$w_t = (Cr - \sqrt{C^2r^2 - 4AM \cdot \cos\gamma_0}) : (2A\cos\gamma_0)$$

nutationsloser Kreis beschrieben wird, mit einer Winkelgeschwindig-
it gleich w_t; weiterhin treten Nutationsbögen nach innen auf; der
se Bögen nach innen begrenzende, mit dem Präzessionskreis konzen-

Fig. 30.

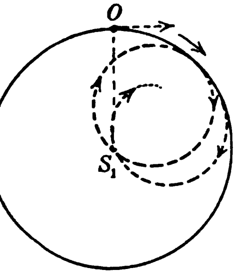


Fig. 31.

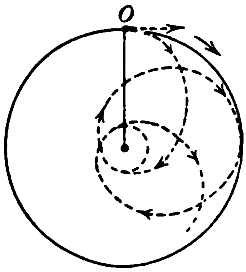
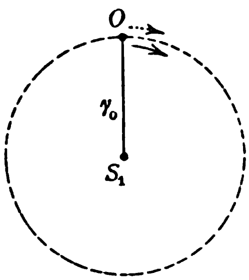


Fig. 32.



sche Kreis schnürt sich immer mehr ein, und er ist zum Punkt S_1
vorden, d.h. die Bögen gehen alle durch S_1 (Fig. 30), wenn

$$w_t = \frac{Cr}{A(1+\cos\gamma_0)}$$

vorden ist. Von da ab erweitert sich, mit zunehmendem Stoss w_t,
innere Grenzkreis wieder und, falls $w_t = \frac{Cr}{A \cdot \cos\gamma_0}$ ist, hat man
eder reguläre Präzession (Fig. 32), jedoch wird diesmal der Grund-
is mit eben dieser grösseren Winkelgeschwindigkeit $\frac{Cr}{A \cdot \cos\gamma_0}$ zurück-
egt (man kann daher in diesem Fall den Grundkreis selbst als
en Nutationsbogen spezieller Art betrachten); wächst w_t noch mehr,
werden die Bögen immer grösser (Fig. 33), bis schliesslich das Ge-
oss nach hinten überschlägt, und für $w_t = \infty$ regelmässig und
nell die Geschossspitze von vorn nach hinten Rotationen um S aus-
rt, in einer Ebene durch S, welche den Grundkreis in O berührt.

b) Erfolgt der auf die Geschossaxe senkrecht ausgeübte Anfangs-
ss tangential, aber in entgegengesetzter Richtung als die Prä-

zessionsbewegung vor sich geht, ist also w_t negativ, so werde Nutationsbögen wiederum (bei Rechtdrall) rechtsläufig beschriebe müssen also, da die Nutationsbögen immer in der Richtung des St beginnen, jetzt auf der Aussenseite des Präzessionskreises liegen. Amplituden sind um so grösser, je grösser der Stoss, der Radius γ Grundkreises und das Luftwiderstandsmoment, ferner je kleiner $\frac{C}{A}$ In den beiden Figuren 34 und 35 giebt wieder der ausgezogene Pfe Richtung der Präzessionsbewegung, der gestrichelte die Stossrichtun Bei absolut wachsendem Stoss z. B. wird nach und nach einmal der eintreten, dass die Geschossaxe SP senkrecht zur Bewegungsrichtun steht, und sodann der Winkel PSS_1 noch grösser wird, bis schlie die Geschossaxe regelmässige Rotationen um den Schwerpunkt S,

Fig. 33.

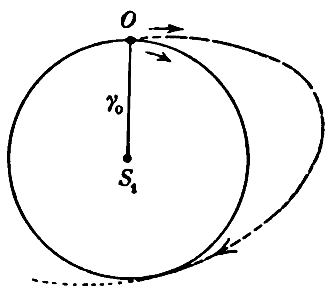


Fig. 34.

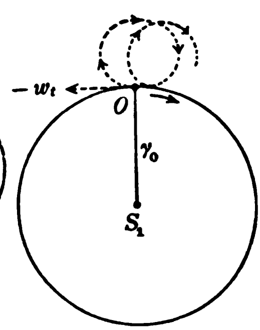
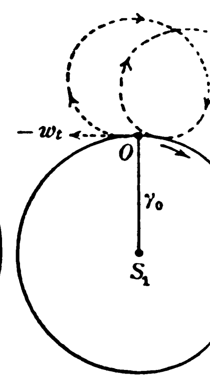


Fig. 35.



vorn nach hinten und zurück, in einer den Grundkreis berühre Ebene durch S ausführt; dies ist der Fall für

$$w_t = -\frac{Cr}{A(1-\cos\gamma_0)}.$$

Das Verhalten der Geschossspitze in den anderen Fällen, nämlich die Züge links gewunden sind oder der Angriffspunkt Luftwiderstandsresultanten hinter S liegt oder beides zutrifft, lässt daraus leicht ableiten.

V. Dasselbe. Jedoch werde anfangs auf die Gesch axe an der Spitze ein seitlicher Stoss w_s ausgeübt, wel senkrecht zur Präzessionsbewegung gerichtet ist.

Dabei sei w_s positiv gerechnet, wenn der Stoss in der Richtung negativ, wenn er in der Richtung OS_1 erfolgte. Wiederum möge nu Annahme: Rechtsdrall und Angriffspunkt vor dem Schwerpunkt Er nung finden. Immer beginnen die (gestrichelt gezeichneten) Nutat bögen in der Stossrichtung; daher hat man jetzt gewisse mittlere L derselben zwischen denen der Figuren 27 bis 33 und denjenigen Figuren 34, 35. Ein solcher Fall ist in Figur 36 angegeben.

Die Grössenbeziehungen in allen diesen Fällen lassen sich aus en Grundgleichungen der Kreiseltheorie (Flächensatz und Satz von er lebendigen Kraft) mit c und C, als Integrationskonstanten, ab-eiten:

$$35)\qquad A\cdot\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2+A\sin^2\gamma\cdot\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2=-2M\cdot\cos\gamma+c-Cr^2$$

$$36)\qquad A\sin^2\gamma\cdot\frac{d\delta}{dt}=C_1-Cr\cdot\cos\gamma.$$

Hier ist γ der Winkel PSS_1 zwischen Geschossaxe SP und ichtung SS_1 des Luftwiderstandes zur Zeit t, δ der Winkel der Ebene $^{\prime}SS_1$ mit der Anfangslage OSS_1 derselben. Die Winkelgeschwindigkeit es Anfangsstosses um den Schwerpunkt S habe die Komponenten w_t und $_s$; beide Stösse seien senkrecht zur Geschossaxe SO, aber die eine w_t enkrecht zur Ebene SS_1O, die andere w_s in dieser Ebene gerichtet; $_t$ heisse der (bezüglich des Präzessionskreises) tangentielle Anfangsstoss, $_s$ der senkrechte. Man hat dann für

$$t=0:\gamma=\gamma_0,\quad \delta=0;\quad \frac{d\gamma}{dt}=w_s,\quad \frac{d\delta}{dt}=w_t.$$

Bestimmt man damit die Integrationskonstanten c und C_1 und iminiert sodann $\frac{d\delta}{dt}$ aus 35) und 36), so erhält man die folgende

Fig. 36.

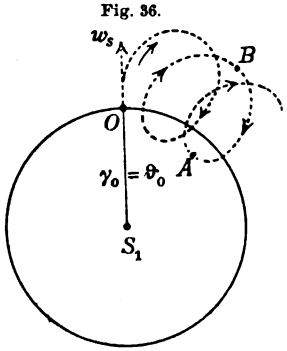
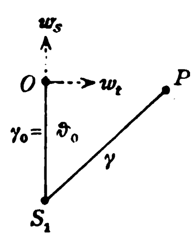


Fig. 37.



ifferentialgleichung zwischen γ und t, welche für jeden Moment t en Winkel γ zwischen Geschossaxe SP und Bewegungsrichtung SS_1 es Schwerpunkts liefert:

$$A^2\cdot\sin^2\gamma\cdot\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2=A\cdot\sin^2\gamma\cdot[2M\cdot(\cos\gamma_0-\cos\gamma)+A\cdot w_s^2+A\cdot\sin^2\gamma_0\cdot w_t^2]$$
$$-[A\cdot\sin^2\gamma_0\cdot w_t+Cr(\cos\gamma_0-\cos\gamma)]^2.$$

Denkt man sich diese Gleichung, unter Umständen mechanisch it Hilfe des Apparats von Abdank-Abakanowitz, integriert, so iebt die Gleichung 36) für jeden Moment t den Betrag der Drehung δ er Ebene PSS_1 um SS_1.

Setzt man in 37) $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, so erhält man die grössten und kleinst Werte von γ; mit $\cos\gamma = u$, $\cos\gamma_0 = u_0$, $\sin\gamma_0 = u_1$ wird somit:

$$38)\quad \begin{cases} A(1-u^2)[2M(u_0-u) + A\cdot w_s^2 + A\cdot u_1^2\cdot w_t^2] \\ \quad -[A\cdot u_1^2\cdot w_t + Cr\cdot(u_0-u)]^2 = 0. \end{cases}$$

Dies ist diejenige Gleichung dritten Grades in u, deren Auflösu den kleinsten und grössten Winkel PSS_1 giebt; zwei Wurzeln u lieg nämlich zwischen -1 und $+1$; die Gleichung lässt sich schreiben:

$$39)\quad \begin{cases} u^3 - u^2(u_0 + i_1 u_1^2 + i_2 + i_3) + u(-1 + 2 i_3 u_0 + i_4 u_1^2) \\ \quad = i_3 u_0^2 + i_1 u_1^4 + i_4 u_1^2\cdot u_0 - i_2 - i_1 u_1^2 - u_0, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung:

$$i_1 = \frac{A\cdot w_t^2}{2M},\quad i_2 = \frac{A\cdot w_s^2}{2M},\quad i_3 = 2\sigma = \frac{C^2 r^2}{2MA},\quad i_4 = \frac{Cr\cdot w_t}{M}.$$

Speziell, wenn nur ein tangentieller Anfangsstoss stattfand, $w_s =$ war, so lässt sich in 38) der Faktor $u_0 - u$ heraussetzen, d. h. es in diesem Fall $\gamma = \gamma_0$ die eine Lösung von 38) oder 39), die N tationsbögen sitzen in diesem Fall, wie es z. B. die Figuren 29 und angeben, auf dem festen Präzessionskreis mit Radius γ_0 auf.

Die Gleichung 39) reduziert sich in diesem Fall auf die folgen

$$40)\quad u^2 - u(i_3 + i_1 u_1^2) = 1 - i_3 u_0 - i_4 u_1^2 + i_1 u_0 u_1^2.$$

Diejenige Wurzel $u = \cos\gamma$, welche zwischen -1 und $+1$ lie giebt den anderen Begrenzungskreis der Nutationsbögen.

Ist hierbei der Stoss w_t so klein, dass man $A w_t^2$ gegen $2M$ v nachlässigen kann, so lässt sich für kleine Nutationsamplituden e Näherungswert der Amplitude nach Klein und Sommerfeld so finde man ersetzt u^2 durch den Anfangswert u_0^2 und hat, da $u_1^2 = 1 - u_0^2$:

$$-u\cdot i_3 = u_1^2 - i_4 u_1^2 - i_3 u_0$$

oder

$$\frac{u_0 - u}{u_1} = \sin\gamma_0\cdot\left(\frac{2MA}{C^2 r^2} - \frac{2A}{Cr}\cdot w_t\right);$$

bezeichnet man nun die grösste Amplitude der Nutationsbögen mit setzt $\gamma = \gamma_0 \pm \varepsilon$ und entwickelt für kleine ε, so ist $u = u_0 \mp u_1\cdot\varepsilon$, al

$$41)\quad \text{die Amplitude } \varepsilon = \pm\sin\gamma_0\cdot\left(\frac{2MA}{C^2 r^2} - \frac{2A}{Cr}\cdot w_t\right).$$

Wenn endlich überhaupt kein Anfangsstoss stattfand, $w_s = w_t =$ so wird der grösste oder kleinste Wert von γ und damit die Amplitu $\gamma - \gamma_0$ berechnet aus

$$u^2 - u\cdot i_3 = 1 - i_3 u_0,$$

oder es ist für den Winkel γ dieses zweiten Begrenzungskreises:

$$42)\quad \cos\gamma = \sigma (\pm) \sqrt{\sigma^2 + i - 2\sigma\cdot\cos\gamma_0},$$

wobei σ der Stabilitätsfaktor $(C^2 r^2) : (4MA)$ ist.

Ein Näherungswert der Amplitude AB oder ε ist dann nach 41) der folgende:

$$43)\qquad \text{Amplitude} = \frac{\sin\gamma_0 \cdot 2MA}{C^2 r^2}.$$

Die Weiterverfolgung der Gleichungen 35) und 36) zeigt sodann, dass die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\delta}{dt}$, mit welcher der Präzessionskreis beschrieben wird, $\frac{M}{Cr}$ ist; also die Periode der Präzessionsbewegung ist

$$44)\qquad T = \frac{2\pi \cdot Cr}{M}$$

genauer ist für die langsame reguläre Präzession:

$$45)\qquad T = \frac{2\pi \cdot 2A \cdot \cos\gamma_0}{Cr - \sqrt{C^2r^2 - 4AM\cos\gamma_0}}.$$

Ferner wird ein Nutationsbogen bei gegebenem Stoss w_t in der Zeit beschrieben (vergl. Klein-Sommerfeld l. c.):

$$46)\qquad T_1 = \frac{2\pi \cdot A}{\sqrt{C^2r^2 - 4AM + A^2 \cdot w_t^2 u_1^2}},$$

wofür man, bei nicht sehr grossen γ_0 und w_t, meist mit genügender Annäherung nehmen kann:

$$47)\qquad T_1 = \frac{2\pi \cdot A}{\sqrt{C^2r^2 - 4AM}};$$

ist der Stabilitätsfaktor σ genügend gross, so erhält man hieraus, durch Reihenentwickelung nach Potenzen von $\frac{1}{\sigma}$ und Verzicht auf die höheren Potenzen von der zweiten ab:

$$48)\qquad T_1 = \frac{2\pi}{\frac{Cr}{A} - \frac{2M}{Cr}}.$$

Überblickt man nunmehr die aus der Kreiseltheorie gezogenen Resultate und die früheren Ergebnisse für die Geschossbewegung um den Schwerpunkt, so fällt unmittelbar die folgende Analogie in die Augen: Was bei der Kreiselbewegung der konstante Präzessionskreis, der (ausgezogene) Grenzkreis um S_1 mit Radius S_1O ist (Fig. 18 etc.), welcher durch die Anfangslage O des Kreiselendes P geht und an welchen die Bögen der Nutationsbewegung sich anlehnen, das ist bei der Geschossbewegung der (ebenso ausgezogen gezeichnete) veränderliche Präzessionskreis, der so variiert, dass sein Radius OM (Fig. 12, 13, 14, siehe 3. Heft dieser Zeitschr.) sich stetig vergrössert und sein Mittelpunkt nach abwärts und mehr oder weniger (bei Rechtsdrall) nach rechts rückt, der aber immer durch den Anfangspunkt O hindurchgeht; er wird in der variablen Zeit $T = 2\pi Cr : M$ beschrieben; die Nutationsbögen lehnen sich im Fall der Geschossbewegung gleichfalls an diesen variablen Kreis an.

Eben durch diese Veränderung des Präzessionskreises macht sich die Krümmung der Flugbahn geltend, also die Thatsache, dass im Verlauf der Flugbahn der Winkel zwischen der Anfangstangente und

der jeweiligen Flugbahntangente sich stetig vergrössert; und in d
Unsymmetrie des Präzessionskreises bezüglich der Vertikalebene dur
die Tangente ST liegt die Ursache und das bestimmende Moment d
Seitenabweichung des Geschosses, so dass für letztere die Grös
f massgebend ist.

Die an die langsame Präzessionsbewegung sich anreihenden, ras
verlaufenden Nutationen sind nicht in erster Linie für die konstan
Seitenabweichung,* sondern für den durchschnittlichen Gesamtwidersta
der Luft und damit für die Verzögerung bestimmend, welche der Gescho
schwerpunkt erfährt; mit den Nutationen ändert sich die Schussweite u
die Trefffähigkeit.

In dem speziellen Fall, wo die Flugbahn sich auf eine Gera
reduziert ($\omega = 0$), fällt das Problem der Geschossbewegung mit de
der Kreiselbewegung dann zusammen, wenn wir den Luftwidersta
nach Grösse und Richtung konstant nehmen; wie früher erwähnt, s
aber in der That in jedem der einzelnen Intervalle, in welche die B
wegung des Geschosses zerlegt wird, ein konstanter Mittelwert von
angenommen werden; somit müssen auch die betreffenden Ausdrüc
beiderseits identisch sein. Wir sind also im stande, mit Hilfe d
Kreiselbewegung jetzt nachträglich eine oben angekündigte klei
Korrektion an unseren früheren Formeln für die Geschossbewegu
vorzunehmen: Das Gleichungssystem 14) und 15) konnte nur m
Vernachlässigung gelöst werden; es wurden z. B. die Ableitung
$\frac{df_3}{dt}$ und $\frac{df_4}{dt}$ neben $r \cdot f_4$ und $r \cdot f_3$ vernachlässigt, ausserdem fand ei
Vernachlässigung in 3) und 3a) statt; dadurch entstehen Ungenaui
keiten. Die Kreiseltheorie legt es nahe, in

$$f_3 = -q_1 : r \quad \text{und} \quad f_4 = -p_1 : r$$

statt r vielmehr $\frac{Cr}{A}$ zu nehmen. Verfolgt man damit die weiteren B
rechnungen, so ist in 23) und 24) statt $r - N$ zu nehmen: $\frac{Cr}{A} - N$ u
statt $\beta_1 = \frac{A-C}{A} rt + \frac{M}{Ar} t$ zu setzen:

$$\beta_1 = \frac{A-C}{A} rt + \frac{M}{Cr} t.$$

Damit geht die Gleichung 31) über in

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{Cr}{A} - 2\frac{M}{Cr}},$$

übereinstimmend mit 48); ferner wird Ausdruck 34) zu

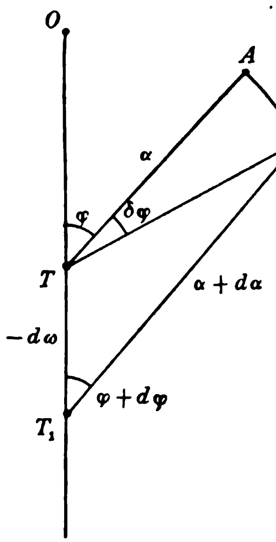
$$\frac{2 \cdot \vartheta_0 \cdot N}{\frac{Cr}{A}} \quad \text{oder zu} \quad \frac{2 \cdot \vartheta_0 \cdot A \cdot M}{C^2 r^2},$$

übereinstimmend mit 43); 28) stimmte schon zuvor mit 44). In de
Zusammenstellung der Resultate sind diese Korrekturen verwertet.

* Ist die Präzessionsbewegung Null und sind die Nutationen gross, so werde
dieselben Abweichungen abwechselnd nach rechts und nach links erzeugen.

Es dürfte zum Schluss dieses Abschnittes angezeigt sein, mit
nigen Worten das Näherungsverfahren zu erwähnen, welches Saint-
obert anwandte, und welches sich seitdem mit mehr oder weniger
bänderungen durch eine grössere Anzahl von Arbeiten*) hindurchzog:
er Schwerpunkt S befinde sich vor der Zeichnungsebene (Fig. 38)
der Flugbahnvertikalebene SOT. Zur Zeit t sei ST die Tangente,
A die Geschossaxe. Der Winkel zwischen der Vertikalebene SOT
d der „Stossebene" SAT zur Zeit t sei φ; der Winkel zwischen
ngente ST und Axe SA (öfters Nutation genannt) sei α. Es wird
nächst, ganz analog der Kreiseltheorie, der Fall behandelt, dass
Tangente ST ihre Richtung beibehalte; zur Zeit $t + dt$ ist φ um
gewachsen, man hat annähernd

Fig. 38.



a) $$\delta\varphi = \frac{M}{Cr}\cdot dt.$$

nmehr wird auch die Richtungsänderg der Tangente folgendermassen einzogen: Zur Zeit $t + dt$ ist das schossende A nach B, das Tangentende T nach T_1 gelangt, wobei

$$TT_1 = -\,d\omega$$

a mit wachsendem t die Tangentenigung ω abnimmt); der Winkel TT_1B jetzt $\varphi + d\varphi$; AT ist zu BT_1 oder $+\,d\alpha$ geworden.

Fällt man von T auf BT_1 das Lot, hat man b) $d\alpha = -\cos\varphi\cdot d\omega$; und Anwendung des Sinussatzes auf Δ BT_1 giebt, mit sehr kleinen Ändergen $d\varphi$ und $d\alpha$, die Beziehung

c) $$d\varphi = \delta\varphi - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot d\alpha = \frac{M}{Cr}\cdot dt - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot d\alpha.$$

Die Gleichung b) verwandelt sich mit der allgemeinen Beziehung

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g\cdot\cos\omega}{v}$$

r die Bewegung des Schwerpunkts ohne Rücksicht auf die Rotation ergl. des Verfassers Kompendium S. 87) in die folgende:

* Comte Paul de Saint-Robert, Études sur la trajectoire que décrivent projectiles oblongs, Paris 1860, 2. Teil — M. Astier, essai sur le mouvement s projectiles oblongs, Paris 1873. — J. M. de Tilly, balistique, Paris 1875. — mte de Sparre, mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein et, 1875; vergl. auch Mayevski-Klussmann, über die Lösung des Problems s direkten und indirekten Schiessens. Berlin 1886, S. 77flg.; ferner de Sparre, le mouvement des projectiles dans l'air, Paris 1891. — Muzeau, sur le uvement des projectiles dans l'air; revue d'Artillerie, tome 12 (1878) p. 422 d 495; t. 13 p. 31, t. 14 p. 38; ferner Muzeau, cours d'Artillerie, balistique érieure 1883, 1. Teil. — Auf dasselbe Verfahren läuft auch die Lösung von sal schliesslich hinaus: Résal, mécanique générale; t. I p. 375, Gleichungen 9)

d) $$d\alpha = +\cos\varphi \cdot \frac{g \cdot \cos\omega}{v} \cdot dt;$$

diese und c) bilden die beiden Grundgleichungen. Wird aus beide dt eliminiert, so hat man die Differentialgleichung erster Ordnun zwischen α und φ:

e) $$\frac{d(\sin\varphi)}{d\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \sin\varphi = \frac{M \cdot v}{Cr \cdot g \cos\omega}.$$

Diese lässt sich unter Zugrundelegung konstanter Mittelwerte vo M, v, ω während kleiner Zeitintervalle integrieren und liefert

f) $$\sin\varphi = \frac{F}{\sin\alpha}(1 - \cos\alpha);$$

wobei $F = \dfrac{M \cdot v}{Cr \cdot g \cdot \cos\omega}$ ist und die Integrationskonstante aus de Bedingung: $t = 0$, $\varphi = 0$, $\alpha = 0$ bestimmt wurde. Damit ist φ a Funktion von α ausgedrückt, mit d) lässt sich somit α in Funktio von t ermitteln; es wird

g) $$2p \cdot \cos\alpha = n + \sqrt{4mp + n^2} \cdot \cos\left(\sqrt{p} \cdot \frac{g \cdot \cos\omega \cdot t}{v}\right),$$

wobei $m = 1 - F^2$, $n = 2F^2$, $p = 1 + F^2$.

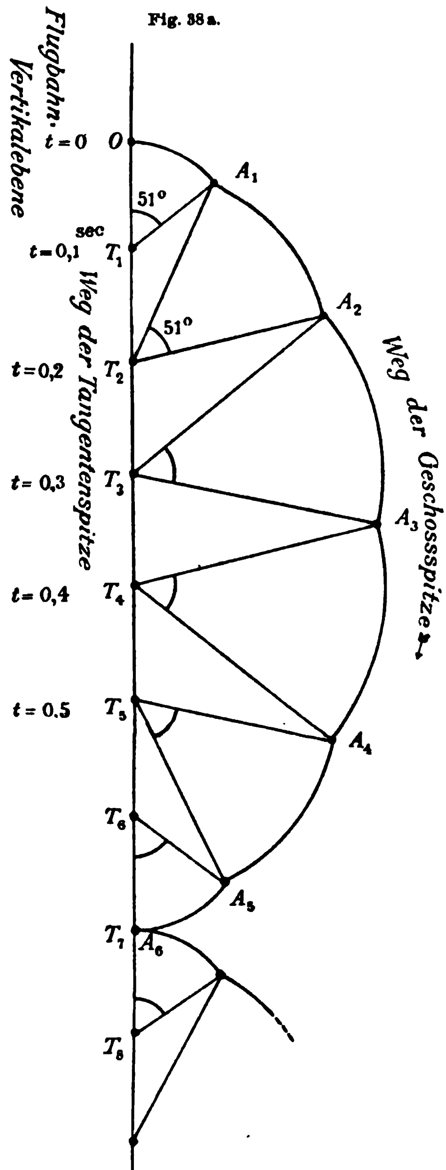
Dieses Lösungsverfahren, dessen Grundzüge wenigstens hier an gedeutet sind, wurde in neuerer Zeit besonders von v. Wuich (sieh oben) näher ausgebildet.

Besonders einfach lässt sich dasselbe durch successive graphisch Konstruktion durchführen. Z. B. für die deutsche schwere Feldkanon ist die Dauer eines Präzessionsumlaufs (siehe Beispiel weiter unten crc. 0,7 Sek.; nimmt man also in dieser Zeit das Widerstandsmoment M annähernd konstant, ebenso v und $\frac{d\omega}{dt}$, so hat man folgendes: Für d werde das konstante Zeitintervall $\Delta t = 0{,}1$ Sek. gewählt; das Ende de Tangente befindet sich zu den Zeiten $t = 0$, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 ... i O, T_1, T_2, T_3 etc. Das Ende der Geschossaxe befand sich anfangs in O Nach $\Delta t = 0{,}1$ Sek. hat sich die Ebene durch Geschossaxe SA un Tangente ST oder die von v. Wuich sogenannte Stossebene um den 7. Teil von 360° gedreht; man beschreibe also um T_1 einen Bogen mit Radius T_1O von crc. 51°; das Geschossende liegt jetzt in A_1; nach $\Delta t = 0{,}2$ Sek. ist die Tangente ST_2, die Geschossaxe SA_2 (Bogen um T_2 mit T_2A_1 von 51°); führt man so fort, so erhält man die Zeichnung Figur 38a; man sieht daraus wie aus Gleichung f), dass danach in der That das Geschossende A bei Rechtsdrall stets auf der rechten Seite der Flugbahnvertikalebene $SOTT_2$... bleiben muss. (Eine gan ähnliche Figur erhält man durch Rechnung.)

Ob dieses Resultat für die Präzessionsbewegung (denn auch hier ist es diese Bewegung, um die es sich handelt) das richtige ist, oder das Resultat des Verfassers, wonach die Geschossspitze zeitweilig nach der linken Seite übertritt, jedoch längere Zeit auf der rechten Seite verweilt, muss schliesslich der Versuch entscheiden, der allerdings

dadurch erschwert sein wird, dass, wie ich oben nachgewiesen habe, in erster Linie die Nutationen es sind, welche der Beobachtung sich darbieten. Jedoch, selbst wenn die Nutationen als sehr klein zu vernachlässigen wären, könnten Laboratoriumversuche mit geschossartigen Körpern, die in cardanischen Ringen leicht drehbar angebracht sind, wegen der Reibung nicht wohl entscheidend sein. Ich suchte weiterhin den Luftwiderstand, dessen Richtung bei Geschossen fortwährend wechselt, durch magnetische Kraft zu ersetzen; an der Axe eines Messingkreisels war eine Eisenmasse angebracht; auf diese wirkte die Anziehungskraft eines kräftigen Elektromagnetpols, der nach und nach gegenüber dem Kreisel verschoben wurde; auch hier zeigten sich volle kreisartige Präzessionspendelungen; dies würde darauf hindeuten, dass die Geschossaxe zeitweise nach der linken Seite der Flugbahnvertikalebene übertreten muss; allein auch solche Versuche können nicht entscheiden, da die Analogie mit der Mechanik der Geschossbewegung keineswegs vollständig hergestellt ist.

Fig. 38a.



An dem Verfahren St. Roberts ist prinzipiell jedenfalls auszusetzen, dass hierbei die Annahme gemacht wird, die successiven Drehungen der Stossebene müssen um die jeweiligen Tangentenlagen herum erfolgen. Beim Kreisel erfolgt, wenn von den Nutationen abgesehen werden kann, die reguläre Präzessionsbewegung um die Richtung der diese Bewegung bewirkenden äusseren Kraft, der Schwerkraft, herum; analog muss beim Geschoss die Drehung der Stossebene um die zur Luftwiderstandsresultanten Parallelen durch den Schwerpunkt S herum, nicht aber um die jeweilige Tangente ST_1, $ST_2 \cdots$ herum vor sich gehen. Dieser Fehler ist bei unserer obigen Theorie dadurch vermieden, dass von vornherein mit den Komponenten des Luftwiderstands gerechnet wurde; auf der anderen Seite waren auch bei

des Verfassers obiger Theorie (welche, wie bemerkt, schliesslich a
Entwickelungen Poissons zurückgeht) Vernachlässigungen zum Zwe
der Durchführung der Integrationen erforderlich, weshalb auch
kleine Winkel ϑ, ψ, α die Resultate der Theorie von denen der
obachtung etwas abweichend gefunden werden könnten.

Übrigens sind die Resultate beider Theorien, derjenigen v
St. Robert-Wuich und derjenigen des Verfassers, weniger von e
ander verschieden, als
auf den ersten Anbl
scheinen könnte — f
nur die Theorie St. R
berts etwas modifizi
wird:

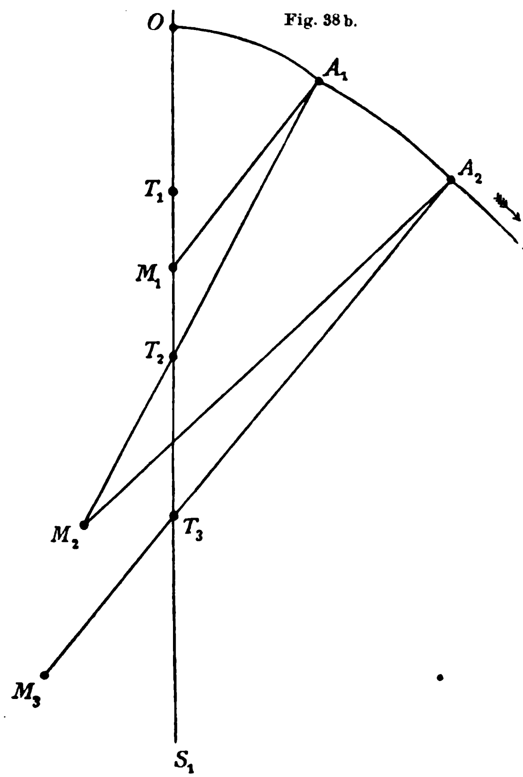


Fig. 38b.

Bei der successiv
graphischen Lösung,
auf der Vorstellung ber
(Fig. 38a), als ginge
Änderung der Tangent
lage ruckweise vor si
lässt sich nämlich der
wähnte Fehler, der in
Robertschen Theo
durch das Nichtparal
sein von Tangente u
Luftwiderstands-Result
ten entsteht, für den F
dass von den Nutatio
abgesehen wird, lei
vermeiden. Man zerl
wieder (Figur 38b)
Flugzeit in aufeinan
folgende etwa gleiche Z
teilchen Δt und konstruiere wieder die aufeinander folgenden La
der Tangente, also SO, ST_1 ST_2, $ST_3 \cdots$, wie dieselben ohne Rü
sicht auf die Rotationsbewegung in der Vertikalebene durch Schw
punkt S (dieser vor der Zeichnungsebene gedacht) und Bewegun
richtung von S gegeben sind zu den Zeiten 0, Δt, $2 \cdot \Delta t$, $3 \cdot \Delta t$
Zur Zeit $t = 0$ befinde sich die Geschossaxe und zugleich die Tange
in SO; es ist also noch kein Anlass zur Präzession gegeben; zur Z
$t = \Delta t$ ist die Tangente längs ST_1 gerichtet; zu dem Winkel OS
oder α zwischen Tangente ST_1 und Axe SO berechne man M u
suche [1.] den zugehörigen Winkel η zwischen Axe und Luftwiderstan
resultante auf; diesen Winkel η trage man als OM_1 auf der V
längerung von OT_1 ab und beschreibe um M_1 mit Radius $M_1 O$ ei
Kreisbogen OA_1, dessen Centriwinkel im Bogenmaß $= \frac{M}{C \cdot r} \cdot \Delta t$

ist die Geschossaxe in SA_1. Nun ist aber nach $t = 2 \cdot \Delta t$ die
ente in ST_2, der Winkel zwischen Axe und Tangente ist jetzt
T_2, dazu suche man M und den zugehörigen Winkel η auf
trage den neuen Winkel η auf $A_1 T_2$ als $A_1 M_2$ auf, beschreibe
M_2 mit Radius $M_2 A_1$ einen Kreisbogen $A_1 A_2$ mit dem Centri-
el $\frac{M}{C \cdot r} \cdot \Delta t$ u.s.f.

Bei diesem Verfahren successiver punktweiser Konstruktion der essionskurve gelangt die Geschossaxe zeitweilig auf die linke Seite lugbahn-Vertikalebene; man erhält eine Präzessionskurve ähnlich wie gur 12, abgesehen davon, dass nicht notwendig die sich erweiternde le immer wieder durch O gehen muss.

Man erkennt auf diese Weise, dass in der That die Resultate r Theorien nicht so sehr von einander abweichen; es ist auch, man die Bezeichnungen vergleicht, der obige von den periodischen lern freie Term ψ, welcher die Seitenabweichung bestimmt, und ner vom Verfasser mit f bezeichnet wurde, identisch mit dem- en von Magnus de Sparre und Mayevski [2.]:

$$\delta \cdot \sin \nu = (P \cdot g) : [4 R^2 \cdot \alpha \cdot s \cdot u \cdot F(u)]$$

mit demjenigen von N. v. Wuich [3.]:

$$\alpha_1 = b : (a \cdot u^{n+1});$$

i ist jedoch darauf aufmerksam zu machen, dass bei v. Wuich u. a. r „Nutation" der Winkel α zwischen Tangente und Axe, also s anderes verstanden ist, als in der Kreiseltheorie.

nmerkung: [1.] Mittelst der Kummerschen Formeln (des Verfassers Com- um S. 159 flg., $\operatorname{tg} \eta = X : Z$) oder mit denjenigen von v. Wuich l. c. S. 82; giebt v. Wuich S. 92 die folgende Tabelle für den Winkel η zwischen Geschoss- nd Luftwiderstandsresultanten, für verschiedene Winkel α zwischen Axe und bahntangente und für mehrere Geschosslängen H (in Kalibern gemessen):

5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	und für
9°44′	36°55′	57°14′	66° 4′	70°53′	74°12′	76°35′	78°28′	80° 2′	88°23′	$H = 2$ Kalib.
0°44′	39°11′	60°14′	69°55′	75°11′	78°22′	80°24′	81°50′	82°52′	83°36′	$H = 2{,}5$ „
2°52′	43°12′	63°57′	70° 9′	76°28′	79° 7′	80°57′	82°18′	83°22′	84°15′	$H = 2{,}8$ „
6°38′	49°34′	68°53′	74° 0′	79°22′	81°30′	82°55′	83°56′	84°43′	85°43′	$H = 3{,}5$ „

r giebt diese Tabelle die Werte η nicht für kleine α (nicht zu verwenden hierfür die folgenden Tabellen I und II, weil II mehr empirische Daten ent- als I).

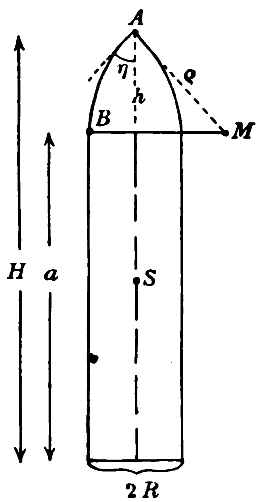
2.] Mayevski, Über die Lösung der Probleme des direkten und indirekten ssens; deutsch von Klussmann, Berlin 1886 bei Mittler & Sohn, S. 77.

3.] l. c. p. 407.

E. Tabelle für die Komponenten W_p und W_s der Luftwiderstands resultanten parallel resp. senkrecht zur Axe des Langgeschosses sowie für die Lage des Angriffspunkts der Resultanten au der Axe.

Die beigefügte Tabelle soll die sehr umständliche Berechnung Luftwiderstandsmoments M erleichtern, so lange man auf eine sol Berechnung angewiesen ist. Sie ist aus den Formeln entstan welche Kummer bezüglich cylindrischer Geschosse mit aufgeset Halbkugel und mit aufgesetztem Kegel für die Komponenten W_p, und für den Abstand ζ des Angriffspunkts vom Geschossboden unter Voraussetzung berechnete, dass der normale Luftwiderstand gegen in der Luft bewegte ebene Fläche proportional dieser Fläche und Quadrat des Kosinus desjenigen Winkels sei, welchen die Fläch normale mit der Bewegungsricht bildet. Die Kummerschen Bere nungen zu Grunde zu legen, lag halb nahe, weil einerseits die betreffen analytischen Entwickelungen in gleic Allgemeinheit für kein anderes Ge durchgeführt sind und andererseits mehreren Vergleichen mit Beobac ungen die Formeln Kummers ke ungünstigeren Resultate ergaben, die sind, welche aus anderweitigen anderen Gesetzen und unter spezielle Annahmen aufgestellten Formeln flos

Fig. 39.



Als Form der Spitze des La geschosses ist die gegenwärtig meisten übliche sogenannte „ogiva vorausgesetzt (Fig. 39); der Läng querschnitt des Geschosses hat hie die Gestalt etwa eines gotischen Fensters; ist M der Mittelpu des Kreisbogenprofils AB, so heisst $MA = MB = \varrho$ der Abrundun radius. Wenn die Höhe h des zugespitzten Teils des Geschosses, Kalibern $d = 2R$ oder in Geschossradien R gemessen, gegeben ist, ist damit zugleich der Abrundungsradius ϱ sowie der halbe Winkel η der Spitze gegeben; es ist nämlich:

$$49) \qquad \sin\eta = \frac{h}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{\frac{h}{R}}{\frac{\varrho}{R} - 1},$$

$$50) \qquad \left(\frac{h}{d}\right)^2 = \frac{\varrho}{d} - \frac{1}{4};$$

gleichwertig sind also z. B. die Angaben.

$\frac{\varrho}{d} = 0,5$	1	1,5	2	3
$\frac{h}{d} = 0,5$	0,866	1,118	1,323	1,658.

Die Berechnung erfolgte durch Interpolation aus den Formeln für ufgesetzte Halbkugel und für den aufgesetzten Kegel; für diese n Formen und für eine grössere Anzahl von Winkeln α zwischen bahntangente und Geschossaxe wurden die numerischen Werte der ffenden Grössen W_p, W_s, η berechnet, und sodann je für die le Spitzenform ein Mittelwert zwischen den Zahlen für die Halb- l und den Kegel genommen, entsprechend den Verhältnissen der kel η an der Geschossspitze bei den drei Formen; endlich wurden übrigen Werte graphisch interpoliert. Eine Gebrauchsanweisung er Tabelle beigegeben. Eine Tabelle direkt für das Luftwider- smoment bezüglich des Schwerpunkts liess sich deshalb nicht en, weil durch Änderung der Massenverteilung im Innern eines geschosses die Schwerpunktslage geändert werden kann; letztere in jedem Fall empirisch bestimmt werden; jedenfalls ist diese mmung sicherer als die Berechnung.

Von Daten der Beobachtung wurden bei Aufstellung der Tabelle ele verwertet als irgend anging; insbesondere konnten die Ver- ergebnisse von Ingalls* und die neueren Mitteilungen von Heyden- n l. c. für W_p berücksichtigt werden. Grundsätzlich wurden die bachtungsresultate vor den Rechnungsresultaten bevorzugt, da Reihe von mitbestimmenden Einflüssen von Kummer nicht mit echnung gezogen werden konnten; dies gilt z. B. von dem Ab- s der Luft an dem Geschoss, der, wie Kummer selbst durch Ver- gezeigt hat, die Rechnungsergebnisse nicht unwesentlich modifi- es zeigte sich, dass die Versuchsreihen Kummers über die Werte Funktion von α durch eine gerade Linie noch besser dargestellt als durch die theoretisch erhaltene Kurve; es wurde deshalb hen den Endwerten z einfach proportional α interpoliert.

Eine andere derartige Tabelle hat N. v. Wuich (l. c.) auf wesentlich er Grundlage aufgestellt; eben weil die Zahlenwerte beider len nicht wenig von einander abweichen, so schien es mir nicht rt, diese neue Tabelle vorzulegen, die ich jedoch nur als einen behelf angesehen wissen möchte, bis es nämlich Ballistikern Physikern möglich geworden sein wird, durch ausgedehnte Ver- reihen, etwa nach Art der Neesenschen, genauere** empirische len aufzustellen (über deren Notwendigkeit siehe weiter unten).

* James M. Ingalls, Capitain, First Artill.: Journal of the United States ery, April 1895, Nr. 2, Vol. IV p. 191; vergl. auch den Auszug dieser Arbeit österreichischen Zeitschrift: „Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- eniewesens“, Wien Jahrgang 1896, 7. Heft, S. 411.

* Die Zahlen der folgenden Tabellen sind bei der Verwendung als nur auf die Dezimale genau zu behandeln; die Genauigkeit ist wahrscheinlich noch geringer.

Tabelle I

für die Komponente W_s der Luftwiderstandsresultanten senkrecht zur Geschossaxe.

Man multipliziert W_0 (siehe unten) mit dem Faktor der Tabelle.

H = ganze Geschosshöhe in Kalibern, h = Höhe des zugespitzten Teils.
α = Winkel zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente.

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 2,5$ Kaliber					Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 2,5$ Kaliber				
	h =0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.		h =0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	35	1,64	1,49	1,44	1,40	1,34
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	36	1,71	1,55	1,50	1,45	1,39
2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	37	1,78	1,61	1,56	1,50	1,44
3	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	38	1,83	1,67	1,61	1,55	1,49
4	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	39	1,90	1,73	1,66	1,61	1,54
5	0,08	0,07	0,06	0,06	0,05	40	1,97	1,79	1,72	1,66	1,59
6	0,11	0,10	0,09	0,09	0,08	41	2,04	1,84	1,78	1,72	1,64
7	0,14	0,13	0,12	0,11	0,10	42	2,10	1,90	1,84	1,77	1,69
8	0,18	0,17	0,15	0,14	0,13	43	2,16	1,96	1,90	1,83	1,74
9	0,22	0,20	0,18	0,17	0,16	44	2,22	2,02	1,95	1,88	1,79
10	0,26	0,24	0,22	0,21	0,20	45	2,29	2,08	2,01	1,94	1,84
11	0,30	0,28	0,26	0,25	0,24	46	2,36	2,14	2,06	1,99	1,90
12	0,34	0,32	0,30	0,29	0,27	47	2,43	2,20	2,11	2,04	1,95
13	0,39	0,36	0,34	0,33	0,31	48	2,50	2,25	2,17	2,10	2,00
14	0,43	0,41	0,38	0,37	0,35	49	2,55	2,31	2,22	2,15	2,04
15	0,48	0,45	0,42	0,40	0,39	50	2,62	2,36	2,27	2,20	2,09
16	0,52	0,49	0,45	0,44	0,43	51	2,68	2,42	2,32	2,25	2,14
17	0,57	0,54	0,50	0,48	0,47	52	2,73	2,47	2,37	2,30	2,18
18	0,62	0,58	0,55	0,53	0,51	53	2,79	2,53	2,43	2,34	2,22
19	0,68	0,62	0,59	0,58	0,56	54	2,85	2,58	2,48	2,38	2,26
20	0,73	0,67	0,64	0,63	0,60	55	2,92	2,64	2,53	2,43	2,31
21	0,78	0,73	0,68	0,67	0,64	56	2,98	2,69	2,58	2,48	2,36
22	0,83	0,77	0,74	0,72	0,69	57	3,04	2,74	2,62	2,52	2,40
23	0,89	0,82	0,80	0,77	0,74	58	3,10	2,79	2,67	2,57	2,44
24	0,95	0,88	0,84	0,82	0,78	59	3,15	2,83	2,71	2,61	2,48
25	1,02	0,93	0,90	0,86	0,83	60	3,21	2,88	2,75	2,65	2,52
26	1,08	0,98	0,95	0,92	0,88						
27	1,14	1,04	1,00	0,97	0,93	65	3,45	3,09	2,96	2,86	2,70
28	1,19	1,10	1,06	1,02	0,99	70	3,63	3,27	3,15	3,03	2,84
29	1,25	1,15	1,12	1,08	1,04	75	3,76	3,40	3,27	3,18	2,96
30	1,32	1,21	1,17	1,14	1,09	80	3,87	3,48	3,35	3,24	3,04
31	1,38	1,27	1,23	1,19	1,14	85	3,90	3,51	3,38	3,28	3,06
32	1,45	1,33	1,28	1,24	1,19	90	3,90	3,51	3,38	3,28	3,06
33	1,52	1,39	1,33	1,29	1,24						
34	1,58	1,44	1,39	1,35	1,29						

Tabelle I (Fortsetzung).

kel α schen choss- und lug- hn- gente α	H = 3,5 Kaliber					Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	H = 3,5 Kaliber				
	h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.		h = 0,5 Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	35	2,21	2,05	1,97	1,90	1,82
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	36	2,30	2,14	2,05	1,98	1,90
2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	37	2,40	2,22	2,14	2,06	1,99
3	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	38	2,49	2,31	2,23	2,15	2,07
4	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04	39	2,58	2,40	2,32	2,23	2,16
5	0,10	0,08	0,07	0,07	0,07	40	2,67	2,49	2,40	2,32	2,24
6	0,14	0,12	0,11	0,10	0,10	41	2,77	2,58	2,48	2,40	2,32
7	0,18	0,16	0,15	0,14	0,14	42	2,87	2,67	2,56	2,48	2,42
8	0,22	0,20	0,19	0,18	0,18	43	2,97	2,76	2,65	2,57	2,48
9	0,26	0,24	0,24	0,23	0,22	44	3,07	2,85	2,74	2,65	2,56
10	0,31	0,30	0,29	0,28	0,26	45	3,16	2,94	2,83	2,73	2,64
11	0,37	0,36	0,34	0,33	0,30	46	3,25	3,04	2,92	2,83	2,72
12	0,43	0,41	0,39	0,38	0,35	47	3,35	3,13	3,00	2,92	2,80
13	0,49	0,47	0,44	0,43	0,40	48	3,44	3,21	3,09	3,01	2,89
14	0,55	0,52	0,50	0,48	0,45	49	3,54	3,30	3,17	3,08	2,98
15	0,61	0,58	0,56	0,54	0,50	50	3,63	3,38	3,25	3,17	3,06
16	0,67	0,64	0,61	0,59	0,55	51	3,72	3,46	3,34	3,25	3,15
17	0,73	0,70	0,67	0,64	0,60	52	3,81	3,55	3,42	3,34	3,23
18	0,80	0,76	0,73	0,69	0,66	53	3,90	3,64	3,50	3,42	3,31
19	0,87	0,82	0,79	0,75	0,72	54	3,99	3,73	3,59	3,50	3,39
20	0,93	0,88	0,85	0,82	0,78	55	4,08	3,80	3,68	3,58	3,47
21	1,00	0,95	0,92	0,88	0,83	56	4,16	3,87	3,75	3,66	3,56
22	1,08	1,01	0,98	0,94	0,89	57	4,24	3,95	3,83	3,74	3,64
23	1,16	1,08	1,05	1,00	0,96	58	4,33	4,04	3,91	3,82	3,71
24	1,24	1,15	1,11	1,07	1,02	59	4,41	4,12	3,97	3,88	3,78
25	1,32	1,22	1,18	1,13	1,08	60	4,49	4,19	4,04	3,95	3,84
26	1,40	1,30	1,25	1,20	1,15						
27	1,48	1,37	1,32	1,27	1,22	65	4,85	4,53	4,37	4,27	4,14
28	1,57	1,44	1,39	1,34	1,29	70	5,14	4,80	4,63	4,52	4,38
29	1,65	1,52	1,46	1,41	1,36	75	5,35	5,01	4,84	4,72	4,57
30	1,74	1,60	1,54	1,49	1,43	80	5,49	5,15	4,98	4,86	4,70
31	1,84	1,69	1,62	1,57	1,51	85	5,57	5,21	5,04	4,94	4,77
32	1,93	1,78	1,71	1,65	1,58	90	5,60	5,23	5,06	4,96	4,80
33	2,02	1,87	1,80	1,73	1,66						
34	2,12	1,96	1,88	1,82	1,74						

Anmerkung. W_0 ist der Luftwiderstand in Kilogramm gegen ein halb- elförmig endigendes Geschoss vom Kaliber $2R$ Meter, falls dasselbe mit der chwindigkeit v m/sec sich derart bewegt, dass die Geschossaxe in der Flug- ntangente liegt. W_0 wird einer empirischen Tabelle entnommen. Ist der be- fenden empirischen Tabelle nicht ein Geschoss mit aufgesetzter Halbkugel = 0,5 Kal.) zu Grunde gelegt, sondern z. B. ein Geschoss mit $h = 1{,}3$ Kal., so $W_0 = \frac{1}{0{,}69} \cdot W_{1,3}$, wobei $W_{1,3}$ die von dieser empirischen Tabelle angegebene derstandszahl für die Geschwindigkeit v ist (und so weiter entsprechend den gedruckten Zahlen der ersten Zeile in Tabelle II). Z. B. ist für $R = 0{,}12$ m,

Tabelle I (Fortsetzung).

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 4{,}5$ Kaliber					Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 4{,}5$ Kaliber				
	$h = 0{,}5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.		$h = 0{,}5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	35	2,75	2,57	2,48	2,42	2,22
1	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	36	2,87	2,68	2,59	2,52	2,32
2	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	37	2,99	2,79	2,70	2,62	2,41
3	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	38	3,12	2,91	2,80	2,72	2,50
4	0,09	0,08	0,07	0,07	0,06	39	3,25	3,02	2,91	2,83	2,60
5	0,13	0,12	0,11	0,11	0,10	40	3,37	3,14	3,02	2,93	2,70
6	0,16	0,16	0,14	0,14	0,14	41	3,50	3,26	3,13	3,03	2,80
7	0,21	0,20	0,19	0,19	0,18	42	3,63	3,38	3,24	3,14	2,90
8	0,26	0,25	0,24	0,23	0,22	43	3,75	3,50	3,35	3,25	3,00
9	0,32	0,30	0,29	0,28	0,27	44	3,87	3,62	3,47	3,36	3,09
10	0,37	0,35	0,34	0,34	0,33	45	4,00	3,74	3,58	3,47	3,19
11	0,43	0,41	0,40	0,40	0,39	46	4,12	3,86	3,70	3,58	3,30
12	0,50	0,48	0,47	0,46	0,44	47	4,24	3,97	3,81	3,69	3,41
13	0,57	0,55	0,54	0,53	0,50	48	4,37	4,08	3,92	3,80	3,52
14	0,65	0,63	0,61	0,60	0,56	49	4,49	4,19	4,02	3,90	3,62
15	0,73	0,70	0,68	0,67	0,62	50	4,61	4,31	4,13	4,00	3,72
16	0,80	0,77	0,75	0,73	0,68	51	4,72	4,41	4,24	4,10	3,82
17	0,88	0,85	0,82	0,80	0,74	52	4,84	4,52	4,34	4,20	3,92
18	0,96	0,92	0,89	0,87	0,81	53	4,96	4,63	4,44	4,30	4,02
19	1,04	0,99	0,96	0,94	0,87	54	5,08	4,73	4,55	4,40	4,12
20	1,12	1,07	1,03	1,01	0,94	55	5,20	4,84	4,65	4,50	4,22
21	1,21	1,15	1,12	1,09	1,01	56	5,31	4,95	4,75	4,60	4,32
22	1,30	1,24	1,21	1,18	1,09	57	5,42	5,06	4,86	4,71	4,42
23	1,41	1,33	1,30	1,26	1,17	58	5,54	5,17	4,97	4,82	4,52
24	1,51	1,43	1,39	1,35	1,25	59	5,65	5,27	5,07	4,92	4,61
25	1,61	1,53	1,48	1,44	1,33	60	5,75	5,37	5,17	5,02	4,71
26	1,72	1,63	1,57	1,53	1,41						
27	1,83	1,73	1,67	1,63	1,50	65	6,24	5,84	5,65	5,50	5,19
28	1,94	1,83	1,77	1,73	1,59	70	6,63	6,23	6,07	5,92	5,59
29	2,05	1,93	1,87	1,83	1,69	75	6,93	6,55	6,37	6,24	5,89
30	2,17	2,03	1,97	1,92	1,77	80	7,17	6,77	6,57	6,43	6,08
31	2,28	2,13	2,08	2,02	1,86	85	7,27	6,89	6,69	6,54	6,20
32	2,40	2,24	2,18	2,12	1,95	90	7,30	6,94	6,73	6,60	6,22
33	2,52	2,35	2,28	2,22	2,04						
34	2,63	2,46	2,38	2,32	2,13						

$h = 1{,}5$ Kal. und $v = 241$ m der normale Luftwiderstand nach der Erfahrung 45,2 kgr; also ist $W_0 = \frac{45{,}2}{0{,}66} = 68{,}5$ kgr; somit ist z. B. für $\alpha = 20^0$, $H = 2{,}5$ Kal., $h = 2$ Kal.,

$$W_s = 68{,}5 \cdot 0{,}60 = 41 \text{ kgr},$$

$$W_p = 68{,}5 \cdot 0{,}51 = 35 \text{ kgr};$$

also die Resultante $\sqrt{W_s^2 + W_p^2}$ selbst $= 54$ kgr; ferner der Tangens des Winkels zwischen Geschossaxe und Resultante gleich 41 : 35; dieser Winkel $= 50^0$ (dies

Tabelle I (Fortsetzung).

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 5,5$ Kaliber					Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 5,5$ Kaliber				
	$h = 0,5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.		$h = 0,5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	35	3,33	3,14	3,05	2,98	2,82
1	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	36	3,48	3,30	3,19	3,10	2,95
2	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	37	3,63	3,43	3,32	3,23	3,08
3	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04	38	3,78	3,57	3,46	3,37	3,20
4	0,10	0,09	0,08	0,08	0,07	39	3,93	3,71	3,60	3,52	3,33
5	0,14	0,13	0,12	0,12	0,11	40	4,07	3,85	3,74	3,65	3,47
6	0,18	0,17	0,16	0,16	0,15	41	4,22	3,99	3,88	3,78	3,60
7	0,23	0,22	0,21	0,21	0,20	42	4,37	4,14	4,00	3,92	3,72
8	0,29	0,28	0,27	0,26	0,25	43	4,52	4,28	4,14	4,05	3,84
9	0,36	0,35	0,34	0,33	0,31	44	4,66	4,41	4,28	4,19	3,97
10	0,43	0,41	0,40	0,39	0,37	45	4,81	4,56	4,41	4,31	4,10
11	0,50	0,48	0,47	0,46	0,44	46	4,98	4,70	4,54	4,45	4,22
12	0,58	0,56	0,54	0,53	0,50	47	5,15	4,85	4,68	4,58	4,33
13	0,67	0,64	0,62	0,61	0,58	48	5,31	5,00	4,83	4,71	4,45
14	0,76	0,73	0,71	0,69	0,66	49	5,46	5,14	4,97	4,85	4,58
15	0,85	0,81	0,79	0,77	0,74	50	5,61	5,29	5,10	4,98	4,70
16	0,94	0,90	0,88	0,86	0,82	51	5,75	5,42	5,22	5,10	4,81
17	1,03	0,99	0,97	0,95	0,91	52	5,90	5,55	5,35	5,21	4,93
18	1,12	1,08	1,06	1,04	1,00	53	6,04	5,69	5,47	5,33	5,05
19	1,22	1,18	1,16	1,14	1,09	54	6,19	5,81	5,60	5,42	5,18
20	1,32	1,28	1,25	1,23	1,18	55	6,33	5,98	5,75	5,61	5,31
21	1,43	1,38	1,34	1,32	1,27	56	6,47	6,09	5,87	5,72	5,42
22	1,54	1,48	1,45	1,42	1,37	57	6,61	6,22	5,99	5,83	5,53
23	1,66	1,59	1,55	1,52	1,46	58	6,75	6,36	6,12	5,96	5,64
24	1,78	1,71	1,67	1,63	1,56	59	6,88	6,49	6,25	6,09	5,74
25	1,91	1,82	1,78	1,74	1,66	60	7,00	6,60	6,38	6,20	5,85
26	2,04	1,94	1,90	1,86	1,78						
27	2,18	2,06	2,02	1,98	1,88	65	7,61	7,20	6,97	6,80	6,40
28	2,30	2,19	2,14	2,10	1,98	70	8,15	7,75	7,50	7,33	6,95
29	2,43	2,32	2,26	2,22	2,10	75	8,55	8,17	7,92	7,77	7,37
30	2,58	2,46	2,39	2,34	2,22	80	8,84	8,46	8,23	8,07	7,69
31	2,74	2,60	2,52	2,47	2,34	85	8,97	8,65	8,42	8,27	7,90
32	2,89	2,74	2,65	2,59	2,45	90	9,00	8,70	8,48	8,32	8,00
33	3,04	2,88	2,79	2,72	2,58						
34	3,19	3,01	2,92	2,85	2,70						

wenig genau). — Steht keine empirische Tabelle zur Verfügung, so nimmt man (nach Didion):

$$\left\{\begin{aligned} W_0 \,(\text{in kgr}) &= 0,027 \cdot \frac{\delta}{1,206} \cdot R^2 \pi \cdot \left(0,74 + \frac{0,047}{0,05 + 2R}\right) \cdot v^2 \\ &\quad \cdot \left[1 + \frac{v}{1072}\left(1 + \frac{v}{763}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

wo δ = Gewicht von 1 Kubikmeter Luft am Versuchstag in Kilogramm ist, oder genauer (nach Siacci):

Tabelle II
für die Komponente W_p parallel der Geschossaxe (H beliebig

$W_p = W_0$ mal Faktor der Tabelle.

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	h =0,5 Kal.	1 Kaliber	1,3 Kaliber	1,5 Kaliber	2 Kaliber	2,5 Kaliber	Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	h =0,5 Kal.	1 Kaliber	1,3 Kaliber	1,5 Kaliber	2 Kaliber
0	1,00	0,79	0,69	0,66	0,53	0,39	35	0,83	0,64	0,58	0,57	0,50
1	1,00	0,79	0,69	0,66	0,53	0,39	36	0,82	0,63	0,58	0,57	0,50
2	1,00	0,79	0,69	0,66	0,53	0,39	37	0,81	0,62	0,57	0,56	0,49
3	1,00	0,78	0,69	0,66	0,53	0,39	38	0,80	0,62	0,57	0,56	0,49
4	1,00	0,78	0,69	0,66	0,53	0,39	39	0,79	0,61	0,57	0,56	0,49
5	1,00	0,78	0,68	0,66	0,53	0,39	40	0,77	0,60	0,56	0,55	0,49
6	1,00	0,78	0,68	0,65	0,53	0,39	41	0,76	0,59	0,56	0,55	0,49
7	0,99	0,77	0,68	0,65	0,53	0,39	42	0,75	0,59	0,55	0,55	0,49
8	0,99	0,77	0,68	0,65	0,53	0,39	43	0,74	0,58	0,55	0,54	0,49
9	0,99	0,77	0,67	0,65	0,52	0,39	44	0,72	0,57	0,54	0,54	0,48
10	0,99	0,76	0,67	0,65	0,52	0,39	45	0,71	0,57	0,54	0,53	0,48
11	0,99	0,76	0,67	0,65	0,52	0,39	46	0,70	0,56	0,54	0,53	0,48
12	0,98	0,76	0,67	0,64	0,52	0,40	47	0,69	0,55	0,53	0,52	0,48
13	0,98	0,75	0,66	0,64	0,52	0,40	48	0,68	0,55	0,53	0,52	0,48
14	0,97	0,75	0,66	0,64	0,52	0,40	49	0,66	0,54	0,52	0,52	0,48
15	0,97	0,75	0,66	0,63	0,52	0,40	50	0,65	0,53	0,52	0,51	0,48
16	0,96	0,74	0,66	0,63	0,52	0,40	51	0,64	0,53	0,51	0,51	0,48
17	0,96	0,74	0,65	0,63	0,52	0,40	52	0,63	0,52	0,51	0,50	0,48
18	0,95	0,74	0,65	0,63	0,52	0,40	53	0,62	0,51	0,50	0,50	0,47
19	0,95	0,73	0,64	0,62	0,51	0,40	54	0,61	0,51	0,50	0,50	0,47
20	0,94	0,73	0,64	0,62	0,51	0,40	55	0,60	0,50	0,49	0,49	0,47
21	0,93	0,72	0,64	0,62	0,51	0,40	56	0,59	0,49	0,49	0,49	0,47
22	0,93	0,72	0,63	0,61	0,51	0,40	57	0,57	0,49	0,49	0,49	0,47
23	0,92	0,71	0,63	0,61	0,51	0,40	58	0,56	0,48	0,49	0,48	0,47
24	0,91	0,71	0,63	0,61	0,51	0,40	59	0,55	0,47	0,48	0,48	0,47
25	0,91	0,70	0,62	0,60	0,51	0,41	60	0,54	0,46	0,47	0,48	0,47
26	0,90	0,70	0,62	0,60	0,51	0,41						
27	0,89	0,69	0,62	0,60	0,51	0,41	65	0,49	0,44	0,45	0,46	0,46
28	0,89	0,68	0,61	0,59	0,51	0,41	70	0,43	0,41	0,43	0,45	0,46
29	0,88	0,68	0,61	0,59	0,50	0,41	75	0,38	0,38	0,41	0,43	0,45
30	0,87	0,67	0,60	0,59	0,50	0,41	80	0,33	0,36	0,40	0,42	0,45
31	0,86	0,66	0,60	0,58	0,50	0,41	85	0,29	0,34	0,39	0,41	0,44
32	0,86	0,66	0,60	0,58	0,50	0,41	90	0,25	0,33	0,38	0,40	0,44
33	0,85	0,65	0,59	0,58	0,50	0,41						
34	0,84	0,64	0,59	0,57	0,50	0,41						

$$W_0 = \frac{\delta}{1,206 \cdot C} \cdot \left[0,2002 \cdot v - 48,05 + \sqrt{(0,1648 \cdot v - 47,95)^2 + 9,6} + \frac{0,0442 \cdot (v - 30}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)} \right.$$

wobei

$$C = \frac{9,81 \cdot \lambda}{1000 \cdot (2\,R)^2};$$

R Kaliber in Metern, $\lambda = \frac{0,66}{0,924} = 0,71.$

Tabelle III

für $\frac{W_s}{\sin\alpha}$; speziell für $h = 1{,}3$ Kaliber.

Man multipliziert W_0 mit dem betreffenden Faktor der Tabelle.

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	H = 2,5 Kal.	3,5 Kaliber	4,5 Kaliber	5,5 Kaliber
0	0,69	0,69	0,69	0,69
1	0,73	0,77	0,79	0,85
2	0,79	0,87	0,91	1,00
3	0,86	0,97	1,03	1,16
4	0,92	1,07	1,17	1,31
5	0,99	1,16	1,31	1,48
6	1,06	1,25	1,43	1,63
7	1,12	1,34	1,55	1,78
8	1,18	1,42	1,67	1,94
9	1,23	1,51	1,80	2,10
10	1,28	1,59	1,92	2,26
11	1,34	1,68	2,04	2,41
12	1,40	1,78	2,16	2,55
13	1,46	1,87	2,28	2,70
14	1,52	1,96	2,39	2,84
15	1,58	2,05	2,50	2,99
16	1,63	2,13	2,60	3,13
17	1,69	2,22	2,70	3,26
18	1,75	2,31	2,81	3,40
19	1,81	2,40	2,92	3,53
20	1,87	2,48	3,02	3,66
21	1,91	2,55	3,12	3,80
22	1,96	2,62	3,21	3,92
23	2,01	2,69	3,31	4,02
24	2,06	2,76	3,40	4,14
25	2,12	2,84	3,50	4,26
26	2,16	2,91	3,59	4,36
27	2,20	2,98	3,68	4,48
28	2,24	3,05	3,76	4,60
29	2,28	3,12	3,85	4,70
30	2,33	3,18	3,93	4,80
31	2,36	3,23	4,01	4,90
32	2,41	3,29	4,09	5,01
33	2,45	3,35	4,17	5,11
34	2,49	3,41	4,25	5,21

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	H = 2,5 Kal.	3,5 Kaliber	4,5 Kaliber	5,5 Kaliber
35	2,52	3,47	4,34	5,32
36	2,56	3,53	4,42	5,42
37	2,59	3,59	4,50	5,52
38	2,62	3,64	4,57	5,62
39	2,65	3,70	4,64	5,72
40	2,69	3,75	4,71	5,81
41	2,72	3,80	4,77	5,90
42	2,75	3,85	4,84	5,98
43	2,78	3,89	4,92	6,07
44	2,81	3,95	4,98	6,15
45	2,84	3,99	5,05	6,24
46	2,87	4,05	5,13	6,32
47	2,89	4,10	5,20	6,41
48	2,92	4,15	5,27	6,50
49	2,95	4,20	5,33	6,58
50	2,97	4,25	5,39	6,66
51	3,00	4,29	5,45	6,74
52	3,02	4,34	5,51	6,82
53	3,04	4,38	5,57	6,89
54	3,06	4,42	5,64	6,96
55	3,08	4,46	5,70	7,03
56	3,10	4,50	5,75	7,10
57	3,12	4,54	5,80	7,16
58	3,15	4,58	5,86	7,22
59	3,16	4,62	5,90	7,28
60	3,18	4,66	5,96	7,36
65	3,23	4,79	6,14	7,64
70	3,28	4,89	6,29	7,76
75	3,32	4,98	6,44	8,05
80	3,35	5,02	6,54	8,22
85	3,36	5,03	6,64	8,36
90	3,38	5,04	6,72	8,47

Tabelle IV für die Lage des Angriffspunkts der Luftwiderstands-resultanten auf der Geschossaxe.

Abstand zwischen Geschossboden u. Angriffspunkt (in Kal. od. in Metern) = Höhe de lindrischen Teils des Geschosses (in Kal. od. in Metern) mal dem Faktor der Tab α = Winkel zwischen Geschossaxe und Tangente; H = ganze Geschosshöhe; h = H des zugespitzten Teils, je in Kalibern gemessen.

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 2,5$ Kaliber: $h = 0,5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.
0	1,00	1,28	1,44	1,60
5	0,97	1,25	1,40	1,57
10	0,95	1,22	1,37	1,53
15	0,92	1,18	1,34	1,50
20	0,90	1,15	1,31	1,46
25	0,87	1,12	1,28	1,43
30	0,85	1,09	1,24	1,39
35	0,82	1,06	1,21	1,36
40	0,80	1,03	1,18	1,32
45	0,77	0,99	1,15	1,29
50	0,74	0,96	1,12	1,26
55	0,72	0,93	1,08	1,22
60	0,69	0,90	1,05	1,19
65	0,67	0,87	1,02	1,15
70	0,64	0,84	0,99	1,12
75	0,62	0,80	0,96	1,08
80	0,59	0,77	0,92	1,05
85	0,56	0,74	0,89	1,01
90	0,54	0,71	0,86	0,98

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 3,5$ Kaliber: $h = 0,5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.
0	1,00	1,13	1,22	1,31
5	0,98	1,10	1,19	1,28
10	0,95	1,07	1,16	1,25
15	0,92	1,05	1,13	1,22
20	0,90	1,02	1,11	1,18
25	0,87	0,99	1,08	1,15
30	0,84	0,96	1,05	1,12
35	0,82	0,94	1,02	1,09
40	0,79	0,91	0,99	1,06
45	0,76	0,88	0,96	1,03
50	0,74	0,85	0,93	1,00
55	0,71	0,82	0,90	0,97
60	0,69	0,80	0,87	0,94
65	0,66	0,77	0,84	0,91
70	0,63	0,74	0,82	0,87
75	0,61	0,71	0,79	0,84
80	0,58	0,68	0,76	0,81
85	0,56	0,66	0,73	0,78
90	0,53	0,63	0,70	0,75

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 4,5$ Kaliber: $h = 0,5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.	2,5 Kal.
0	1,00	1,10	1,18	1,24	1,41	1,60
5	0,97	1,07	1,15	1,21	1,27	1,56
10	0,94	1,04	1,12	1,17	1,24	1,52
15	0,92	1,02	1,09	1,14	1,20	1,48
20	0,89	0,99	1,06	1,11	1,17	1,45
25	0,86	0,96	1,03	1,08	1,13	1,41
30	0,84	0,93	1,00	1,05	1,10	1,37
35	0,81	0,90	0,97	1,02	1,06	1,33
40	0,79	0,87	0,94	0,99	1,03	1,29
45	0,76	0,84	0,91	0,95	1,09	1,25
50	0,73	0,81	0,88	0,92	1,06	1,22
55	0,71	0,79	0,85	0,89	1,02	1,18
60	0,68	0,76	0,82	0,86	0,99	1,14
65	0,65	0,73	0,79	0,83	0,95	1,10
70	0,63	0,70	0,76	0,80	0,92	1,06
75	0,60	0,67	0,73	0,76	0,88	1,02
80	0,57	0,65	0,70	0,73	0,85	0,99
85	0,55	0,62	0,67	0,70	0,81	0,95
90	0,52	0,59	0,64	0,67	0,78	0,91

Winkel α zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente α	$H = 5,5$ Kaliber: $h = 0,5$ Kal.	1 Kal.	1,3 Kal.	1,5 Kal.	2 Kal.
0	1,00	1,07	1,13	1,17	1,26
5	0,97	1,05	1,10	1,14	1,23
10	0,95	1,02	1,07	1,11	1,20
15	0,92	0,99	1,04	1,08	1,16
20	0,89	0,96	1,01	1,05	1,13
25	0,87	0,93	0,98	1,02	1,10
30	0,84	0,91	0,95	0,99	1,07
35	0,81	0,88	0,92	0,96	1,04
40	0,79	0,85	0,89	0,93	1,01
45	0,76	0,82	0,86	0,90	0,97
50	0,73	0,79	0,84	0,87	0,94
55	0,71	0,77	0,81	0,84	0,91
60	0,68	0,74	0,78	0,81	0,88
65	0,65	0,71	0,75	0,78	0,85
70	0,63	0,68	0,72	0,75	0,82
75	0,60	0,65	0,69	0,72	0,78
80	0,57	0,63	0,66	0,69	0,75
85	0,55	0,60	0,63	0,66	0,72
90	0,52	0,57	0,60	0,63	0,69

F. Zusammenstellung der Resultate.

1. In Beziehung auf den Schwerpunkt beschreibt die Geschossspitze im Verlauf der Flugbahn eine doppelte Bewegung; erstens eine langsame Präzessionsbewegung und zweitens eine schnellere Nutationsbewegung, welche ihren Ursprung meistens in einem kleineren oder grösseren seitlichen Anfangsstoss auf das Geschoss hat. Die thatsächliche Bahn, welche die Geschossspitze für einen Beobachter beschreibt, welcher dem Geschoss folgen und allein auf die Bewegung der Spitze bezüglich des Schwerpunkts S achten würde, ist danach die (gestrichelt gezeichnete) Kurve in den Figuren 40 und 41. (Diese Figuren sind sämtlich für den Fall konstruiert, dass die Züge rechts gewunden sind und der Angriffspunkt L der Luftwiderstands-

Fig. 40.

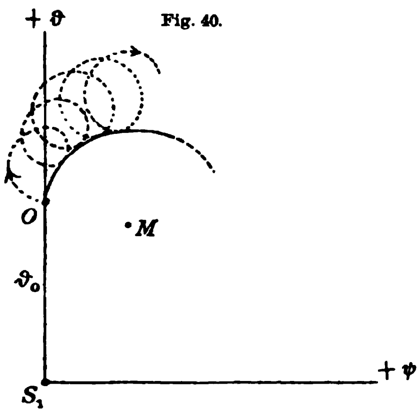
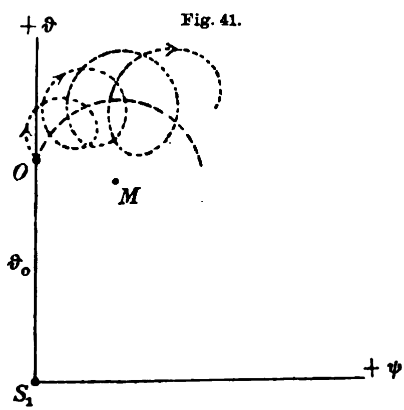


Fig. 41.



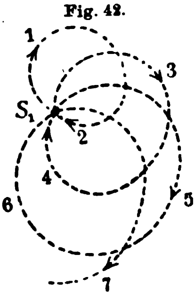
resultanten vor dem Schwerpunkt S angreift.) Die Bahn kann angesehen werden als bestehend aus einem beweglichen Kreis, dessen Radius sich vergrössert und dessen Nutationswindungen (gestrichelt) sich bei dem Fortschreiten des Mittelpunkts an die Präzessionsspirale (ausgezogen) anlehnen. Diese Präzessionskurve, als Leitkurve der Nutationsbögen, kann ihrerseits ebenfalls als ein beweglicher veränderlicher Kreis angesehen werden, dessen Radius OM sich gesetzmässig vergrössert und dessen Mittelpunkt abwärts und mehr oder weniger nach rechts (bezw. links) rückt.

Je mehr die Flugbahn der geraden Linie sich nähert, umsomehr reduziert sich die Präzessionskurve auf einen konstanten Kreis oder, falls die Geschossaxe anfangs in der Bewegungsrichtung des Schwerpunkts lag, auf einen Punkt; die Bahn der Spitze ist in diesem Fall die Hypocykloide (Fig. 42), deren Bögen von Kreisbögen im allgemeinen wenig abweichen und im Verlauf der Flugbahn sich erweitern.

Durch die Präzessionsbewegung wird vor allem
Rechts-(Links-)Abweichung des Geschosses aus der anfä
lichen Schussebene bedingt: Es ist nämlich die Präzessionsku
unsymmetrisch bezüglich der Vertikalebene durch die Flugba
tangente; beginnt vom Anfangspunkt O aus die Präzessio
kurve nach rechts (links), so verweilt während jedes Umla
die Geschossspitze längere Zeit auf der rechten (linken) S
jener Ebene als auf der entgegengesetzten; die Folge ist
Seitenabweichung des Geschosses nach rechts (links). Erste
nämlich Rechtsabweichung, tritt ein, wenn die Züge rec
gewunden sind und wenn der Angriffspunkt L der L
widerstandsresultanten vor dem Schwerpunkt S liegt (
wenn zugleich anderweitige Einflüsse, siehe weiter unten,
geringerem Betrag sind als der der Geschosspendelung), o
aber bei Linksdrall und Lage von L hinter S. Letzte
Linksabweichung, erfolgt bei Linksdrall und L vor S o
bei Rechtsdrall und L hinter S.

Die Nutationsbewegung, welche ihre Entstehung m
einem wenn auch kleinen seitlichen Stoss auf das Gesch
an der Mündung verdankt, beginnt stets
der Richtung des Stosses und erfolgt s
in demselben Sinn, wie die Drehung des
schosses um seine Längsaxe, also bei Rec
drall rechtsläufig, bei Linksdrall linksläu
mag hierbei die Präzessionsbewegung rec
oder linksläufig vor sich gehen, mag
Rechts- oder Linksabweichung des Schw
punkts eintreten. Sie bleibt bestehen, w
die Bewegung des Geschossschwerpunkts

Fig. 42.



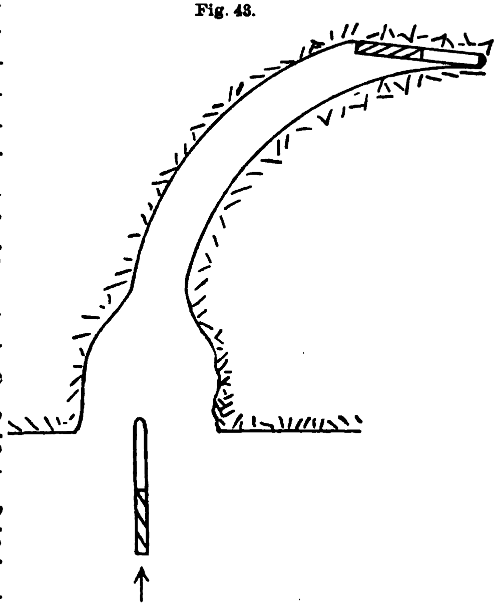
geradlinig betrachtet werden kann oder muss, und folgt a
sonst wesentlich anderen Gesetzen, als die Präzessionsbewegu
Diese Nutationsbögen (gestrichelt) sind es meistens, nicht
Windungen der Präzessionsspiralen (ausgezogen), welche
unter bei Geschossen mit dem blossen Auge beobachtet wer
und welche bei den Neesenschen photographischen Aufnah
sich zeigten. Mit der Amplitude dieser Nutationswindun
und deren sekundlicher Zahl ändert sich insbesondere
Schussweite und die Trefffähigkeit.

2. Die mathematischen Ausdrücke der Gesetze, wel
die beiden Arten von Geschosspendelungen unterliegen,
die folgenden:

Man denke sich um den Schwerpunkt S des Geschos
eine Kugelfläche mit dem Radius 1 m beschrieben, welche
Flugbahntangente ST in T und die Geschossaxe in P schne
T möge kurz das Ende der Flugbahntangente, P das

schossende heissen; durch S sei eine horizontale Äquatorebene und durch ST eine vertikale Anfangsmeridianebene gelegt. Letztere beiden Ebenen schneiden sich nach SS_1; S_1 ist der Anfangspunkt eines sphärischen Koordinatensystems, dessen horizontale ψ-Axe nach rechts und dessen vertikale ϑ-Axe nach oben positiv gerechnet sind. Der Beobachter ist vor der Zeichnungsfläche in S, also in einer solchen Stellung zu denken, dass er die Bewegung des Geschossendes P von der hinteren Seite des Geschosses her betrachtet und nach der konkaven Seite der Kugelfläche sieht. Die Koordinaten von P zur Zeit t, t Sekunden, nachdem das Geschoss die Mündung passiert hat, seien ψ und ϑ, gemessen im Bogenmass. Die Anfangslage von P sei zunächst O, $OS_1 =$ Abgangswinkel ϑ_0, zugleich anfängliche Neigung der Flugbahntangente gegen die Horizontale SS_1. Zur Zeit t sei diese Neigung $\omega = \sphericalangle\, TSS_1 = TS_1$.

Fig. 43.



Aus der vorangegangenen Lösung des ballistischen Problems ohne Rücksicht auf Rotation, etwa auf graphischem Weg (vergl. Zeitschrift f. Mathematik und Physik, 1897, S. 197, Zusammenfassung des Verfahrens) sei für jeden Augenblick die Neigung ω der Flugbahntangente bekannt, ebenso die Bahngeschwindigkeit v des Schwerpunkts in met/sec und folglich deren horizontale Projektion $v_x = v \cdot \cos \omega$. Weiter möge r die Winkelgeschwindigkeit des Geschosses um seine Längsaxe bedeuten, r positiv bei Rechtsdrall, der Anfangswert r berechnet aus

$$r = v_0 \cdot \operatorname{tg} \Delta : R = 2\pi \cdot v_0 : D,$$

v_0 die Mündungsgeschwindigkeit des Schwerpunkts, D Dralllänge, $2R$ der Durchmesser oder das Kaliber des Geschosses, beide in Metern, Δ Drallwinkel, d. h. Winkel zwischen Laufaxe und ebener Abwickelung der Züge; da über die eventuelle Abnahme von r mit der Zeit keine Beobachtungen vorliegen, so bleibt nichts übrig, als r konstant anzunehmen, wie es bisher bei den Berechnungen stets geschehen ist. — Weiter

seien A und C die beiden Hauptträgheitsmomente des G
schosses, C um die Längsaxe, A um eine Senkrechte da
durch den Schwerpunkt, — [am besten beide Werte dur
Schwingungsversuche ermittelt; Näherungswerte nach v. Wuic
berechnet mittelst

$$C = \frac{P}{9{,}81} \cdot \frac{R^2}{2}; \quad \frac{A}{C} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4 \cdot \mathfrak{h}_r^2}{3}\right),$$

wo $\mathfrak{h}_r$ die sogenannte reduzierte Geschosshöhe, in Kalibe
gemessen, d. h. die Höhe eines mit dem Geschoss gleich schwer
Cylinders von gleichem Kaliber und Stoff; $\mathfrak{h}_r$ erhält m
wenn man von der in Kalibern gemessenen Gesamthöhe
Geschosses $\frac{4}{10}$ Kaliber abzieht; P das Geschossgewicht in Ki
gramm]. — Der variable Winkel zwischen Geschossaxe u
Flugbahntangente, also Winkel TSP sei α, Anfangswert vo
zunächst $= 0$; der variable Abstand zwischen Schwerpunkt
und Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten sei h_1 (hi
für vergl. Tabelle IV, deren Gebrauch durch den beigefügt
Text erläutert ist); die Luftwiderstandskomponente senkre
zur Geschossaxe W_s, parallel dazu W_p (hierfür vergl. Tabell
und II, ferner für $W_s : \sin\alpha$ Tabelle III, Anfangswert v
$W_s : \sin\alpha$ für $\alpha = 0$ ist gleich dem von W_p);

$$\frac{W_s \cdot h_1 \cdot \cos\omega}{\sin\alpha}$$

sei als Luftwiderstandsmoment M bezeichnet.

Endlich sollen p_0 und q_0 die Komponenten einer Wink
geschwindigkeit bedeuten, welche im Anfang der Flugbal
also an der Mündung, ein seitlicher Stoss auf die Axe erzeug
und zwar bezieht sich p_0 auf eine Drehung um eine zur A
Senkrechte durch S, welche horizontal und senkrecht z
Schussebene verläuft, dabei p_0 positiv gerechnet, wenn
Stoss die Axe in ihrer Anfangslage SO so zu drehen suc
dass das vordere Ende O sich senkt; q_0 bezieht sich auf ei
Drehung um eine zur Geschossaxe Senkrechte, welche in d
Schussebene liegt, und wird positiv gerechnet, wenn der St
das Geschossende P, das anfangs in O liegt, horizontal na
links zu führen bestrebt ist. (Da keine Beobachtungen üb
diesen Anfangsstoss vorliegen, so können vorläufig nur A
nahmen über Grösse und Richtung des Stosses gemacht werde
siehe darüber weiter unten.)

Die Bahn des Geschossendes P mit den Koordinaten
und ψ (Breite und Länge) ist dann durch die Gleichung
gegeben:

* Ritter N. v. Wuich, l. c., Heft III, S. 376 und 120.

$$\text{I)}\begin{cases}\vartheta=\vartheta_r+\vartheta_n,\ \text{wobei}\\ \quad\vartheta_r=\omega+f\cdot\sin\beta_2+\cos\beta_2\cdot(\vartheta_0-\omega)\\ \quad\vartheta_n=\{p_0[\sin\beta_2-\sin(rt-\beta_1)]+q_0[\cos\beta_2-\cos(rt-\beta_1)]\}\\ \qquad\qquad :\left(\frac{Cr}{A}-\frac{M}{Cr}\right);\\ \psi=\psi_r+\psi_n,\ \text{wobei}\\ \quad\psi_r=f-f\cdot\cos\beta_2+\sin\beta_2(\vartheta-\omega)\\ \quad\psi_n=\{q_0[\sin\beta_2-\sin(rt-\beta_1)]-q_0[\cos\beta_2-\cos(rt-\beta_1)]\}\\ \qquad\qquad :\left(\frac{Cr}{A}-\frac{M}{Cr}\right)\end{cases}$$

mit den Abkürzungen:

$$\beta_1=\frac{A-C}{A}\cdot rt+\frac{M}{Cr}\cdot t;\quad rt-\beta_1=\left(\frac{Cr}{A}-\frac{M}{Cr}\right)t;$$

$$\beta_2=\frac{M}{Cr}t;\quad f=\frac{Cr}{M}\cdot\frac{g}{v_x}.$$

Wenn dagegen die Geschossaxe SP mit der Tangente SO einen kleinen Winkel α_0 bildet, der von Null verschieden ist, wenn nämlich der anfängliche Neigungswinkel der Tangente ϑ_0, derjenige der Geschossaxe $\vartheta+\varepsilon$ gegen den Horizont und $\psi=\psi_0$ für $t=0$ ist, also $\alpha_0=\sqrt{\varepsilon^2+\psi_0^2}$, so ist zur Zeit t:

$$\text{Ia)}\qquad\begin{cases}\vartheta=\vartheta_r+\vartheta_n+\vartheta'_n,\\ \psi=\psi_r+\psi_n+\psi'_n,\end{cases}$$

wo ϑ_r, ϑ_n, ψ_r, ψ_n dasselbe wie vorhin bedeuten und wobei

$$\begin{cases}\vartheta'_n=+\dfrac{\varepsilon}{\frac{Cr}{A}-\frac{M}{Cr}}\cdot\left(\frac{Cr}{A}\cdot\cos\beta_2-\frac{M}{Cr}\cos(rt-\beta_1)\right)\\ \qquad-\dfrac{\psi_0}{\frac{Cr}{A}-\frac{M}{Cr}}\cdot\left(\frac{Cr}{A}\cdot\sin\beta_2-\frac{M}{Cr}\sin(rt-\beta_1)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi'_n=\quad\dfrac{\psi_0}{\frac{Cr}{A}-\frac{M}{Cr}}\cdot\left(\frac{Cr}{A}\cdot\cos\beta_2-\frac{M}{Cr}\cos(rt-\beta_1)\right)\\ \qquad+\dfrac{\varepsilon}{\frac{Cr}{A}-\frac{M}{Cr}}\cdot\left(\frac{Cr}{A}\sin\beta_2-\frac{M}{Cr}\sin(rt-\beta_1)\right)\end{cases}$$

Wenn im folgenden nichts besonderes bemerkt ist, ist vorauszusetzen, dass $\alpha_0=0$ sein soll.

Man berechnet die Bahn in mehreren kleinen Zeitintervallen 0 bis t_1, t_1 bis t_2 etc.; in jedem einzelnen Intervall wird je ein zugehöriger Mittelwert von M als konstant vorausgesetzt. Die Kurve besteht aus zahlreichen, von Kreisen im allgemeinen wenig verschiedenen Hypocykloidenbögen (gestrichelt), welche längs der Präzessionsspiralen (ausgezogen) als Leitkurve sich fortbewegen. Diese Spirale beginnt im all-

gemeinen Fall in O berührend zur $S_1\vartheta$-Axe und verlä in Windungen, welche unsymmetrisch zur $S\vartheta$-Axe lieg stets aber wieder durch O gehen; die Spirale wird rech läufig beschrieben, falls M und r beide positiv oder be negativ sind, dagegen linksläufig, wenn eine dieser Grös negativ ist. Diese Präzessionsspirale $\vartheta = \vartheta_r$, $\psi = \psi_r$ kann trachtet werden als entstanden durch die Veränderung ei Kreises, der stets durch O geht, dessen Radius zur Zeit t Grösse hat:

$$\text{II)} \qquad OM = \sqrt{f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2}$$

und dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $\psi_M = f$, $\vartheta_M =$ besitzt. Die Anfangslage des Kreismittelpunkts ist:

$$\text{III)} \qquad \psi_{M_0} = \frac{g}{v_0 \cos^2 \vartheta_0} \cdot \frac{Cr}{W_p \cdot h_1}, \quad \vartheta_{M_0} = \vartheta_0,$$

wobei für h_1 hier der Wert aus Tabelle IV für $\alpha = 0$ nehmen ist.

Die Hypocykloiden- oder Nutationsbögen $\vartheta = \vartheta_n$, $\psi =$ werden stets im Sinn von r beschrieben; sie beginnen in in der Richtung des Anfangsstosses $p_0 q_0$.

Die variable Zeit, in welcher eine Windung der P zessionsspiralen vollendet wird, oder die Präzessionsperiode,

$$\text{IV)} \qquad T = \frac{2\pi \cdot Cr}{M}.$$

So oft t um T gewachsen ist, wird ψ_r wieder $= 0$, wieder $= \vartheta_0$. Ferner je nach Verfluss der halben Periode, oft also t um $\frac{1}{2} T$ gewachsen ist, wird $\psi_r = 2f$,

$$\vartheta_r = \omega - (\vartheta_0 - \omega);$$

in der Mitte des Umlaufs befindet sich somit das Gescho ende noch um $2f$ rechts von der Ebene OSS_1; diese Grö $2f$ ist folglich für die Seitenabweichungen massgebend.

Die meistens schnellere Periode für die Nutationsbög ist (vom Anfangsstoss nahezu unabhängig, siehe darül Gleichung 46):

$$\text{V)} \qquad T_1 = \frac{2\pi \cdot A}{\sqrt{C^2 r^2 - 4AM}}.$$

Der Bruch $T : T_1$ giebt an, wie viel Nutationsumlä auf einen Präzessionsumlauf kommen.

Die Amplitude der Präzessionswindungen ist in jed Augenblick angegeben durch den Radius

$$OM = \sqrt{f^2 + (\vartheta_0 - \omega)^2}$$

jenes variablen Kreises; danach nimmt dieselbe zu mit $\vartheta_0 -$ also mit der Krümmung der Flugbahn, ferner mit $C \cdot r$, nim

dagegen ab mit zunehmendem Luftwiderstandsmoment M und der Geschwindigkeit v_x.

Die Amplitude AB eines Nutationsbogens (Fig. 43) ist zur Zeit t:

$$\text{VI)} \qquad \text{Amplitude} = \frac{2 \cdot s_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}},$$

wobei s_0 die Winkelgeschwindigkeit des Anfangsstosses ist,

$$s_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2};$$

die Weiten dieser Bögen werden also bei derselben Flugbahn immer grösser, da im Verlauf der Flugbahn M grösser wird (h^1 kleiner, aber $\cos\omega$ und $W_s : \sin\alpha$ grösser); bei verschiedenen Flugbahnen sind diese Bögen um so grösser, insbesondere je kleiner $Cr : A$ und je grösser s_0 ist (da das erste Glied des Nenners überwiegt), also z. B. je länger das Geschoss, je kleiner die Rotationsgeschwindigkeit und je grösser der Anfangsstoss ist.

Falls dagegen der anfängliche Winkel α_0 zwischen Geschossaxe und Flugbahntangente nicht Null ist, so kommt ausserdem die Amplitude stossfreier Nutation hinzu, welche davon herrührt, nämlich:

$$\text{VIa)} \qquad \text{Amplitude annähernd} = \frac{2 \cdot M \cdot A}{C^2 r^2} \cdot \alpha_0;$$

über das Vorzeichen vergl. D. III, IV, V.

Die vorstehende Lösung ist abgeleitet und daher vorläufig giltig nur für solche Fälle, wo der Abgangswinkel ϑ_0 und damit die Flugzeit sehr klein sind und wo die Beobachtung, z. B. an Durchschlägen, gezeigt hat, dass die Winkel zwischen Tangente und Geschossaxe dauernd ebenfalls sehr klein ausfallen.

Für grössere Winkel lässt sich das folgende graphische Verfahren anwenden: Es stelle (Fig. 38b) OS_1 wieder die zur Zeichnungsfläche senkrechte Flugbahn-Vertikalebene vor, in welcher sich vorn der festgedachte Schwerpunkt S befinde. Es werden für aufeinanderfolgende kleine, etwa gleiche Zeitintervalle Δt die Lagen der Flugbahntangente SO, ST_1, ST_2, ST_3 ... wie oben angegeben bestimmt. Man berechne nun zu Winkel OT_1 als α den Wert M und suche den zu α zugehörigen Winkel η zwischen Geschossaxe und Luftwiderstandsresultante auf (vergl. S. 183 Anmerk. 1), diesen Winkel η trage man als OM_1 auf der Verlängerung von OT_1 auf, beschreibe um M_1 mit dem Radius $M_1 O$ einen Kreisbogen OA_1, dessen Centriwinkel OM_1A_1 im Bogenmaß gemessen gleich $\frac{M}{C \cdot r} \cdot \Delta t$ ist. Zu

Winkel $A_1 T_2$ als neuem Wert von α berechne man neuerdings das Moment M und suche den zu $\alpha = A_1 T_2$ gehörigen Winkel η auf; das neue η wird als $A_1 M_2$ auf der Verlängerung von $A_1 T_2$ aufgetragen und um M_2 mit Radius $M_2 A_1$ ein Kreisbogen $A_1 A_2$ beschrieben, dessen Centriwinkel gleich $\frac{M}{Cr} \cdot \Delta t$ ist und so fort. Man erhält auf solche Weise, aus Kreisbogenelementen zusammengesetzt, die Präzessionskurve in dem Fall, dass man von den Nutationen abstrahieren kann. Diese selbst folgen der Präzessionskurve als der Leitkurve.

Spezielle Fälle.

1. Wenn die Flugbahn als geradlinig betrachtet werden kann, etwa horizontal in der Richtung SS_1 und wenn anfangs die Geschossaxe SO gegen diese Richtung den kleinen Winkel ϑ_0 bildete (Figuren 16 und 40, 41), so ist durchweg $\omega = 0$, $f = 0$; der früher variable Mittelpunkt des Präzessionskreises liegt jetzt konstant in S_1; die Präzessionsspirale reduziert sich auf den zur vertikalen Schussebene OSS_1 symmetrischen, konstanten Kreis um S_1 mit Radius SO gleich Winkel ϑ_0; zu konstanten einseitigen Seitenabweichungen ist also, allein durch die Präzessionsbewegung wenigstens, kein Anlass gegeben.

Die Perioden T und T_1 sind dieselben IV) und V) wie oben; ebenso die Amplituden VI) und VIa) der kleinen Nutationen.

Die Amplituden grosser Nutationen lassen sich angenähert folgendermaßen berechnen:

a) Falls kein Anfangsstoss stattfand, so ist die Amplitude, im Bogenmaß gemessen, gleich $\pm (x - \vartheta_0)$, wobei x aus

$$\text{VII)} \qquad \cos x = \sigma \underline{(+)} \sqrt{\sigma^2 + 1 - 2 \cdot \sigma \cdot \cos \vartheta_0}$$

zu berechnen ist und σ den „Stabilitätsfaktor $\frac{C^2 r^2}{4MA}$ bedeutet. Es ist derjenige Wurzelwert in VII) zu nehmen, für welchen $\cos x$ ein echter Bruch ist; die Amplitude ist $x - \vartheta_0$ oder $\vartheta_0 - x$, je nachdem die Nutationsbögen ausserhalb oder innerhalb auf dem Präzessionskreis aufliegen. — Je grösser σ ist, um so kleiner ist der absolute Wert der Amplitude; wenn

$$\sigma > \frac{1}{2 \cdot \cos \vartheta_0}$$

ist, kann niemals der Winkel PSS_1 zwischen Geschossaxe SP und Bewegungsrichtung SS_1 die Grösse $\frac{\pi}{2}$ erreichen; ist

$$\sigma = \frac{1}{2 \cdot \cos \vartheta_0},$$

so tritt dieser Fall zeitweilig ein, dass das Geschoss mit seiner Axe senkrecht zur Flugrichtung liegt ($\cos x = 0$); wird σ noch

kleiner, so beginnt das Geschoss nach hinten sich zu überschlagen, indem der Winkel PSS_1 zeitweilig $> \frac{\pi}{2}$ wird.

b) Es habe ein Anfangsstoss s_0 stattgefunden, und zwar sei w_t (vergl. Fig. 27) die zum Präzessionskreis tangentielle Komponente des Anfangsstosses (d. h. die durch den Stoss erzeugte anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Axe in der Berührungsebene an den Präzessionskegel), w_t positiv, wenn im Sinn der Präzessionsbewegung gerichtet; w_s (Fig. 36 u. 37) sei die zur Kreistangente senkrechte Komponente, positiv, wenn vom Kreismittelpunkt in der Richtung des Radius nach aussen gehend ($s_0 = \sqrt{w_t^2 + w_s^2}$), dann löse man die folgende Gleichung dritten Grades mit x als Unbekannter

$$\text{VIII)} \begin{cases} x^3 - x^2(u_0 + i_1 u_1^2 + i_2 + i_3) + x(-1 + 2 \cdot i_3 \cdot u_0 + i_4 \cdot u_1^2) \\ \quad = i_3 \cdot u_0^2 + i_1 \cdot u_1^4 + i_4 \cdot u_1^2 \cdot u_0 - i_2 - i_1 \cdot u_1^2 - u_0, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$i_1 = \frac{A \cdot w_t^2}{2M}, \quad i_2 = \frac{A \cdot w_s^2}{2M}, \quad i_3 = 2 \cdot \sigma = \frac{C^2 r^2}{2MA},$$

$$i_4 = -\frac{Cr \cdot w_t}{M}, \quad x = \cos(\sphericalangle PSS_1),$$

$$u_0 = \cos \vartheta_0, \quad u_1 = \sin \vartheta_0$$

gesetzt ist.

Die Gleichung VIII) besitzt zwei Wurzeln, die zwischen -1 und $+1$ liegen; die eine ist der Kosinus des (im Bogenmaß gemessenen) Radius $S_1 A$ (vergl. Fig. 36) des einen Begrenzungskreises; die andere Wurzel giebt den andern Begrenzungskreis der Nutationsbögen; die Differenz AB beider Winkel ist deren Amplitude.

Erfolgte der Anfangsstoss nur tangentiell zum Präzessionskreis, war also $w_s = 0$, so ist die eine der beiden Wurzeln x von VIII) gleich u_0 oder $\cos \vartheta_0$ selbst, d. h. der eine Begrenzungskreis ist der Präzessionskreis; die Nutationsbögen verlaufen in diesem Fall nur auf der äusseren oder nur auf der inneren Seite dieses Kreises, je nach dem Vorzeichen von w_t (also wie in den Figuren 27—33, 34, 35, bei 27 $w_t +$, bei 34 $w_t -$); die andere Wurzel findet sich sodann aus der Gleichung:

$$\text{IX)} \quad x^2 - x(i_3 + i_1 \cdot u_1^2) = 1 - i_3 \cdot u_0 - i_4 \cdot u_1^2 + i_1 \cdot u_0 u_1^2$$

als derjenige der beiden Werte x, der zwischen -1 und $+1$ liegt; x bedeutet dann den Kosinus des Winkels $S_1 S B$, wobei $S_1 B$ der Radius des die Nutationen begrenzenden anderen Kreises ist. Mit $i_1 = i_4 = 0$ ergiebt sich VII).

Da die Grössen $i_1, i_2 \ldots$ veränderlich sind, so führt man die Berechnung der Nutationen in mehreren Intervallen durch;

innerhalb jedes einzelnen Intervalls werden die Grössen a
konstant angenommen.

2. Die Bahn SS_1 des Schwerpunkts ist geradlinig; d
Geschossaxe fiel anfangs mit der Richtung der Schwerpunkt
bewegung zusammen ($\vartheta_0 = 0$).

In diesem Falle reduziert sich die Präzessionskurve auf d
festen Punkt S_1 (Fig. 42). Die Bahn der Geschossspitze b
steht ausschliesslich aus den durch S_1 gehenden Hypocykloide
bögen, deren Windungen im Verlauf des Flugs grösser u
grösser werden, da M grösser, und wohl auch r klein
wird. Die Amplituten berechnen sich wie vorhin, nur da
$\cos \vartheta_0 = 1$ ist.

3. Auch für den Fall eines vertikalen Schusses gelten d
vorigen Beziehungen von 1. und 2.; man hat nur die Richtu
SS_1, die bisher als horizontal vorausgesetzt war, mit d
Vertikalen durch den Abgangspunkt zusammenfallen zu lass
Bezüglich der Figuren 40—42 ist dabei der Beobachter unte
halb des Geschosses zu denken.

G. Folgerungen.

1. Mit den im Vorhergehenden zusammengefassten Resultat
unserer Theorie stehen die sämtlichen Einzelheiten der oben b
schriebenen Versuche des Verfassers, sowie manche sonstige Beobac
tungen, insbesondere die neueren von Heydenreich in Einkla
z. B. die folgenden:

a) Mitteilungen von Heydenreich l. c. S. 100: „Bei fortgesetz
Steigerung des Enddralls kann eine Grenze erreicht werden, bei d
die Schwungkraft des Geschosses im Vergleich zu der Einwirkung d
Luftwiderstands so gross wird, dass das Geschoss zwar mit der Spi
nach vorn, aber doch mit dem Boden zuerst am Ziel aufschlägt u
dadurch an Wirkung, besonders an Eindringungstiefe erhebliche E
buße erleidet. Nach Versuchen in den Jahren 1867 bis 1869 mit d
damaligen Anfängen des 21 cm-Mörsers trat diese Erscheinung u
so eher ein, je kürzer das Geschoss, je stärker der Drall, je grös
die Erhöhung und je kleiner die Anfangsgeschwindigkeit war (ver
Formel IV, grosses C und r; kleines M, also kleines h_1, grosses
kleines W, geben grosse Periode T der Präzessionspendelungen).

b) Beobachtungen von Heydenreich S. 95: „Nach Schluss ei
jeden Pendelung kehrt die Geschossspitze in eine Lage oberhalb d
Flugrichtung des Schwerpunkts zurück" (vergl. Fig. 12). „Diese Pend
ungen beginnen in der Regel klein und rasch und werden schliessli
grösser und langsamer" (Formel V für Nutationen, M wird gröss
Periode T_1 grösser; Formel VI, M grösser, Amplitude grösser). „Un
sonst gleichen Verhältnissen sind sie um so stärker, je grösser
Geschwindigkeit des Geschosses und die Entfernung des Schwerpun

der Angriffsrichtung des vereinigten Luftwiderstands ist, um so
er, je grösser der Drall des Geschützes und je mehr dessen Masse
dem Umfang zu vereinigt liegt“ (Formel VI, je grösser v_0, also
erner je grösser h_1 in M, je kleiner r und C, um so grösser die
litude der Nutationen. Dasselbe aus VII).

c) Heydenreich beobachtete mit dem blossen Auge die Pendel-
n an Mörsergranaten und Kanonengranaten (die Rechnung nach
nd V zeigt, dass es die Nutationen waren); es wurden stets
Kreispendelungen beobachtet (vergl. die Figuren); bei Steigerung
Anfangsgeschwindigkeit von 180 m auf 500 m steigerte sich die
der Pendelungen pro Sekunde von 2 auf 4 bis 5, die Amplituden
en grösser; schliesslich „glich das Geschoss von hinten gesehen
rasch sich drehenden Scheibe von wechselndem Durchmesser, ein
hoss überschlug sich sogar etwa 1000 m vor der Mündung“
nel V und VI, mit v_0 wächst r, nimmt T_1 ab, zugleich wächst s_0
nimmt die Amplitude zu).

d) Heydenreich S. 109, Nr. 11—15: Je grösser die Geschosslänge,
o grösser ergab sich der „Formwert“ (Formel VI, je grösser $A:C$,
o grösser die Amplitude).

e) Bei der Granate der schweren Feldkanone lassen sich die
elungen nur sehr selten, bei den Infanteriegeschossen niemals mit
blossen Auge wahrnehmen, bei letzteren auch dann nicht, wenn
ge günstiger Beleuchtung das Geschoss auf der ganzen Flugbahn
lgt werden kann (Formeln IV, V, VI; vergl. auch die Beispiele
r unten; bei der Feldkanone sind die Nutationen zu schnell,
stens liessen sich die Präzessionswindungen beobachten; bei den
teriegeschossen ebenfalls höchstens die letzteren, jedoch die Ampli-
zu klein und das Geschoss zu kurz).

f) Die Seitenabweichungen infolge konischer Pendelung kommen
en rasanten Flugbahnen der Infanteriegeschosse mit grossem v_0
ltnismässig weniger in Betracht, als bei Geschützgranaten (vergl.
el II, v_x gross, also f klein).

g) Mitteilung von Heydenreich S. 104 über die Seitenabweichungen:
Pendelungen zufolge des Dralls erfolgen bei den Massenverteil-
n der eingeführten Geschosse derart, dass bei jeder derselben das
hoss einen grösseren Ausschlag nach der Seite der ersten Ab-
ng macht als nach der entgegengesetzten Seite“ (vergl. Fig. 12,
nsymmetrie). „Die Ablenkungswerte nehmen, nach den Schuss-
rfahrungen, im allgemeinen mit einer Verlängerung des Geschosses
mit einer Verstärkung des Dralls zu.“ Dagegen leitet Dähne
. 48 u. 63 flg.) aus Schusstafeln ab, dass „die Seitenabweichungen
ler Verlängerung der Geschosse und mit Zunahme der Anfangs-
windigkeit abnehmen, und dass sie bei gestreckten Flugbahnen
er sind als bei stärker gekrümmten“ (dies in Übereinstimmung
en Gesetzen [Formel I] für die Präzessions-Pendelungen $\vartheta = \vartheta_r$

$\psi = \psi_r$; insbesondere Ausdruck f; mit Verlängerung des Geschoss wächst h_1, also M, damit und ebenso mit Zunahme von v_x nimmt ab; bei Verstärkung des Dralls wächst r, damit auch f).

2. Beim Eindringen eines Langgeschosses in Erde od Wasser oder in den tierischen Körper wird sehr rasch d Widerstand, der sich dem Weitergehen des Geschosses entgegenset bedeutend vergrössert, zugleich nimmt die Rotationsgeschwindigk durch die Reibung ab; aus beiden Gründen wird die Amplitu der Nutationsbögen im allgemeinen vergrössert (Formel V W_s, also M vergrössert, r verkleinert, also die Amplitude grösse übrigens sind in solchen Fällen meistens die genaueren Gleichungen V VIII anzuwenden).

Es erklären sich damit manche eigentümliche Erscheinung die an eingedrungenen Geschossen beobachtet wurden: Austreten a Wasser in anderer Richtung; Weitergehen des Langgeschoss innerhalb Erde in einer von der ursprünglichen Bewegung richtung völlig abweichenden Richtung, ja selbst Umkehr desselben nach dem Geschütz zu nach Art des Bumerangs (Fig. 4 Versuch des Verfassers; Schuss in Lehm, Ausgiessen der Höhlung m Blei).

Auch für die Erklärung von Schusswunden sind in neuerer Z von einigen Militärärzten, insbesondere von Köhler,* die Gescho pendelungen beigezogen worden. In der That ist es wohl denkb dass neben den zahlreichen sonstigen Einflüssen (hydraulischer Druc Verdampfung, Fortpflanzung von Verdichtungswellen, Keilwirkun Stosswirkung) auch die Geschosspendelungen, unter Umständen etw in vierter oder fünfter Instanz, mit in Betracht kämen. Hier soll n darauf aufmerksam gemacht werden, dass insbesondere die Nut tionen der Gewehrgeschosse (mit mehreren Hundert Umläufen p Sekunde), weniger die Präzessionsbewegungen zu berücksichtig wären; wenn das Geschoss eindringt, wird M grösser und durch d Reibung r kleiner; die Nutationsamplitude vergrössert sich, die G schossaxe stellt sich schiefer gegen die Bewegungsrichtung, und zw

---

* Über die Litteratur dieses Gegenstandes vergl. z. B.:

Reger, „Die Gewehrschusswunden der Neuzeit", 1884. Derselbe „Üb die kriegschirurgische Bedeutung der neueren Feuerwaffen", Archiv für klinisc Chirurgie 1892, Bd. 44.

Kocher, „Zur Lehre von den Schusswunden", 1895.

Medizinalabteilung des königl. preuss. Kriegsministeriums, „Über d Wirkung und kriegschirurgische Bedeutung der neuen Feuerwaffen", 1894.

Bircher, „Neue Untersuchungen über die Wirkung der Handfeuerwaffen 1896, mit Atlas.

Köhler, „Die modernen Kriegswaffen, ihre Entwickelung und ihr gege wärtiger Stand, ihre Wirkung auf das tote und lebende Ziel", Berlin 1897.

Endlich mehrere Arbeiten von Bruns, die neueste: „Über die Wirkung u kriegschirurgische Bedeutung der Selbstladepistole System Mauser", Tübingen 18

in einem völlig homogenen Medium; infolge davon kann das Ge-
ss erweiternd wirken, zugleich nimmt aber T_1 zu, T ab; es dürfte
alb erst durch das Experiment zu entscheiden sein, welche Rolle
Geschosspendelungen auf diesem Gebiete zukommt.

3. Wie schon erwähnt, sind diejenigen Geschosspendelungen, welche zunächst der Beobachtung mit dem blossen Auge darbieten, tens die Nutationsbewegungen, nicht oder selten die Präzessions-gungen. Solche Nutationen können auch ohne Anfangsstoss erklichen Amplituden vorhanden sein (Gleichungen IX, X), falls Stabilitätsfaktor σ klein ist; auch sind die Perioden T_1 der Nuta-n mit und ohne Stoss nahezu dieselben.

Es sprechen indes mehrere Gründe dafür, dass meistens an der dung auf das Geschoss ein Stosskräftepaar wirkte, dessen Axe mit der Rotationsaxe zusammenfiel: Erstens sind von Heyden-, Neesen und mir Pendelungen (Nutationen) von beträchtlicher litude in Fällen beobachtet, wo σ genügend gross war. Zweitens ich niemals eine Form von Nutationsbögen beobachtet, bei welcher kehrpunkte aufgetreten wären (Figuren 19 bis 26), sondern stets kreisähnliche Bögen; freilich konnten die Rückkehrpunkte auch Auge entgehen, da auf einen Präzessionsumlauf viele Nutations-n kommen mussten. Drittens lässt sich die von Heydenreich t beobachtete und von mir oft durch Versuche konstatierte That-, dass mit wachsender Pulverladung, also zunehmendem v_0 unter gleichen Umständen die Amplituden wachsen, die Stabilität ge-r wird, nicht wohl anders als mit der Annahme eines Anfangs-es erklären; in der That, wenn kein Anfangsstoss vorhanden wäre, üsste, bei wachsender Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Amplitude gstens annähernd und in derselben Entfernung gleich bleiben; sie ist nach Formel IX und X durch σ bedingt; wächst nun v_0, so st r^2 proportional $v_0{}^2$ (bei demselben Geschütz), andererseits wächst auch, in ziemlich weitem Intervall mit genügender Annäherung, nfängliche Drehmoment proportional $v_0{}^2$, so wäre zu vermuten, der Bruch $C^2r^2 : 4MA$ beim Schiessen mit stets vermehrter Ladung ant bliebe, also wenigstens im Beginn der einzelnen Flugbahnen mplituden dieselben blieben; da dem nicht so ist, so ist auf die hung VI oder VII zu rekurrieren, welche zeigt, dass mit wach-m Anfangsstoss s_0 die Amplitude zunimmt; der Anfangsstoss selbst nimmt vermutlich mit der Ladung zu.

Es ist übrigens, genauer betrachtet, sogar sehr unwahrscheinlich, unter normalen Verhältnissen ein Geschoss völlig centriert ohne hen Anstoss aus dem Lauf austritt. Selten werden die Pulver-an der Mündung sich völlig symmetrisch um das Geschoss dem Rohr drängen, leicht kann die Figurenaxe des Ge-ses, welches den Zügen folgt, an der Mündung einen kleinen

Winkel* gegen die Laufaxe bilden, die Figurenaxe und die Rotationsaxe nicht zusammenfallen; nicht immer wird der Schwerpunkt in der geometrischen Geschossaxe liegen; besonders aber auch deutet das Auftreten eines beträchtlichen Abgangsfehlerwinkels** bei Geschützen und Gewehren, die Thatsache, dass die Anfangstangente der Flugbahn keineswegs mit der ruhenden Laufaxe zusammenfällt, so wie die Lage der letzteren unmittelbar vor dem Schuss gegeben ist, sondern Winkel bis zu 30 Bogenminuten und mehr mit derselben bildet, auf die Notwendigkeit eines seitlichen Anstosses hin; bei Gewehren wird der Abgangsfehler durch beginnende Schwingungen, insbesondere durch Obertonschwingungen des Laufs erzeugt; da letztere sehr rasch erfolgen, so ist es wohl denkbar, dass von dem Augenblick ab, in welchem der Schwerpunkt des Langgeschosses die Mündung passiert hat, bis zu demjenigen, in welchem der Geschossboden durch die Mündung geht, dem Geschoss durch den schwingenden Lauf eine Winkelgeschwindigkeit erteilt wird, welche, wie eine schätzungsweise Berechnung gezeigt hat, von nicht zu vernachlässigender Grösse wäre.

Heydenreich (l. c. S. 108, Nr. 2) hat gelegentlich beobachtet, dass durch Änderung der Laufmündung die Schussweite sich änderte (die Amplitude variierte).

Ich habe folgenden Vergleichsversuch angestellt: Es wurde vertikal aufwärts mit je gleicher Ladung geschossen, wobei erstens das erwähnte Mörsermodell möglichst labil aufgestellt, zweitens fest eingespannt war; im ersten Fall waren sehr grosse Amplituden zu beobachten, mitunter überschlug sich sogar das Geschoss in der Luft; im zweiten Fall kamen die Nutationen zwar nicht in Wegfall, besassen jedoch eine viel kleinere Amplitude. Es ist damit wahrscheinlich gemacht, dass das Bucken des Rohrs den Anfangsstoss wenn nicht ausschliesslich bedingt, so doch dabei mitwirkt, dass also die Ursachen des Abgangsfehlers und der Nutationsamplituden irgendwie zusammenhängen.

Derartige systematische Schiessversuche, bei denen ein Einfluss nach dem anderen ausgeschlossen wird, sowie die genaue Beobachtung der anfänglichen Pendelungsamplituden — etwa nach dem Neesenschen Verfahren — müssten ein Gesetz für die Grösse des Anfangsstosses, damit für die der Nutationsamplituden und die Trefffähigkeit liefern.

4. Weiterhin hat die vorhergehende Untersuchung gezeigt, dass es für die Weiterentwickelung dieses Teils der Ballistik von Wichtigkeit wäre, die Gesetze anderer Grössen, die in die Rechnung

* Vergl. hierüber Putz, revue d'Artillerie tome 24, 1884, p. 293, Note sur les imperfections inévitables des projectiles et leur influence sur la justesse du tir.

** Zuerst hat wohl K. B. Bender darauf hingewiesen, dass die Entstehung der Nutationen in dem Abgangsfehler zu suchen sein könnte. „Die Bewegungserscheinungen der Langgeschosse und deren Beziehungen zu den Eigenschaften des Feldgeschützes der Zukunft", Darmstadt 1888 bei Bergsträsser, S. 43 flg.

gehen, vor allem: C, A, M, r zu kennen. Und zwar müsste Aufstellung der betreffenden Beziehungen die Beobachtung vor Theorie die Vorderhand erhalten:

Die beiden Trägheitsmomente C und A lassen sich mit Rechg nur ungenau bestimmen; die mancherlei Vertiefungen am Zünder Boden einer Granate, die Führungsringe, der mit Kugeln ausillte Hohlraum im Innern etc. machen eine exakte Berechnung sorisch; es müssten durch systematische Schwingungsversuche, igstens für eine besonders häufig benutzte Form von Granaten, a diejenigen Kruppscher Konstruktion, die Grössen A, C und $\frac{A}{C}$ Funktion der Geschosslänge, des Kalibers etc. gegeben werden.

Besonders viel trägt zur Ungenauigkeit der theoretischen rechnung die Unkenntnis des Luftwiderstandsmoments M von W_s und h_1 bei; es muss die Kummersche Arbeit auch bezüg ihres experimentellen Teils durch empirische Ermittelung der twiderstandskomponenten als Funktionen des Winkels α zwischen chossaxe und Bewegungsrichtung ergänzt werden.

Endlich giebt die Annahme einer Konstanz der Umdrehungschwindigkeit r des Geschosses um seine Längsaxe, trotzdem dass meisten Ballistiker bei ihren Rechnungen von dieser Vorausung ausgingen, zu mancherlei Bedenken Anlass. Das Resultat von isson und Heim, dass der tangentielle Luftwiderstand, die Luftung, eine nur minimale sein könne, bezog sich nur auf die früheren, ten Kugeln; die jetzigen Granaten und Infanteriegeschosse sind daen wegen der durchrissenen Führungsringe einerseits, der Zugdrücke andererseits keineswegs glatt. Wie Altmann (l. c.) mit Recht vorhebt, ist es daher wahrscheinlich, dass die Rotationsgeschwinkeit r im Verlauf derselben Flugbahn nicht unbedeutend abnimmt. ine eigenen Versuche mit einem Geschoss sehr rauher Oberfläche teten eine merkliche Abnahme von r an.

Versuche in dieser Richtung hat Krall* vorgeschlagen und Boys** onnen; ein Gesetz für die Abnahme von r ist jedoch nicht bekannt.

5. Bei der Berechnung der Seitenabweichungen von Langchossen wird stets nur der Einfluss der Pendelungen, die selbst Folge der Rotation um die Längsaxe sind, beigezogen. Von den tenabweichungen ist zwar in diesem Aufsatz nicht systematisch die le; doch hängen sie innig mit dem Vorhergehenden zusammen, er hierüber eine Bemerkung: Bei den Versuchen des Verfassers en Andeutungen dafür vor, dass daneben auch ein zweiter Einfluss, möge der Magnus-Effekt heissen, von nicht unbeträchtlicher Grösse könne: wenn ein Langgeschoss eine sehr langsame Präzessions-

* Krall, Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, 3, 8. Heft, S. 118.

** Boys, Dieselbe Zeitschrift 1897, S. 836.

bewegung besitzt, so bleibt während des Flugs die Geschossaxe s nahezu parallel, die Geschossspitze fortwährend oberhalb der Tange (vorausgesetzt, dass die Nutationen nicht zu gross sind); der Win zwischen Geschossaxe und Tangente wird grösser und grösser, Scheitel schon gleich dem Abgangswinkel. Infolge davon kann e weder die Luftreibung, der tangentielle Widerstand (der Poisso Effekt) oder aber die Wirkung der adhärierenden Luft (Magnu Effekt) als die Geschossbewegung beeinflussend in Frage komm Der Poisson-Effekt würde darin bestehen, dass bei Rechtsdrall Rech abweichung, bei Linksdrall Linksabweichung des Schwerpunkts der anfänglichen Vertikalebene der Flugbahn einträte; denn die L vor dem Geschoss ist dichter als diejenige hinter demselben; also Luftreibung vorn grösser als hinten. Die Wirkung der am Gesch adhärierenden Luft wäre bei Rechtsdrall Linksabweichung (oder V kleinerung der Rechtsabweichung durch Pendelung), bei Linksdr Rechtsabweichung; denn z. B. bei Rechtsdrall bewegt sich die mit d Geschoss rotierende Luft auf der linken Seite im selben Sinn wie gegen das Geschoss heranströmende Luft, rechts im entgegengesetz Sinn, also entsteht rechts Erhöhung, links Verminderung des Lu drucks; infolge davon wird das Geschoss als Ganzes nach links drückt. Da die Resultante der hieraus entstehenden einseitigen Luftdrüc mehr oder weniger genau durch den Schwerpunkt gehen wird, so wi hierdurch die Rotation des Geschosses um den Schwerpunkt, Präzessions- und Nutationsbewegung, nicht wesentlich modifiziert, so dern nur die Bewegung des Schwerpunkts.

Nun haben meine Versuche in einem Fall Linksabweichung Rechtsdrall, in einem anderen Rechtsabweichung bei Linksdrall a gezeigt. Im ersten Fall lag (siehe oben) der Angriffspunkt der Lu widerstandsresultanten wegen der besonderen Geschossform ohne Zwei hinter dem Schwerpunkt, also erklärt sich hier diese Linksabweichu einfach durch Pendelung. In den anderen Fällen jedoch blieb Rechtsabweichung bei Linksdrall (zum Teil 8 m auf 30 m Schu weite) auch dann noch bestehen, als an der Geschossspitze eine Ko scheibe angebracht wurde, welche sicherlich bewirkte, dass der A griffspunkt der Luftwiderstandsresultanten nahe der Geschossspitze la falls dies nicht schon vorher der Fall gewesen sein sollte; durch Pendelung allein hätte somit Linksabweichung wegen des Linksdra eintreten müssen; folglich lag der Grund der Rechtsabweichung anderem: das Geschoss hatte hinten die Form einer Schraubenspind also ist anzunehmen, dass hierbei vom Geschoss mehr Luft mitrotie wurde, als von einem Geschoss mit glatterer Oberfläche, und dass d Magnus-Effekt die Erscheinung bewirkte. Meine Versuche zeigten die Erscheinung nur nebenbei und zielten auf anderes ab; bestätigt si diese Wahrnehmung, so ist damit bewiesen, dass bei der Berechnu der Seitenabweichung ausser der Pendelung unter Umständen no

anderer Einfluss Berücksichtigung finden muss, und zwar weniger Poisson-Effekt (den in neuester Zeit wieder Altmann beigezogen wahrscheinlich ohne von der Arbeit Poissons Kenntnis zu haben), rielmehr der Magnus-Effekt. Eine Berechnung hierüber hat Tait,* iell für Kugeln, begonnen.

H. Zahlenbeispiele.

1. Beispiel. Deutsche schwere Feldkanone C/73.

Schrapnell $C\cdot 91$ oder Sprenggranate. Schussweite 4500 m. Es ist 442 m; Abgangswinkel = Erhebungswinkel $15\frac{1}{2}^{\circ}$ + Abgangsfehlerwinkel $\frac{6}{16}^{\circ}$

$$= 15\frac{14}{16}^{\circ}, \text{ also } \vartheta_0 = 0{,}273;$$

ıer $2R = 0{,}088$ m; Geschossgewicht $P = 7{,}5$ kgr. Geschosslänge $H = 23{,}2$ cm ı 2,76 Kaliber, Entfernung von Boden und Schwerpunkt 9,98 cm; mit Tabelle IV $h = 1{,}3$ Kaliber) wird für $\alpha = 0$ die Entfernung von Boden und Angriffs- t = $1{,}41 \cdot 1{,}46 = 2{,}06$ Kal. = 18,1 cm, also $h_1 = 0{,}081$ m. Drallwinkel $\Delta = 3^{\circ}\,36'$, also $r = v_0 \cdot \mathrm{tg}\,\Delta : R = 442 \cdot \mathrm{tg}(3^{\circ}36') : 0{,}044 = 632$.),00065 (durch Rechnung, siehe oben Regel von v. Wuich). Reduzierte Länge Geschosses = 2,36 Kaliber, also $A : C = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4{,}72^2}{3}\right) = 4{,}2$.

a) Anfängliche Periode T resp. T_1 der Präzessionsbewegung resp. Nutationsbewegung:

Im Anfang der Flugbahn sei $\alpha = 0$, also $W_s \cdot \cos\omega : \sin\alpha = W_p \cdot \cos\vartheta_0$; somit $W_p \cdot \cos\vartheta_0 \cdot h_1 = 3{,}7$ m/kgr; $Cr : A = 150{,}5$; $Cr = 0{,}41$; $4AM = 4{,}1 \cdot 10^{-2}$; $) : (4AM) = 4{,}1$; also

Periode T der Präzession $= 0{,}7$ sec oder $1\frac{2}{5}$ Pendelungen pro sec, 26 Pendelungen auf der Flugbahn;

Periode T_1 der Nutation $= 4{,}8 \cdot 10^{-2}$ oder 21 Pendelungen pro sec;

Stabilitätsfaktor $\sigma = 4{,}1$;

Präzessionsamplitude anfangs $= f = \frac{Cr}{M} \cdot \frac{g}{v_x} = 0{,}00256$ oder 9';

Amplitude der Nutation, falls kein Anfangsstoss stattfand

$$= \frac{1}{2\cdot\sigma} \cdot \sin(\sphericalangle\, OSM) = \frac{1}{2\sigma} \cdot f = 0{,}00031 \quad \text{oder} \quad 1'.$$

b) Dasselbe für den Auffallpunkt:

Spitzer Auffallwinkel $\omega = 24\frac{14}{16}^{\circ}$, also $\sphericalangle\, OST$ = Auffallwinkel + Abgangs- l = $40\frac{12}{16}^{\circ}$; ebenso gross ist der $\sphericalangle\, \alpha$ am Schluss der letzten vollen Prä- nspendelung; entnimmt man hierfür aus Tabelle III den Wert $W_s : \sin\alpha$, so ıan

$$M = \frac{W_s \cos\omega}{\sin\alpha} \cdot h_1 = 7{,}4; \quad 4AM = 8 \cdot 10^{-2}; \quad \sigma = 2{,}1; \quad f = 0{,}00304$$

$_x = 179$ ist), $T = 0{,}35$ sec; $T_1 = 5{,}8 \cdot 10^{-2}$ sec. Man erhält damit die folgende nmenstellung:

---

* P. G. Tait, Nature 48, p. 202; vergl. auch Beiblätter zu Wiedemanns en 1895, Nr. 4, S. 288; ferner Hélie traité de bal. extér. 1884, Bd. I, p. 328.

	Präzessionsbewegung			Nutationsbewegung (ohne Stoss)			
	Periode	Zahl der Pendelungen pro Sek.	Amplitude	Periode	Zahl der Pendelungen pro Sek.	Amplitude	Stabili-fakto
im Anfang der Flugbahn	0,7 sec	1,4	9′	$4{,}8 \cdot 10^{-2}$ sec	21	1′	4,1
Ende der Flugbahn (ungenauer)	0,3 sec	3,8	crc 41°	$5{,}8 \cdot 10^{-2}$ sec	17	9°	2,1

c) **Konstruktion der Präzessionskurve** (Fig. 44).

Die graphische Lösung des ballistischen Problems ohne Rücksicht au Rotation liefert das folgende Resultat.

Entfernung von der Mündung m	Zwischenzeiten sec.	Horizontale Geschwindigkeiten v_x m/sec	Höhe z über dem Boden met	Horizontale Neigung de Tangente $\omega =$
0	0	425	0	$\left(15\frac{14}{16}{}^\circ = \vartheta_0\right)$
495	1,26	358	126	12°38′
1002	1,53	316	239	11°31′
1512	1,69	287	329	8°45′
2015	1,83	263	388	4°55′
2502	1,93	242	411	0°52′
2994	2,12	223	394	−4°50′
3504	2,38	206	325	−11°5′
4025	2,63	191	188	−18°0′
4501	2,58	179	0	−24°53′

zusammen 18,0 sec. ganze Flugzeit.

Die Bahn der Geschossspitze ohne Rücksicht auf Nutationen, d. h Präzessionsspirale muss in einzelnen Intervallen berechnet werden; als diese valle können hier die einzelnen Perioden T gewählt werden.

Im Anfang des ersten Präzessionsumlaufs ist $v_x = 425$; $M = 3{,}7$;

$$f = \frac{Cr}{M} \cdot \frac{g}{v_x} = \frac{0{,}41}{3{,}7} \cdot \frac{9{,}81}{425} = 0{,}00256;$$

$\omega = \vartheta_0 = 0{,}273$; $\alpha = 0$; $T = 0{,}7$ sec.

Im Anfang des zweiten Umlaufs, also nach 0,7 sec, ist $v_x = 380$, M

$\omega = 14\frac{1}{2}{}^\circ$, $\alpha = \vartheta_0 - \omega = 1\frac{1}{2}{}^\circ$, $f = 0{,}00286$.

Setzt man in den Ausdrücken ψ_r, ϑ_r der Reihe nach

$$t = 0, \quad \frac{1}{4}T, \quad \frac{2}{4}T, \quad \frac{3}{4}T, \text{ etc.},$$

so hat man der Reihe nach

für $t = 0$, $\psi_r = 0$, $\vartheta_r = \vartheta_0 = 0{,}273$ ($\omega_0 = 0{,}273$, $f = 0{,}00256$),

für $t = \frac{1}{4}\ T = 0{,}17$ sec $\begin{cases} \psi_r = f + \vartheta_r - \omega \\ \vartheta_r = \omega + f \end{cases}$

(wobei $\vartheta_0 - \omega = 0{,}006$, $\omega = 0{,}267$, $f = 0{,}00276$),

für $t = \frac{2}{4} T = 0{,}34$ sec $\begin{cases} \psi_r = 2f \\ \vartheta_r = \omega - (\vartheta_0 - \omega) \end{cases}$

(wobei $\vartheta_0 - \omega = 0{,}013$, $\omega = 0{,}260$, $f = 0{,}00280$),

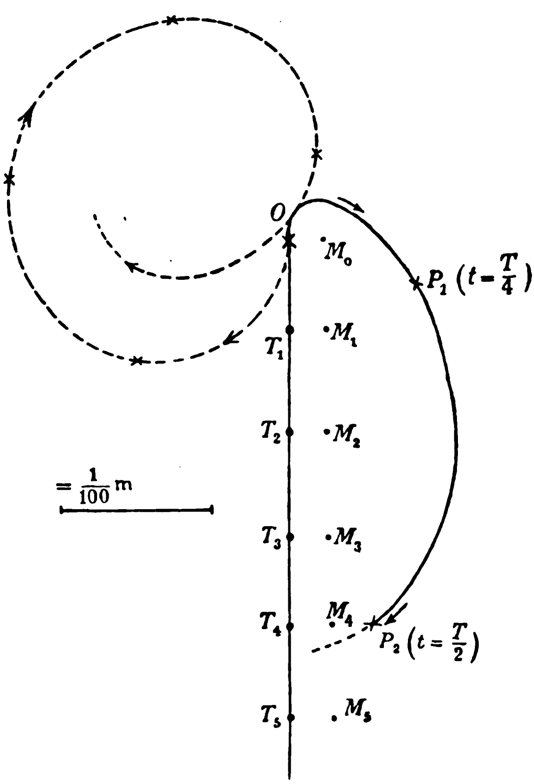
für $t = \frac{3}{4} T = 0{,}51$ sec $\begin{cases} \psi_r = f - (\vartheta_0 - \omega) \\ \vartheta_r = \omega - f \end{cases}$

(wobei $\vartheta_0 - \omega = 0{,}020$, $\omega = 0{,}258$, $f = 0{,}00283$),

für $t = \frac{4}{4} T = 0{,}7$ sec $\begin{cases} \psi_r = 0 \\ \vartheta_r = \vartheta_0 \text{ wie anfangs} \end{cases}$

($\omega = 0{,}247$, $f = 0{,}00286$),

Fig. 44.



für $t = \frac{5}{4} T = 0{,}85$ sec $\begin{cases} \psi_r = f + \vartheta_0 - \omega \\ \vartheta_r = \omega + f \end{cases}$

($\vartheta_0 - \omega = 0{,}032$, $\omega = 0{,}241$, $f = 0{,}00290$) u. s. f.

Damit lässt sich die Präzessionsspirale punktweise konstruieren.

d) **Konstruktion der Nutationsbögen, unter Voraussetzung eines** **ngsstosses, beispielsweise** $p_0 = +1{,}41$, $q_0 = 0$ (d. h. der Geschossboden te einen Stoss aufwärts oder die Spitze abwärts, wodurch der Axe die relative elgeschwindigkeit $+1{,}41$ erteilt wird), also ist $s_0 = +1{,}41$.

$$2 s_0 : \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}\right) = \frac{2 \cdot 1{,}41}{141} = 0{,}02.$$

Nun war für unseren Fall, mit $q_0 = 0$,

$$\psi_n = [-\cos\beta_2 + \cos(rt - \beta_1)] \cdot \frac{p_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}},$$

$$\vartheta_n = \quad [\sin\beta_2 - \sin(rt - \beta_1)] \cdot \frac{p_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}};$$

hierin ist anfangs $\beta_2 = \frac{M}{Cr} \cdot t = 9{,}2 \cdot t, \quad rt - \beta_1 = \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}\right) \cdot t = 141 \cdot t,$

$$\frac{p_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}} = \frac{1{,}41}{141} = 0{,}01,$$

also

$$\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(9{,}2 \cdot t) + \cos(141 \cdot t), \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(9{,}2 \cdot t) - \sin(141 \cdot t). \end{cases}$$

Setzt man hier der Reihe nach $t = 0$, $t = \frac{2\pi}{4 \cdot 141}$ (oder $= 0{,}0111$ sec), $t = 2 \cdot 0{,}$ $t = 3 \cdot 0{,}0111$ etc., so wird:

für $t = 0$ $\begin{cases} \psi_n = 0 \\ \vartheta_n = 0, \end{cases}$

für $t = 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(9{,}2 \cdot 0{,}011) = -\cos(0{,}1023) = -\cos(5^0 52') \\ \qquad = -0{,}995 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(9{,}2 \cdot 0{,}011) - 1 = -0{,}898, \end{cases}$

für $t = 2 \cdot 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(2 \cdot 0{,}1023) - 1 = -1{,}979 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(2 \cdot 0{,}1023) \quad = +0{,}206, \end{cases}$

für $t = 3 \cdot 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(3 \cdot 0{,}1023) \quad = -0{,}954 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(3 \cdot 0{,}1023) + 1 = +1{,}301, \end{cases}$

für $t = 4 \cdot 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(4 \cdot 0{,}1023) + 1 = +0{,}081 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(4 \cdot 0{,}1023) \quad = +0{,}398, \end{cases}$

für $t = 5 \cdot 0{,}011$ sec $\begin{cases} 100 \cdot \psi_n = -\cos(5 \cdot 0{,}1023) \quad = -0{,}872 \\ 100 \cdot \vartheta_n = +\sin(5 \cdot 0{,}1023) - 1 = -0{,}510 \text{ u. s. f.} \end{cases}$

Damit ist die Nutationskurve (Figur 44) gezeichnet. Die Amplit müssen im Verlauf der Flugbahn wachsen, da M von 3,7 bis 7,4 wächst, $\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}$ abnimmt.

Die Kurve (Fig. 44) ist deshalb nicht weiter fortgesetzt, weil es unter ständen als zweifelhaft gelten kann, ob die Formeln (siehe oben) noch Anwen finden dürfen.

2. Beispiel. Deutsches Infanteriegewehr M/71.

Kaliber 11 mm, Geschosslänge 27,5 mm = 2,5 Kal., $v_0 = 451$ m, Gesc gewicht 25 gr, Dralllänge 550 mm, also $r = \frac{2\pi \;\; 451}{0{,}550} = 5150$, $C = 38{,}5 \cdot 1$

$A = 142{,}4 \cdot 10^{-9}$, $C^2 r^2 = 3{,}9 \cdot 10^{-8}$, M mit $\vartheta_0 = 0$ wird $= 0{,}76 \cdot 10^{-2}$, $4AM = 0{,}43 \cdot 10^{-8}$, $\sigma = 9{,}05$, $T = 0{,}163$ sec, $T_1 = 0{,}48 \cdot 10^{-2}$ sec.

3. Beispiel. Deutsches Infanteriegewehr M/88.

Kaliber 8 mm, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 645$ m, Dralllänge 24 cm = 30,4 (Rechtsdrall), Geschosslänge 31,3 mm = 3,96 Kaliber, Geschossgewicht 14,7 g

lso $r = 16900$, mit $\vartheta_0 = 0$ ist anfangs $M = W_p \cdot h_1 = 0{,}792 \cdot 0{,}015 = 0{,}0119$ m/kgr,
$\cdot 10^{-9}$, $\frac{M}{Cr} = 58{,}2$, $A : C = 8{,}95$, $C^2 r^2 = 4{,}1 \cdot 10^{-8}$, $4AM = 5{,}1 \cdot 10^{-9}$
, $T = 0{,}11$ sec, $T_1 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ sec.

nfangsradius des Präzessionskreises = Anfangswert von

$$f = \frac{Cr}{M} \cdot \frac{g}{v_x} = \frac{9{,}81}{58{,}2 \cdot 640} = 0{,}00026 \quad \text{oder} \quad 53''$$

ei Abgangswinkel $\vartheta_0 = 6^0$), was auf relativ kleine Seitenabweichung hin-

nfängliche Amplitude stossfreier Nutation (mit $\vartheta_0 = 6^0$)

$$\frac{2 \cdot MA}{C^2 r^2} \cdot f = 0{,}000061 \quad \text{oder} \quad 12''.$$

nfangsstoss gesucht: Angenommen, es habe einmal bei horizontalem ein Durchschlagsloch auf der nahen Scheibe durch Ausmessung erkennen dass der Winkel zwischen Geschossaxe und Flugrichtung 1° betrug. er Anfangsstoss ist hierzu erforderlich? Bogen von 1° oder

$$0{,}0174 = \frac{2 \cdot s_0}{\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}} = \frac{2 \cdot s_0}{1831}, \quad s_0 = 16.$$

4. Beispiel. Versuch von Neesen.

$= 39{,}5$ kgr, $\Delta = 4^0$, $v_0 = 155$ m, $H = 3{,}53$ Kaliber, $2R = 0{,}1491$ m,
)°; also $r = 145{,}3$, $C = 0{,}0112$, $A : C = 6{,}9$; Anfangswert von $M \gtreqless 0{,}58$,
2,65, $4AM \gtreqless 0{,}18$.
$\gtreqless 10{,}8$ sec, $T_1 =$ crc. 0,31 sec. (beobachtet crc. 0,47 sec).

5. Beispiel. Versuche von Heydenreich l. c. S. 98.

a) Mit dem Mörser.

$_0 = 20^0$, $R = 0{,}0745$ m, $P = 40$ kgr, Abrundungsradius 1,5 Kal., $H = 5$ Kal.,
) m, $\Delta = 7^0$; also ist $r = 296$, $C = 0{,}0113$, $A = 0{,}159$, $C^2 r^2 = 11{,}2$, M im
$= 5{,}7$.
$= 3{,}7$ sec, $T_1 = 0{,}4$ sec; beobachtet crc 0,5 sec, $\sigma = 3{,}07$.

b) Mit der Kanone.

asselbe, nur $\vartheta_0 = 9^0$, $v_0 = 500$ m. Damit ist $r = 824$, $M = 86{,}6$, $C^2 r^2 = 86{,}8$.
$= 0{,}67$ cec, $T_1 = 0{,}177$ sec oder 5,6 pro sec; beobachtete Periode der ingen: 4—5 pro sec.

6. Beispiel. Einer der Versuche des Verfassers.

aliber 0,8 cm, Geschossgewicht 60 gr, $\vartheta_0 = 45^0$, $v_0 = 21$ m, Dralllänge 7 cm rall), Geschosslänge 14 cm; also ist
4, $C = 0{,}5 \cdot 10^{-7}$, $A : C = 193$, $M = 28 \cdot 10^{-6}$, $T = 22$ sec, $T_1 = 0{,}6$ sec
(beobachtet 0,5 bis 0,75 sec).

nfangs Nutationsamplitude ohne Stoss = crc. 7° (beobachtet: wechselnde ıde zwischen crc 5 und crc 30°, also ein Anfangsstoss wahrscheinlich).

ies giebt folgende Zusammenstellung je der Werte im Anfang der betreffenden hn. Es ist hinzugefügt, ob wegen der grossen Winkel das Rechnungsresultat der weniger zuverlässig ist (* = sehr unsicher).

	Präzessions-Pendelungen		Nutations-Pendelungen		Auf einen Präzessions-Umlauf kommen Nutations-Umläufe	Beobachtete Zahl der konischen Pendelungen pro sec	Anfänglicher Stabilitätsfaktor σ	Geschosslänge in Kalibern	Anfan geschwin keit d
	Zeit eines vollen Umlaufs sec	oder Zahl der Umläufe pro sec	Zeit eines Umlaufs sec	oder Zahl der Umläufe pro sec					Translation v_0 met/sec
21 cm-Mörser *	22,4	$\frac{1}{22}$	0,25	4	88	? zahlreiche kreisähnliche Pendelungen zu beobachten (Nutationen).	2,7	4,93	214
Versuch von Neesen K. 15 cm Kanone *	10,8	$\frac{1}{11}$	0,31	3	35	crc 2,2 (Nutation)	9,1	3,53	155
Heydenreich Mörser *	3,7	$\frac{1}{4}$	0,36	2,8	10	crc 2 (Nutation)	3,1	5	180
Heydenreich Kanone *	0,67	$1\frac{1}{2}$	0,18	5,6	37	crc 4—5 grosse Amplituden beobachtet (Nutat.)	1,6	5	500
Deutsche schwere Feldkanone	0,7	$1\frac{1}{2}$	0,05	21	14	?	4,1	2,76	442
Deutsches Infanteriegewehr M/71	0,16	6	$4,8 \cdot 10^{-3}$	209 (Ton gis)	34	?	9	2,5	451
Deutsches Infanteriegewehr M/88	0,11	$9\frac{1}{3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	290 (Ton *d*)	31	?	8,2	3,96	645
Versuch des Verfassers (Mörsermodell) *	22	$\frac{1}{22}$	0,64	$1\frac{1}{2}$	34	1,3 bis 1,8 (Nutat.)	10	17	21

Berichtigungen.

Bei diesem Anlass gestatte ich mir, einige nachträgliche Berichtigungen ıeinem „Kompendium der theoretischen äusseren Ballistik" Teubner 1896) zusammenzustellen und spreche den Herren, welche mir undlichster Weise ihre Bemerkungen zugehen liessen, meinen Dank aus.

S. 145 Z. 6 streiche „oder Richtung der Resultanten".

S. 159 Z. 7 lies „der Bewegung" statt „des Luftwiderstands".

S. 169 Z. 13 lies $\alpha = 30^0$ statt α.

S. 170 Z. 9 und 10 lies tiefer, tief statt höher, hoch.

S. 218 Fig. 60b ist „Resultante des Luftwiderstands" zu streichen.

S. 221 Z. 13 streiche „zwischen der Resultante und der Geschossaxe oder auch".

S. 260 Z. 3 von unten ist $\sigma = 0,000367$; es kann dieses Beispiel 1) nur als ein solches mit den beliebig angenommenen Zahlenwerten v_0, σ, $C\ldots$ zur Klarmachung der Methode angesehen werden und kann nichts über die Granate der leichten Feldkanone aussagen, da σ mit 3,9 zu multiplizieren wäre.

S. 311 lies „noch immer zum Teil üblich" statt „die üblichste".

S. 323 Z. 22 vor der Mitte lies „50 % von" statt „50 %, bei".

S. 351 Z. 4 von unten ist zur weiteren Klarmachung hinzuzufügen:

„mit $\delta = 1,34$; $\frac{P\,\text{kgr}}{R^2\,(\text{mm})} = 0,92$; $\lambda = 1,4$ (vgl. S. 275), und $\alpha = 0$, nach der Formel $c' = \frac{\lambda \cdot \cos\alpha \cdot P}{\delta \cdot R^2} = \frac{1,4 \cdot 1 \cdot 0,92}{1,34} = 0,962$, also $v_{25} = 605,2$" etc.

S. 462 Note 154 ist unabhängig für sich. Hinzuzufügen: Jedoch ist diese ältere Methode besonders einfach, da keine Linsen erforderlich sind.

Über Spannungszustände, bei denen ein Spannungspotential und zugleich ein Verschiebungspotential besteht.

Von

Dr. G. Holzmüller,

Hagen i. W.

1. Feststellung der Grundhypothese am Einpunktproblem.

Der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure habe ich kürzlich eine Arbeit eingereicht, deren Resultate, wie mir scheint, von allgemeinerem Interesse sind. Es handelt sich um Spannungszustände elastischer Körper, bei denen ein Spannungspotential nach Art des Newtonschen und zugleich ein Verschiebungspotential nach Art des logarithmischen besteht. Das letztgenannte Potential ermöglicht die Anwendung der konformen Abbildung, die meines Wissens bisher nur für die Saint-Venantsche Torsionstheorie in der Elastizitätslehre Verwendung fand, und zwar in sehr beschränktem Maße für einige wenige Formen des prismatischen Stabes. Einiges möchte ich ohne Rechnungen hier mitteilen, anderes vervollständigen und verallgemeinern.

Ich gehe von einem bekannten Beispiele aus:

Ein dickwandiges Rohr sei von konzentrischen Kreiscylindern begrenzt; der innere habe den Radius r_i, der äussere den Radius r_a. Im Hohlraum herrsche die positive Spannung p, möge sie ein hydraulischer Druck, eine Gasspannung oder sonstiger Art sein. Ist nun r der zwischen r_i und r_a veränderliche Radius, s_r die in den Punkten des zugehörigen Kreises entstehende radiale Spannung des Materials, die sich übrigens als negativ, d. h. als Druck herausstellt, σ_r die normal dagegen wirkende tangentiale Spannung, die sich als positiv, d. h. als Zugspannung geltend macht, so gelten nach der üblichen Theorie folgende Formeln:

$$1) \qquad s_r = p\,\frac{r_i^2}{r^2}\cdot\frac{r^2 - r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = -\,p\,\frac{r_i^2}{r^2}\cdot\frac{r_a^2 - r^2}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$2) \qquad \sigma_r = p\,\frac{r_i^2}{r^2}\cdot\frac{r_a^2 + r^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Als Verschiebungsweg w_r ergiebt sich:

$$w_r = p\,\frac{r_i^2}{mE(r_a^2 - r_i^2)}\left((m-1)r + (m+1)\frac{r_a^2}{r}\right),$$

rösste Anstrengung des Materials:

$$\sigma = \frac{p}{r_a^2 - r_i^2}\left(\frac{m-1}{m}r_i^2 + \frac{m+1}{m}r_a^2\right).$$

Hier bedeutet E den Elastizitätsmodul, m die bekannte Konstante uerkontraktion bei Zugbeanspruchung. Vergl. z. B. Föppl: Festigehre, S. 306. Wichtig sind die Formeln für die Konstruktion und hnung der Geschütz- und Gewehrläufe, der hydraulischen Pressen, ruckrohre von Bergwerkspumpen und Wasserleitungen, der Dampf- und der Druckcylinder gewisser physikalischer Apparate, z. B. , die zur Verflüssigung von Gasen durch hohen Druck bei nie- r Temperatur dienen.

Bei den Ringgeschützen werden bekanntlich zur Verstärkung des rstandes Ringe auf das Hauptrohr gezogen, die in erhitztem Zu- e gerade noch darauf passen, nach geschehener Erkaltung aber k nach innen geben. Zur Berechnung des Zustandes braucht man auch die Formeln für äusseren Druck, die man erhält, indem r_a und r_i mit einander vertauscht.

Bei den Formeln der Festigkeitslehre ist es, da während der Ent- lung zahlreiche Vernachlässigungen stattfinden, stets zweckmässig, raktisch durch Versuche auf ihre angenäherte Richtigkeit zu n und theoretisch zu revidieren, auf Grund welcher Hypothesen wa als richtig angenommen werden können.

m vorliegenden Falle ist zunächst das einfachste Proportionalitäts- : der Festigkeitslehre angewandt, zweitens ist die dritte Dimension chlässigt worden, was bei langen Cylindern etwa ebenso berech- st, wie bei den zweidimensionalen Problemen der Wärme- und otentialtheorie. Alles aber lässt sich durch eine einzige Hypo- ersetzen.

Macht man nämlich r_a unendlich gross, so erhält man für die un- nzte Platte folgende Formeln:

$$s_r = -p\frac{r_i^2}{r^2},$$

$$\sigma_r = \quad p\frac{r_i^2}{r^2},$$

$$w_r = \frac{pr_i^2}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)\frac{1}{r},$$

$$\sigma_m = p\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Die Formel 7) folgt aus den Spannungsformeln, wenn die negative ngerung d. h. die Verkürzung des radialen Elementes dr gleich

9) $$\frac{s\,dr}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)=-\frac{p\,r_i^{\,2}}{E\,r^2}\left(1+\frac{1}{m}\right)dr,$$

die der Strecke des Radius von r_i bis r also gleich

$$-\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i^{\,2}}{E}\int_{r_i}^{r}\frac{dr}{r^2}=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i^{\,2}}{E}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r}\right)$$

gesetzt wird. Da nämlich nach 6) der unendliche Kreis keine Verlängerung seiner Peripherie erleidet, also dort auch keine Verschiebung nach aussen stattfindet, so ist der unendliche Bereich als ruhend zu betrachten. Da ferner die letzte Formel für $r=\infty$ in

$$w_i=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i^{\,2}}{r_i\,E}=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i}{E}$$

übergeht, so bedeutet dieser Ausdruck die Verschiebung der Punkte des inneren Grenzkreises. Die Integralformel giebt also die relative Verschiebung der Punkte r gegen die Punkte r_i an, die absolute Verschiebung der Punkte r wird daher

$$w_r=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p\,r_i^{\,2}}{E}\cdot\frac{1}{r},$$

was mit 7) übereinstimmt.

Man kann also für die Untersuchung folgende Hypothese zur Grundlage machen:

Die gegen die cylindrische Innenwand der unbegrenzten Platte wirkende Druckspannung p verursacht in der Entfernung r von der Axe radiale und tangentiale Spannungen

$$s_r=-p\frac{r_i^{\,2}}{r^2}\quad\text{und}\quad\sigma_r=p\frac{r_i^{\,2}}{r^2},$$

die absolut genommen einander gleich und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung r sind; sie verursacht ferner Verschiebungen, die umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung und von der Grösse

$$w_r=\frac{p\,r_i^{\,2}}{E}\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{r}$$

sind.

Diese Hypothese also müsste auf ihre Richtigkeit durch Versuche geprüft werden. Da dies mit unbegrenzten Platten nicht geschehen kann, begrenzt man die Platte durch eine konzentrische Cylinderfläche vom Radius r_a und bringt dort den vorher daselbst befindlichen Spannungszustand künstlich hervor. Dazu ist, wenn das Obige richtig ist, nur eine radiale Druckspannung nach innen, also eine Spannung von der Grösse $-p\frac{r_i^{\,2}}{r_a^{\,2}}$ nötig. Durch diese und die Innenspannung p wird die richtige Spannung σ_{r_a} von selbst hervorgebracht, denn nach Formel 2) wird durch p:

$$\sigma'_{r_a} = p\frac{r_i^2}{r_a^2}\cdot\frac{r_a^2+r_a^2}{r_a^2-r_i^2},$$

nach der Formel für äusseren Druck dagegen wird durch $p\frac{r_i^2}{r_a^2}$:

$$\sigma_{r_a} = \left(p\frac{r_i^2}{r_a^2}\right)\frac{r_a^2}{r_a^2}\,\frac{r_a^2+r_i^2}{r_i^2-r_a^2} = -p\frac{r_i^2}{r_a^2}\,\frac{r_a^2+r_i^2}{r_a^2-r_i^2}.$$

Beide Wirkungen geben vereinigt:

$$\sigma_{r_a} = \sigma'_{r_a} + \sigma''_{r_a} = p\frac{r_i^2}{r_a^2}.$$

Im ganzen Innern herrscht also der durch 5) und 6) dargestellte Spannungszustand, wie auch aus der Formel 1) hervorgeht.

Sollte es also z. B. für das Hauptrohr eines Ringgeschützes wünschenswert erscheinen, dass es während der Zeit der höchsten Spannung p auf Zug ebenso stark wie auf Druck beansprucht werde, so müsste der aufgepasste Ring dabei seinen Gegendruck auf $p\frac{r_i^2}{r_a^2}$ steigern, was auch erreicht werden kann.

Man sollte auf den ersten Blick meinen, die Druckspannungen müssten umgekehrt proportional der ersten Potenz des Radius sein, da die cylindrischen Flächen dieser Grösse direkt proportional sind. Dies ist aber bekanntlich nicht der Fall, da die Zugspannungen jeder Peripherie einen Teil der Druckspannung aufnehmen und nur den Rest weiter wirken lassen. Der Ring des Ringgeschützes dagegen giebt eine Druckspannung derart her, dass das Material des Hauptrohrs in höherem Grade auf Druck beansprucht wird, während die bedenklich hohen Zugspannungen vermindert werden. Einfache Rechenbeispiele ergeben sich bei der Annahme des vorliegenden besonderen Falles, wie ich sie in der Ingenieur-Zeitschrift durchführe.

Wie das einfache Proportionalitätsgesetz der Elastizität nur für gewisse Materialien gilt, so wird auch die vorstehende Hypothese nur eine beschränkte Bestätigung finden. Dies schadet aber nichts, da sie uns für den Unterricht einfache Übungsbeispiele verschafft, die geeignet sind, das Verständnis der Theorie zu erleichtern und auf schwierigere Annahmen vorzubereiten. Handelt es sich in Wirklichkeit um andere Potenzen, wie es das potenzierte Elastizitätsgesetz für gewisse Materialien vermuten lässt, so sind die Rechnungsschwierigkeiten nicht bedeutendere.

Aus den Gleichungen 5) geht hervor, dass nach der angenommenen Hypothese für den Spannungszustand der unbegrenzten Platte oder des auch äusserlich in entsprechender Stärke beanspruchten Rohres ein Spannungspotential von der Grösse:

$$U = p\frac{r_i^2}{r} = k\frac{1}{r} \tag{10}$$

besteht, welches in der Form dem Newton'schen entspricht.

Gleichzeitig aber besteht für die radialen Verschiebungen ein Verschiebungs-Potential:

$$11)\qquad V = \left(1 + \frac{1}{m}\right) p r_i^2 \lg r - k_1 \lg r.$$

Zu jedem solchen Potential gehört auch ein Drehungspotential, welches aber hier ausser acht bleiben kann, da der Zug doch überall gleich dem Druck wird, so dass neue Rechnungen überflüssig sind.

Auf das erstgenannte Potential kann man die konforme Abbildung nicht anwenden, auf das letztere dagegen ist sie anwendbar. Beide geben einen einfachen Überblick über kompliziertere Zustände und eine ausserordentliche Vereinfachung der Berechnungen.

Soll das Spannungspotential der Reihe nach Werte annehmen, die einer arithmetischen Reihe entsprechen, so dass die Potentialdifferenzen von Kreis zu Kreis gleich gross sind, so muss dasselbe mit $\frac{1}{r}$ geschehen. Ist die Reihe für jenes z. B.:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

so muss r die Werte

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots$$

annehmen.

Soll dasselbe mit dem Verschiebungspotential geschehen, so hat $\lg r$ der arithmetischen Reihe zu folgen, also r der Reihe:

$$e^{\pm 0},\ e^{\pm 1},\ e^{\pm 2},\ e^{\pm 3}, \ldots$$

Häufiger findet aber hier aus bekannten Gründen die Reihe:

$$e^{\pm 0},\ e^{\pm \frac{2\pi}{n}},\ e^{\pm \frac{4\pi}{n}},\ e^{\pm \frac{6\pi}{n}},\ e^{\pm \frac{8\pi}{n}}, \ldots$$

Anwendung, weil diese bequem auf die quadratische Einteilung der Ebene führt, die bei dem Spannungspotential keine Anwendung findet.

Wichtig ist noch die Berechnung der Verschiebungsarbeit, für die, weil die einzelnen Teile einander ausweichen, nicht die Verschiebung selbst massgebend ist, sondern die an der betreffenden Stelle auftretende Dehnung und Verkürzung. Nach gebräuchlicher Annahme wächst während der Verschiebung die Spannung regelmässig von o auf s an, also wird $\frac{s}{2}$ massgebend. Hat ein Stab die Länge l und den konstanten Querschnitt f und ist die Dehnung oder Verkürzung gleich λ, so ist die geleistete Arbeit gleich $\frac{s}{2}\lambda f$. Da nach bekanntem Satze der Mechanik die Arbeiten einfach algebraisch, nicht aber nach dem Parallelogramm, addiert werden, so ist die Berechnung der inneren Arbeit des Materials sehr einfach. Die Verkürzungsarbeit und die Verlängerungsarbeit sollen getrennt behandelt werden. Nimmt man für die radiale Verkürzung die Werte von s und λ aus den Gleich-

ungen 5) und 9) für f die Cylinderfläche $2r\pi\delta$, wo δ die Dicke der Platte ist, so ergiebt sich als Summe der Verkürzungsarbeiten

$$A_1 = p^2 r_i^4 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{\pi\delta}{E} \int_{r_i}^{\infty} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2} \frac{p^2 r_i^2}{E} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \pi\delta.$$

Berechnet man die Dehnungsarbeit für den Kreisring mit den Radien r und $r + dr$, und integriert man von r_i bis ∞, so erhält man für A_2 denselben Wert wie für A_1. Die gesamte innere Arbeit des Materials ist also

$$12) \qquad A = \frac{p^2 r_i^2}{E} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \pi\delta.$$

Dafür giebt es eine gute Probe. Die etwa von Pulvergasen an die innere Wand abgegebene Arbeit ergiebt sich aus p, der Fläche $2r_i\pi\delta$ und aus der wirklichen Verschiebung $\frac{p r_i}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$, wenn während des Vorgangs die Spannung regelmässig von o auf p anwächst, als derselbe Wert A, so dass, wie zu erwarten stand, die äussere Arbeit gleich der Summe aller inneren Verschiebungsarbeiten ist.

In der Ingenieur-Zeitschrift berechne ich Beispiele unter Annahme eines Druckes von 3000 Atmosphären. Da die Verschiebungen dabei nur die Grösse 0,195 mm betragen, ist die Arbeitsabgabe gering. Man hat aber nach Abstellung des Druckes an der Innenwand auf Schwingungen von etwa 0,35 mm zu rechnen.

Die Arbeit für den Kreisring mit den Radien r_i und $2r_i$ beträgt $\frac{3}{4}$ der Gesamtarbeit, die ganze übrige unbegrenzte Masse übernimmt nur $\frac{1}{4}$. So sieht man recht deutlich, wie schwach die Beanspruchung der äusseren Masse ist, wie unwirksam also die blosse Verdickung der Druckrohre schliesslich werden muss.

Ich werde nun zu dem Falle übergehen, wo mehrere cylindrische Öffnungen in der Platte befindlich sind. Ihr Durchmesser soll gegen ihre gegenseitige Entfernung klein sein, so dass dieselben Vereinfachungen eintreten, wie bei den in der Regel als punktförmig bezeichneten Elektroden. Muss der Durchmesser berücksichtigt werden, so sind gewisse Korrekturen zu machen, die aber in einiger Entfernung von den Cylinderwänden verschwindend klein werden. Da die Grösse der Spannungen auch von der Konstanten pr_i^2 abhängt, so sollen zwei solche Wirkungen als gleichwertig betrachtet werden, sobald sie in dieser Konstanten übereinstimmen. Vierfache Spannung im Cylinder vom doppelten Radius wirkt also ebenso, wie einfache Spannung im Cylinder vom einfachen Radius. (Vergl. die Bestrebungen, das Kaliber der Gewehre möglichst klein zu machen.)

Die Elemente der Potentialtheorie, wie sie in meinem Lehrbuch elementar entwickelt sind, setze ich als bekannt voraus.

Spannungen der zu besprechenden Art treten z. B. auch ein, wenn kalt gehaltene Bolzen in cylindrische Öffnungen eingetrieben werden, in die sie noch hinein passen, wenn die Platte stark erhitzt ist. Zieht sich die Platte bei der Erkaltung zusammen, so steht sie unter entsprechender Spannung. Dies ist vielleicht die einfachste Art, die Versuche zu arrangieren, da sich bei hydraulischen Experimenten die Beobachtung ganz ausserordentlich erschwert, weil die Bodenfläche sich anders verhält als die Cylinderwände.

2. Mehrpunktprobleme.

Es seien zunächst zwei cylindrische Öffnungen in der unbegrenzten Platte, beide vom Radius a. In beiden werde dieselbe Spannung p angebracht. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte M_1 und M_2 mache man zur X-Axe, ihren Halbierungspunkt O zum Koordinatenanfang. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man gelegentlich die Abstände OM_1 und M_2O gleich 1 setzen. Wie gross sind nun die Spannungen in einem Punkte P, der von den Mittelpunkten die Entfernungen r_1 und r_2 hat?

$$s_1 = \sigma_1 = \pm \frac{pa^2}{r_1^2} \quad \text{und} \quad s_2 = \sigma_2 = \pm \frac{pa^2}{r_2^2}$$

geben die Resultanten

$$1) \qquad s = \sigma = \pm pa^2 \sqrt{\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}}.$$

Die Neigung α von s ergiebt sich, im Sinne einer Anziehung gerechnet, aus

$$2) \qquad \tan\alpha = \frac{r_2^2 \sin\vartheta_1 + r_1^2 \sin\vartheta_2}{r_2^2 \cos\vartheta_1 + r_2^2 \sin\vartheta_2},$$

die von σ ist um $\frac{\pi}{2}$ grösser. Die eine Neigung ist die Normale der Niveaulinie:

$$3) \qquad pa^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = c \quad \text{oder} \quad k\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = c,$$

die andere Normale der Orthogonalkurve:

$$4) \qquad (\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2) = \gamma.$$

Die Gleichung 3) ist die der Spannungslinien des Druckes s, die Gleichung 4) die der Spannungslinien des Zuges. Ihre Gestalt ist aus jedem Werke der Potentialtheorie bekannt. Eine sehr einfache Konstruktion giebt das Maxwellsche Verfahren, die Diagonalkurven des Maschennetzes der beiden Kreisscharen bezw. der beiden Strahlenbüschel zu zeichnen. Bei den Kreisen folgen die Radien z. B. dem besprochenen Gesetze:

$$5) \qquad \frac{1}{0}, \ \frac{1}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ldots,$$

bei den Strahlen die Kosinus der Neigungswinkel z. B. dem Gesetze:

$$0, \ \pm\frac{1}{n}, \ \pm\frac{2}{n}, \ \pm\frac{3}{n}, \cdots \pm\frac{n}{n}.$$

Die Asymptoten der Kurven 4) folgen mit den Kosinus ihrer
ungswinkel demselben Gesetze. Das Spannungspotential ist der
h 3) gegebene Ausdruck:

$$U = p a^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \quad \text{oder} \quad U = \varkappa\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \qquad)$$

Die Kurven $s = c_1$ sind die Linien gleicher Zug- und Druck-
nung, die Kurven $\tan\alpha = c_1$ sind die Linien gleicher Richtung
er Spannungen. Die letzteren sind umgekehrt proportional den
nen Abständen der Niveaulinien 3), sobald die Einteilung 5) ge-
t ist. Der Spannungszustand ist damit vollständig beschrieben.

Ganz anderen Gesetzen folgen die Verschiebungen, denn

$$w_1 = \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p a^2}{E}\cdot\frac{1}{r_1} \quad \text{und} \quad w_2 = \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p a^2}{E}\cdot\frac{1}{r_2}$$

n sich zusammen zu der resultierenden Verschiebung:

$$= \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p a^2}{E}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2\cos\gamma}{r_1 r_2}} = 2\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p a^2}{E}\,\frac{r}{r_1 r_2} = \varkappa_1\frac{2r}{r_1 r_2},$$

der Radius OP ist. Die leichte Umformung des ersten Aus-
ks findet man in meiner Potentialtheorie (erschienen bei B. G. Teubner).
Richtung β der Resultante w ergiebt sich aus:

$$\tan\beta = \frac{r_2\sin\vartheta_1 + r_1\sin\vartheta_2}{r_2\cos\vartheta_1 + r_1\cos\vartheta_2}.$$

Führt man wieder r und seine Neigung ϑ ein, so folgt:

$$\tan\beta = \tan[(\vartheta_1+\vartheta_2)-\vartheta],$$

endlich

$$\beta = (\vartheta_1+\vartheta_2)-\vartheta. \qquad)$$

Der Faktor $\varkappa_1$ hat sich hier überall weggehoben.

Die Verschiebungen in der Druckrichtung sind normal gerichtet
n die Niveaulinien der Verschiebung, deren Gleichung lautet:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{p a^2}{E}(\lg r_1 + \lg r_2) = c \quad \text{oder} \quad \varkappa_1(\lg r_1+\lg r_2) = c, \qquad)$$

r man auch schreiben kann:

$$r_1 r_2 = e^{\frac{c}{\varkappa_1}}, \qquad *)$$

ss es sich um konfokale Lemniskaten handelt. Die Verschiebungs-
n selbst sind von der Gleichung:

$$(\vartheta_1+\vartheta_2) = \gamma, \qquad)$$

bekanntlich ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln bedeuten.

Die Maxwellsche Konstruktion giebt das richtige Netz, wenn die
radien in geometrischer Reihe aufeinander folgen, z. B. in der
e:

$$e^0,\; e^{\pm\frac{2\pi}{n}},\; e^{\pm\frac{4\pi}{n}}\; e^{\pm\frac{6\pi}{n}},\ldots, \qquad)$$

end die Neigungen der Strahlen jedes Büschels der Reihe:

13) $$0, \quad \pm\frac{2\pi}{n}, \quad \pm\frac{4\pi}{n}, \quad \pm\frac{6\pi}{n}, \cdots$$

folgen. So erhält man die Einteilung in kleine Quadrate, während die Spannungen auf unähnliche Rechtecke führten.

Der Ausdruck für das Verschiebungspotential ist

14) $$V = \left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}(\lg r_1 + \lg r_2) = \varkappa_1(\lg r_1 + \lg r_2) = \varkappa_1 \lg(r_1 r_2).$$

Ist die Einteilung ins Kleinste fortgesetzt, so sind die Grössen der Verschiebungen umgekehrt proportional den Abständen der Niveaulinien bezw. der Verschiebungslinien, d. h. den Dimensionen der Quadrate.

Der in 8) vorkommende Ausdruck $\varkappa_1 \frac{2r}{r_1 r_2}$ ist der absolute Betrag des Differentialquotienten derjenigen Funktion, durch die das Kurvennetz in eine Doppelschar orthogonaler Parallelen transformiert wird. Diese Funktion ist

$$Z = \varkappa \lg[(z - z_1)(z - z_2)] = \varkappa \lg[(z-1)(z+1)],$$

sobald M_1 um M_2 in die Punkte $x = \pm 1$ der x-Axe gelegt sind (vergl. meine Abhandlung im vorigen Bande dieser Zeitschrift). Sind dS und ds einander entsprechende Elemente (wobei s nichts mit der Spannung zu thun hat), so besteht zwischen ihnen die Gleichung:

$$dS = \varkappa_1 \frac{2r}{r_1 r_2} ds \quad \text{bezw.} \quad ds = \frac{r_1 r_2}{\varkappa_1 2r} dS.$$

In der Z-Ebene sind alle Quadratseiten dS einander gleich, folglich sind die Quadratseiten des lemniskatisch-hyperbolischen Systems der z-Ebene proportional dem Ausdrucke $\frac{r_1 r_2}{r}$. Dieser ist für jede Lemniskate, auf der $r_1 r_2$ konstant ist, proportional $\frac{1}{r}$; für jeden Kreis um O proportional $r_1 r_2$.

Dagegen ist der in 9) stehende Ausdruck $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2)$ der Richtungsunterschied der dS gegen die ds, also ist die Neigung der den horizontalen Parallelen entsprechenden Quadratseiten gleich

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \vartheta,$$

was mit Obigem übereinstimmt. $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2)$ ist dabei die Abweichung des Differentialquotienten der abbildenden Funktion Z.

Damit ist die Angelegenheit der Verschiebungen auch funktionentheoretisch erledigt.

Die Verschiebungen gehen in den Hyperbeln vor sich. Daher soll genauer untersucht werden, was aus einem kleinen lemniskatisch-hyperbolischen Quadrate eigentlich wird. Auf die lemniskatischen Randlinien des Quadrates wirken nach innen breite Bündel von Drucklinien und nach aussen schmale Bündel von Zuglinien, die einen um den kleinen Winkel $(\alpha - \beta)$, der aus 2) und 9) zu berechnen ist, von der Normalen abweichend, die andern um ebensoviel gegen die Randlinie geneigt. Entsprechend wirken auf die hyperbolischen Seiten

te Bündel von Zuglinien und schmale Bündel von Drucklinien, die n fast normal, die anderen fast tangential, die einen nach aussen, anderen nach innen. Durch Zerlegung erhält man die noren Druckkräfte und die tangentialen Schubkräfte. Letztere verdeln die rechten Winkel des Quadrates in spitze und stumpfe, die wenig von 90° unterschieden sind. Die entsprechenden Berechgen können zur Kontrolle durchgeführt werden, sind aber für uns rflüssig. Ist nämlich in dem kleinen Quadrat $ABCD$ die Seite $> BC$, so bewegt sich nach Obigem A um weniger als B, der niskatenbogen AB geht also nicht in einen solchen $A_1 B_2$ über, lern in eine Schräglinie $A_1 B_1$, die um ξ abweicht. Dieses ξ kann ıu bestimmt werden. Bezeichnet man den Abstand OA mit r_a,

Fig. 1.

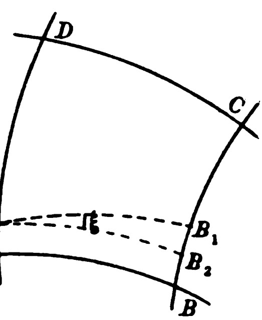
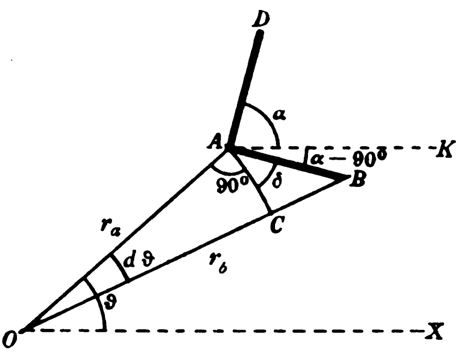


Fig. 2.



mit r_b, so wird in Figur 1 die Verschiebung $AA_1 = \varkappa_1 \frac{2 r_a}{r_1 r_2}$, dagegen die „Parallelverschiebung“

$$BB_1 = \varkappa_1 \frac{2 r_b}{r_1 r_2}.$$

A und B sind beide Produkte $r_1 r_2$ einander gleich, also ist der rschuss:

$$B_2 B_1 = 2 \varkappa_1 \frac{r_b - r_a}{r_1 r_2}.$$

Hier hat (nach Fig. 2) $r_b - r_a$ folgende Bedeutung. Der um O mit beschriebene Bogen AC macht $CB = r_b - r_a$, also ist

$$r_b - r_a = AB \sin \delta = AB \sin[(180^0 - \vartheta) - 90^0 - (\alpha - 90^0)],$$

ε der Neigungswinkel von AD, also gleich $(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \vartheta$ ist. Es $r_b - r_a = AB \cdot \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$, also ist der Verschiebungsüberschuss:

$$B_2 B_1 = \frac{2 \varkappa_1}{r_1 r_2} AB \cdot \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

daher

$$\tan\xi = \frac{B_2 B_1}{AB} = \frac{2\varkappa_1}{r_1 r_2} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

oder in der ursprünglichen Bezeichnung:

$$15)\qquad \tan\xi = 2\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}\cdot\frac{\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)}{r_1 r_2}.$$

Hier sind für unendlich kleine Quadrate die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung in aller Schärfe berücksichtigt. Die Tangente des Schubwinkels ξ ist also proportional der Grösse $\frac{\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)}{r_1 r_2}$. Für die Eckpunkte A, B, C, D eines endlichen „Quadrates" handelt es sich um ξ_a, ξ_b, ξ_c, ξ_d, so dass dieses ein Trapez wird. Nur bei unendlicher Kleinheit kann es als Parallelogramm angesehen werden. Man beachte, dass die Unterschiede der Kräfte längs der Quadratseiten hier berücksichtigt werden, was in der Regel nicht geschieht.

Auf jeder Lemniskate ist $\tan\xi$ proportional $\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)$, auf jeder Hyperbel proportional $\frac{1}{r_1 r_2}$. Auf den Koordinatenaxen ist $\tan\xi$ gleich Null, ebenso im unendlich fernen Bereich. Auf jeder Lemniskate ist ξ, also auch die Schubspannung, am grössten für $\vartheta_1+\vartheta_2 = 90^0$, d. h. im Schnittpunkte mit der Hyperbel, deren Asymptoten die Neigungen $\pm 45^0$ haben.

Da man sowohl AA_1, als auch BB_1, CC_1, DD_1 genau kennt, kennt man auch A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 und D_1A_1 auf das genaueste, daher sind auch die spezifischen Dehnungen und Verkürzungen bekannt.

Die Kurven gleich starker Verschiebung haben die Gleichung:

$$16)\qquad 2\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{pa^2}{E}\,\frac{r}{r_1 r_2} = c,$$

die Kurven gleicher Verschiebungsrichtung die Gleichung:

$$17)\qquad \vartheta_1+\vartheta_2-\vartheta = \gamma.$$

Sie sind orthogonal zu einander und bilden selbst ein isothermisches Kurvensystem. In Figur 135 meiner Potentialtheorie und in Figur 45 der isogonalen Verwandtschaften sind sie dargestellt.

Die Verschiebungen entsprechen ganz den Geschwindigkeiten für das zweidimensionale Zweipunktproblem der stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit im Helmholtzschen Sinne unter Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. Beide Probleme unterscheiden sich nur dadurch, dass die Stromfäden ohne Reibung und sonstige gegenseitige Einwirkungen unabhängig neben einander herlaufen, während hier die Fasern mit einander verbunden sind, so dass Zug-, Druck- und Schubspannungen entstehen müssen.

Bringt man den beschriebenen Spannungszustand hervor, so entstehen die angegebenen Verschiebungen. Bringt man die letzteren hervor, so entstehen die beschriebenen Spannungen.

Wegen der Einfachheit der Addition der Arbeiten ergiebt sich Wert der gesamten inneren Verschiebungsarbeit für die Platte von Dicke δ

$$A = 2p^2a^2\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{\pi}{E}.$$

Sind die Durchmesser der Cylinder so gross, dass man sie be-sichtigen muss, so sind Korrekturen zu machen, die etwa der ır 62 der „Potentialtheorie" entsprechen. In einiger Entfernung den die Änderungen verschwindend klein. Sie werden dadurch vorgerufen, dass die Kreise weder Niveaulinien der Spannung noch he der Verschiebung sind.

Haben $p_1a_1^2 = \nu_1$ und $p_2a_2^2 = \nu_2$ für beide Cylinder verschiedene te, so hört die Symmetrie auf, und der Faktor pa^2 lässt sich nicht r absondern. Im übrigen aber sind die Rechnungen dieselben ohne jede Schwierigkeit. Für die Konstruktion und Berechnung Spannungslinien und der Niveaulinien der Spannung werden die ıren 71 bis 75 meiner „elementaren Potentialtheorie" massgebend. ersteren erhalten die Gleichung:

8) $$\nu_1\cos\vartheta_1+\nu_2\cos\vartheta_2=\gamma,$$

andern die Gleichung:

9) $$\frac{\nu_1}{r_1}+\frac{\nu_2}{r_2}=c.$$

Für die Verschiebungen handelt es sich um die Gleichungen:

0) $$\nu_1\vartheta_1+\nu_2\vartheta_2=\gamma_1$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{E}(\nu_1\lg r_1+\nu_2\lg r_2)=c,$$

r, wenn man die Konstanten mit nach rechts schafft,

1) $$\nu_1\lg r_1+\nu_2\lg r_2=c_1.$$

Die innere Verschiebungsarbeit des Materials wird für die Platte Dicke δ

$$A=\frac{\pi\delta}{E}\left(1-\frac{1}{m}\right)[p_1a_1^2+p_2a_2^2].$$

Die Kurven 20) und 21) gehören zu den unregelmässigen Hyperbeln Lemniskaten zweiter Ordnung, deren Eigenschaften in meiner ıeorie der isogonalen Verwandtschaften" und in der oben genannten ıandlung im Jahrgang 1897 behandelt sind. Die abbildende Funktion, en Differentialquotient dieselbe Rolle wie oben spielt, ist jetzt von Form:

$$Z=\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{E}[\nu_1\lg(z-z_1)+\nu_2\lg(z-z_2)]$$
$$=\varkappa\nu_1\lg(z-z_1)+\varkappa\nu_2\lg(z-z_2).$$

Der absolute Betrag und die Abweichung des Differentialquotienten:

$$=\frac{\varkappa\nu_1}{z-z_1}+\frac{\varkappa\nu_2}{z-z_2}=\varkappa\frac{\nu_1(z-z_2)+\nu_2(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)}=\varkappa(\nu_1+\nu_2)\frac{z-\dfrac{\nu_1z_2+\nu_2z_1}{\nu_1+\nu_2}}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

eben sich als

$$R=\varkappa(\nu_1+\nu_2)\frac{\varrho}{r_1\cdot r_2}$$

$$\Phi = \vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

wobei r_1 und r_2, ϑ_1 und ϑ_2 dieselbe Bedeutung wie oben haben, während der Radiusvektor ϱ von dem Punkte $\frac{\nu_1 z_2 + \nu_2 z_1}{\nu_1 + \nu_2}$ ausgeht. Dieser ist der „Schwerpunkt“ von M_1 und M_2, wenn man die Faktoren ν_1 und ν_2 als Gewichte auffasst. Nach ihm hin sind alle Asymptoten der Kurven 20 gerichtet. Auf Grund dieser Bemerkungen ist auch das unsymmetrische Zweipunktproblem fast wörtlich wie oben zu erledigen (vergl. Jahrgang 1897, S. 225).

Dasselbe gilt auch von den Mehrpunktproblemen, wo sogar einige von den Faktoren $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ negativ sein dürfen, wie es in der vorigen Arbeit angenommen worden ist. Hier würde dies den rein theoretischen Fall bedeuten, dass die einen Cylinderwände auf Zug, die anderen auf Druck beansprucht würden. Die Zugbeanspruchung lässt sich aber praktisch kaum durchführen.

Handelt es sich z. B. um zwei entgegengesetzt gleichwertige Cylinder, d. h. gilt für den einen $+pa^2$, für den anderen $-pa^2$, so geben die Spannungen die Linien $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c$ und $\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = \gamma$, die aus der Lehre vom Magnetismus bekannt sind (vergl. Figur 70 meiner elementaren Potentialtheorie). Die Verschiebungen hingegen erfolgen in Linien $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \gamma$ mit den Niveaukurven $\lg \nu_1 - \lg \nu_2 = c$, die ein Kreisbüschel und die zugehörige Kreisschar darstellen. Für den Fall der Ungleichwertigkeit geht ein Teil der Spannungslinien ins Unendliche, wie es dort in Figur 76 und 77 gezeigt ist. Dasselbe gilt von den Verschiebungslinien in ähnlicher Weise. Die Asymptoten der Verschiebungslinien gehen in jedem Falle nach dem Schwerpunkte der Wurzelpunkte der massgebenden Funktion (vergl. Theorie der isogonalen Verwandtschaften), der mit dem Massenschwerpunkte zusammenfällt. Die Bedeutung der Lemniskaten und Hyperbeln höherer Ordnung, die für zahlreiche Gebiete der mathematischen Physik eine so grosse ist, kommt also auch im Gebiete dieser Festigkeitstheorien zur Geltung.

3. Schlussbemerkungen.

Worin liegt nun der Wert der obigen Betrachtungen?

Die mathematische Elastizitätstheorie pflegt, wenn sie im Sinne von Saint-Venant, Clebsch und Grashoff von vornherein in voller Allgemeinheit begonnen wird, den Studierenden der technischen Hochschule und der Universität mancherlei Schwierigkeiten zu bieten. Sie beschäftigt sich mit langwierigen allgemeinen Betrachtungen, für die dem Durchschnittszuhörer bestimmte Vorstellungen fehlen, sodass das Fortbestehen von Zweifeln erklärlich erscheint. Die Früchte werden erst später gepflückt und wirkliche Beispiele kommen erst nach Kenntnisnahme des gesamten Werkzeugapparates zur Geltung.

Ich glaube, dass die obigen Beispiele, die sich auf eine einfache Hypothese stützen, deren Richtigkeit zunächst als zweifelhaft hingestellt werden kann, sich ganz ausserordentlich als einführendes Beispiel eignen würden, weil das gleichzeitige Auftreten der Zug-, Druck- und Schubspannungen, der Unterschied der Spannungsrichtungen und Verschiebungsrichtungen, die Dehnungen, Verkürzungen und Winkeländerungen in einer so klaren und durchsichtigen Weise auseinander gehalten werden können, dass der Studierende leicht erkennt, worauf es ankommt. Rechnungsschwierigkeiten aber finden sozusagen gar nicht statt. Gleichzeitig wird der Wert der Lehren vom Potential, von der konformen Abbildung und den Kraftlinien deutlich ins Licht gestellt.

Weitere Bemerkungen lassen sich an das Einpunktproblem anschliessen, wenn man sich den Cylinder längs der X-Axe aufgeschnitten denkt, wobei ganz andere Verhältnisse eintreten. Betrachtet man einen ausgeschnittenen Sektor kleinen Centriwinkels, so kann man für die Spannungen das logarithmische Potential anwenden, für die Verschiebungen das aus diesem durch Integration hervorgehende. Ist aber der Centriwinkel grösser, so treten Entlastungen der Tangentialspannungen ein, die kleiner sind als früher. Die Anwendbarkeit der konformen Abbildung hört damit auf, aber mit Potentialfunktionen kann man trotzdem noch arbeiten.

Angenommen, für die Hohlkugel mit unbegrenzter umgebender Masse liesse sich eine Hypothese von ähnlicher Einfachheit aufstellen, wie bei der unbegrenzten Platte mit einer cylindrischen Öffnung, angenommen also, auch hier dürfte man mit irgend welchen Potenzen von r arbeiten, z. B. mit $\frac{1}{r^p}$ für die Spannungen und $\frac{1}{r^q}$, z. B. $\frac{1}{r^{p+1}}$ für die radialen Verschiebungen, so würde dies zwar nicht genau zu den Resultaten der strengeren mathematischen Theorie stimmen, wie sie z. B. bei Kirchhoff in der 97. Vorlesung abgeleitet werden, aber die Potenzen liessen sich doch so wählen, dass zwischen beiden Theorien eine grosse Annäherung stattfindet. Ob die Rechnungserleichterungen dabei ebenso grosse sein würden wie oben, das bedarf noch der Untersuchung.

Übrigens braucht man sich bei den ebenen Problemen durchaus nicht auf Punktprobleme zu beschränken, man darf auch Linearprobleme, z. B. das der elliptischen Koordinaten, heranziehen. Vielleicht gelingt es auf dem vorgeschlagenen Wege, auch anderen Problemen, bei denen die statischen Unbestimmtheiten noch eine grosse Rolle spielen, zur korrekten oder angenäherten Lösung zu verhelfen. Aber auch die Untersuchung der Schwingungen, die nach plötzlicher Abstellung der Spannung in dem Material eintreten, z. B. in der Masse des Ringgeschützes nach abgegebenem Schusse, dürften sich an den einfachen Beispielen, die oben angegeben sind, in Angriff nehmen lassen.

Die Variabilität der Lebewesen und das Gausssche Fehlergesetz.

Von

Prof. Dr. F. Ludwig
in Greiz.

Über Beziehungen zwischen Botanik und Mathematik habe ich seit einer Reihe von Jahren unter der Überschrift: „Wichtigere Kapitel aus der mathematischen Botanik“ in Hoffmanns Zeitschrift für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht eingehender berichtet (vergl. 22 des Litteraturverzeichnisses am Schluss dieses Aufsatzes). Daselbst finden sich auch meine ersten eigenen Untersuchungen über Variationsstatistik niedergelegt, ein Wissensgebiet, durch das rasch eine Fülle ungeahnter Gesetzmässigkeiten aufgedeckt worden ist, das aber die Mitarbeit der Mathematiker in Anspruch genommen hat und fortgesetzt in Anspruch nimmt. Der Botaniker kann heutzutage der Variationsstatistik und der Variationskurven ebenso wenig entraten, wie der Anthropologe und Zoologe, sodass auch Speziallexika und Jahresberichte (z. B. Gad, Reallexikon der medizinischen Propädeutik, Justs Botan. Jahresbericht in dem Abschnitt über Variation und Bildungsabweichungen 70 und 71 des Litteraturverzeichnisses) diesen Titel neuerdings mit aufnehmen mussten. Nur wenige Mathematiker haben aber bisher dem neuen Gebiet ihre Aufmerksamkeit zugewendet und unter diesen am wenigsten deutsche Mathematiker, obwohl die mathematische Grundlage von keinem Geringeren als Gauss herrührt (1, 2). Ich komme daher der Aufforderung des Herausgebers dieser Zeitschrift gerne nach, über dieses Grenzgebiet zwischen Mathematik und den biologischen Naturwissenschaften, in erster Linie der Botanik, kurz zu berichten.

Es sei mir dabei gestattet, die Reihenfolge, in welcher ich selbst mit den einzelnen Abschnitten dieses Wissensgebietes bekannt wurde, auch hier einzuhalten.

Die Erfahrung, dass das von J. Bernoulli aufgefundene und von Poisson (3) so genannte Gesetz der grossen Zahlen in den verschiedensten Gebieten Geltung hat, selbst da, wo scheinbar willkürliche menschliche Handlungen vorliegen (cf. Ad. Wagner, die Gesetz-

gkeit in den scheinbar willkürlichen menschlichen Handlungen Standpunkte der Statistik, Litteraturverzeichnis 8), z. B. hinsichtlich elbstmorde, Eheschliessungen, des Verhältnisses der Knaben- und hengeburten, so auch in Betreff des Verhältnisses der männlichen weiblichen Individuen bei Amphibien (nach Pflüger u. a.), bei ırialis annua, dem Hanf und anderen Pflanzen (vergl. F. Heyer, wirtschaftliche Presse 1886 Nr. 5; Fisch, Berichte der deutschen Ges. Bd. V H. 3, S. 136—146), diese Erfahrung erweckte in mir Überzeugung, dass auch die Merkmale, die in ihrer Gesamtheit Wesen der Pflanzenspecies ausmachen, innerhalb bestimmter ızen und um bestimmte Mittel variieren, die sich aus der en Zahl ermitteln lassen. Es widersprach das allerdings der An- der meisten Botaniker. Während z. B. die eine Blumenart fast r dieselbe Blütenzahl hat, sollte bei der anderen nach der chenden Meinung die Zahl ganz regellos schwanken (vergl. 63). achtungen in der grossen Zahl haben meine Überzeugung vollauf tigt, daneben aber zwei weitere mir unerwartete Gesetzmässig- ı zu Tage gefördert. Ich fing mit den Randstrahlen der Kom- en an und zwar mit Chrysanthemum Leucanthemum, der gemeinen ıerblume, und fand hier schon nach wenigen Zählungen, dass am gsten 21 Strahlen auftreten. Bei graphischer Darstellung ergaben ch schon die Variationskurven für hundert Zählungen nicht nur gleiche Gipfellage bei 21 Strahlen, sondern auch sonst ähn- en Verlauf und bei Zählungen von mehreren Tausenden zeigten urven — mochten die Zählungen vorgenommen sein wo sie en, in ganz verschiedenen Gegenden — den gleichen Verlauf: den tgipfel bei 21, sekundäre Maxima bei 8, 13, 34 und deren Duplis Triplis. Weitere Beobachtungen an anderen Kompositen ergaben ge Resultate: allenthalben waren neben dem Hauptgipfel Neben- l vorhanden, die sämtlich bei den Zahlen des Fibonacci und Doppeltem und Dreifachem lagen. Dieses Gesetz fand sich nicht bestätigt bezüglich der Randstrahlen, sondern bezüglich der nzahl des gesamten Blütenstandes der Korbblütler [Chrysanthemum, emis, Achillea, Centaurea, Aster, Senecio, Solidago, Bidens, psis etc. etc. (vergl. 21, 22, 23, 26, 40, 48, 59, 60, 61, 64)], rimnlaceen (49), Papilionaceen [Lotus, Medicago, Trifolium (vergl. 62)], Jmbelliferen (40) und anderer Pflanzenfamilien. Ja, als ich anfing, verschiedenen Bäumen die Zahl der Zweige am Ast, der ter am Jahrestrieb festzustellen (vergl. 54), wo gewiss bis niemand die Wiederkehr bestimmter Zahlen vermutete, da traf leichfalls die Variationskurven mit den Fibonaccigipfeln (Fibonacci- en) wieder. So zeigten die Kurztriebe der Wintereiche Gipfel bei 8, 10 (2 × 5), 13 etc. Diese statistischen Ergebnisse zeigten ich, dass das häufige Vorkommen der 5 Zahl im Blütenbau, das ommen der 13 Strahlen bei Senecio, der 55 bei Helianthus etc.

mit der Anordnung der betreffenden Organe nach der bekannten Braun-Schimperschen „Divergenzreihe" in Zusammenhang stehen (vergl. 64) und führten zu neuen Versuchen, das Vorkommen der Fibonaccizahlen hier, wie in den Zellreihen gewisser niederen Algen (Melosira), wo es sich um ein bestimmtes Teilungsgesetz handelt, auf allgemeine Wachstums- und Entwickelungsgesetze zurückzuführen (vergl. 59 S. 25 Anm., 22, 24, 59).

Es hatten also diese ersten pflanzenstatistischen Untersuchungen einmal in den Variationskurven ein wichtiges diagnostisches Merkmal zur Unterscheidung nahe verwandter Arten dargethan, dann ein in der Pflanzenwelt weit verbreitetes, die Zahl der Pflanzenorgane beherrschendes Gesetz aufgedeckt und zu dessen Erklärung herausgefordert.

Eine weitere Gesetzmässigkeit, die für uns von ganz besonderer Bedeutung ist, fiel mir aber noch auf: es fielen in den Tausendkurven für ein und dasselbe Merkmal nicht nur die Haupt- und Nebengipfel immer auf denselben Abscissenwert, sondern für sie, wie für die von dem Gipfel abweichenden Werte, waren **auch die Ordinaten von konstantem Wert.** Bei den Strahlen der grossen Wucherblume waren z. B. die Frequenzverhältnisse der gipfelnahen Zahlen bei verschiedenen Zählungen die folgenden:

19	20	22	23	
5,6%	9%	10%	6,7%	bei 6000 Zählungen,
5%	9,3%	11%	6,9%	„ weiteren 1000 Zählungen,
5%	9%	10%	6,8%	„ 17000 Zählungen,

während 21 bei 22% der gezählten Exemplare vorkommt. Bei der Saat-Wucherblume fanden sich schon in verschiedenen Hundertzählungen die folgenden Frequenzen nahe dem Gipfel (bei 13):

	11	12	13	14	15
I. Hundert:	6	13	53	13	5%,
II. Hundert:	3	15	51	14	6%,
Tausend:	5	14	53	13	5%.

So weit waren meine bis dahin rein empirischen variationsstatistischen Studien gediehen, als ich durch die Arbeiten von Hugo de Vries und Verschaffelt auf einfache Variationskurven (ohne sekundäre Gipfel) und auf die Arbeiten von Quételet und Galton etc. aufmerksam gemacht wurde. Ad. Quételet hatte das Gesetz der grossen Zahlen, von dem ich ausging, bezeichnender la loi des causes accidentelles benannt „parce qu'elle indique comment se distribuent, à la longue une série d'événements dominés par des causes constantes mais dont des causes accidentelles troublent les effets. Les causes accidentelles finissent par se paralyser et il ne reste en définitive que le résultat qui se serait invariablement reproduit chaque fois, si les

causes constantes seules avaient exercé leur action (cf. Quételet 7, 6, 5). Er hat dargethan, dass nicht nur das Mittel in der Variation in der grossen Zahl der Beobachtungen konstant bleibt, sondern auch die vom Mittel abweichenden Werte (die den causes accidentelles entspringen) gesetzmässig auftreten. Und zwar stimmen die eingipfeligen Variationskurven mit den binomialen Wahrscheinlichkeitskurven Newtons und Pascals überein, die man erhält, wenn man in gleichen Abständen auf der Abscissenaxe Strecken als Ordinaten errichtet, die sich wie die aufeinanderfolgenden Koeffizienten höherer Binome [Quételet benutzt vielfach $(a+b)^{18}$ oder $(a+b)^{20}$] zu einander verhalten. Bekanntlich haben diese Kurven des wahrscheinlichen Fehlers eine analytische Darstellung durch Gauss erhalten. Während Quételet, de Vries u. a. die binomiale Darstellung der theoretischen Kurven behufs ihrer Vergleichung mit den empirischen Variationskurven gewählt haben, wendet man neuerdings mit Erfolg zur Ermittelung der Variationsverhältnisse die Gaussschen Formeln an, wie es die Zoologen und Anthropologen schon seit einiger Zeit thun, botanischerseits ich selbst es kürzlich versucht habe (69).

Quételet hat bereits die Giltigkeit des binomialen Gesetzes auch für die Variabilität der Tiere und Pflanzen behauptet und hat gezeigt, wie selbst unorganische Naturerscheinungen (die Abweichungen der Temperaturen vom Mittel) sich nach dem gleichen Gesetz zahlenmässig ordnen.* In glänzender Weise fand er die Giltigkeit des Binomialgesetzes bestätigt bei der Variabilität des Menschen. Nicht nur die Gesamtgrösse des menschlichen Körpers, sondern auch die Grössenverhältnisse der einzelnen Körperteile etc. variieren innerhalb der gleichen Altersklasse eines Landes (mit Bevölkerung der gleichen Abstammung) um einen mittleren Wert so, dass die graphische Darstellung eine binomiale eingipfelige Kurve ergiebt. So zeigten die Messungen des Brustumfanges von 1516 Soldaten die folgenden Frequenzen für die in der oberen Reihe angegebenen Maße in englischen Zollen auf 1000 Zählungen reduziert:

28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
1	3	11	36	67	119	160	204	166	119	68	28	13	4	1

* Dass auch die Verteilung der menschlichen Begabungen dem Gaussschen Gesetze folgt, hat Galton mehrfach nachgewiesen. So hat er z. B. die Abstufung der Prüfungsnoten bei den berühmten Mathematikprüfungen der Universität Cambridge danach verteilt gefunden. — Gauss hat beim Whistspiel gezeigt, dass die Zahl der Asse in der grossen Zahl bei allen Spielern, Hagen, dass die einzelnen Buchstaben des Alphabets in den einzelnen Zeilen eines Buches danach verteilt sind. Zahlreich sind die Bestätigungen des Gesetzes auf dem Gebiet astronomischer und physikalischer Erscheinungen durch Gauss, Bessel u. A.

die entsprechenden Ordinaten der Binomialkurve sind für $(p+q)^{18}$, wo $p=q$:

1 3 11 32 69 121 170 190 169 120 68 31 11 3 1

Quételet hat in der Anthropometrie bis in alle Einzelheiten Maße, Gewichte etc. des „mittleren Menschen“ bestimmt. Francis Galton hat dann hauptsächlich auf anthropometrischem Gebiet die Giltigkeit des Quételetschen Gesetzes mannigfach bestätigt und die Kurvenlehre und ihre praktische Verwendung weiter ausgebaut. Seine Werke (10, 12, 19, 20), besonders die „Natural Inheritance“ (25) bilden die wichtigste Grundlage der folgenden Untersuchungen auf anthropologischem und zoologischem Gebiet, wie der von Bateson, Weldon, Stieda, Ammon (27—34 etc.). Auch die botanischen Arbeiten über Variabilität von Hugo de Vries, Verschaffelt etc. beruhen zunächst darauf. Durch sie ist das Binomialgesetz für die Variabilität der verschiedensten pflanzlichen Eigenschaften, wie Fruchtlänge, Breite und Länge der Blätter, Zahl der Blütenteile, der Samen (bei Oenothera, Coreopsis, Anethum, Zea, Gingko, Hedera, Papaver, Phaseolus etc.), Gewicht der Knollen (der Kartoffel) bestätigt worden und wurde zugleich meine Voraussetzung bestätigt, dass all diese Merkmale für jede Species konstante Mittelwerte besitzen. Nach F. Galton werden die mit den Wahrscheinlichkeits- oder Binomialkurven übereinstimmenden Variationskurven vielfach als „Galtonkurven“ (nach dem Vorgang von de Vries) bezeichnet.

Umfangreiche nun folgende Untersuchungen ergaben, dass ausser den einfachen Variationskurven noch eine Reihe anderer Kurvenformen vorkommen, die dem Forscher über die Variabilität überhaupt, wie über die Grenzen der Species und Rasse Aufschluss geben. In erster Linie sind hier die Kombinations- oder Summationskurven zu nennen. Erstrecken sich die statistischen Erhebungen auf dasselbe Merkmal bei zwei oder mehreren Species zugleich, deren jede für sich eine einfache Binomialkurve ergeben hätte, so kommen zwei- oder mehrgipfelige Kurven zu stande, deren Hauptgipfel die der Einzelspecies sind; vielfach werden dabei noch Scheingipfel (vergl. 40 S. 16 flg.) durch Häufung der gipfelnahen Werte gebildet. Schliesslich können die zwischen den Hauptgipfeln gelegenen Werte derart das Übergewicht gewinnen, dass wieder eine einfache Kurve mit sehr verbreitertem Gipfel (bei einer der Mittelzahlen) zu stande kommt — die sogenannte Livische Kurve. Zweigipfelige Variationskurven haben z. B. Bateson und Brindley (30) zur Entdeckung einer lang- und einer kurzzangigen Rasse des gemeinen Ohrwurmes in England, einer lang- und kurzhörnigen Rasse bei dem javanischen Käfer Xylotrupes Gideon, Giard bei Carcinus moenas zur Entdeckung einer besonderen Rasse geführt, die ihre Existenz einem Parasiten Portunion moenadis verdankt (31, 32). Ammon führten sie zu dem Schluss, dass die

heutige Bevölkerung Badens, und A. Bertillon, dass die im Departement Doubs aus einem Gemisch zweier Völkertypen bestehe (dort einem dolichocephalen germanischen und einem brachycephalen vorgermanischen Typus; hier aus Sequanern und später eingewanderten Burgundern). Zu ähnlichem Schluss führten Zograf Kurven mit zwei Hauptgipfeln und einem Scheingipfel.

Im Pflanzenreich hat de Vries aus zweigipfeligen Kurven bei Chrysanthenum segetum gleichfalls auf zwei Rassen geschlossen, die er dann in der Kultur isolierte [(43) und nach brieflichen Mitteilungen an mich]. Ich habe bei einer ganzen Anzahl von Doldenpflanzen mehrgipfelige Kurven erhalten und dann an verschiedenen Standorten auch die ihren Gipfeln entsprechenden Einzelrassen aufgefunden (40). Die Statistik ist hier berufen, die weitere Verbreitung von polytypischen Arten aufzudecken, wie sie de Bary und Rosen auf anderem Wege bei dem Hungerblümchen (Erophila verna) fanden (vergl. Botanische Zeitung 1889). Wie eine zweigipfelige Kurve zur Auffindung und Unterscheidung leicht zu verwechselnder Spezies führen kann, habe ich für unsere einheimischen Wicken (59 S. 3) und für Senecio nemorensis und S. Fuchsii (48) des Näheren gezeigt.

Diese Kombinationskurven sind daran leicht zu erkennen, dass, während die Abscissen der Gipfel immer die gleichen bleiben, die Ordinaten von Beobachtungsort zu Beobachtungsort sich ändern (je nach dem Vorherrschen der einen oder anderen Species). Dies gilt auch von den nach de Vries für monströse Rassen, z. B. Rassen mit Verbänderung etc. (54, ferner de Vries Erfelijke monstrositeiten in den zuilhandel der botanische tuinen Jaarboek d. Dodonaea, Gent 1897, S. 62—93) charakteristischen dimorphen Kurven, welche aus einer „halben Galtonkurve“ (einem Ast einer Binomialkurve der Atavisten) und einer zweiästigen Kurve der Monströsen besteht. Durch bessere Ernährung wird hier der Gipfel der Atavisten erniedrigt, der der Monströsen erhöht. Gipfellage und Gesamtform bleiben im übrigen dieselben.

Mehrgipfelige („pleomorphe“) Kurven kommen aber, wie wir anfangs sahen, auch bei einheitlichen Arten (wie Chrysanthemum Leucanthemum) vor und sie unterscheiden sich von den Kombinationskurven dadurch, dass Abscissen und Ordinaten der Gipfel immer dieselben bleiben. Sie können sogar bei statistischen Untersuchungen an ein und demselben Individuum (Baum etc.) zu stande kommen, sodass sich uns die Vorstellung aufdrängt, dass hier in ein und demselben Individuum oder einer Art, den verschiedenen Gipfeln entsprechend, verschiedene Arten von Keimplasmen in konstantem Verhältnis vereinigt sind, wie in dem früheren Fall Individuen verschiedener Pflanzenspecies.

Weiter seien hier hervorgehoben Variationskurven, die von den gewöhnlichen Binomialkurven dadurch abweichen, dass sie nahe dem Gipfel einen unverhältnismässig steilen Verlauf haben, die „Hyper-

binomialkurven" (wie umgekehrt die Livikurven einen zu flachen Gipfel haben). Sie sind im Pflanzenreich sehr häufig und wären nach Verschaffelt (39, 44) darauf zurückzuführen, dass ein ziemlich ansehnlicher Prozentsatz der Individuen an der fluktuierenden Einzelvariation nicht teil nimmt. Sie lassen sich auch als Kombinationskurven zweier Rassen von gleicher Lage des Hauptgipfels aber ungleicher Variabilität auffassen.

Schliesslich mögen hier noch die „Parabinomialkurven" Erwähnung finden, unsymmetrische Binomialkurven, wo im Binom $(p+q)^n$,

$$p \gtrless q$$

ist, die besonders bei sexuellen Merkmalen oder durch die Sexualität beeinflussten Organen (vergl. z. B. Ammon 57) zum Vorschein kommen (Zahl der Samen in der Hülse bei Indigofera australis etc.) und gleichfalls wichtige Aufschlüsse geben.

Zur genaueren Bestimmung der Variationskurven, bezüglich Variationspolygone, wie überhaupt zur präzisen Feststellung der Variationsverhältnisse ermittelt man am praktischsten die Gausssche Kurve der wahrscheinlichen Abweichungen (Fehlerverteilung) mittelst des Integrals

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\int e^{-\frac{xx}{n}}\,dx$$

und der übrigen Gaussschen Formeln z. B. nach der von Hagen (9) angegebenen Methode (69; vergl. auch Stieda 28, ferner 35). Eine andere Methode zur Bestimmung der Variationspolygone hat Pearson (47 Vol. 186 A etc.) angegeben, über die demnächst Dr. G. Dunker in einer besonderen Arbeit berichten wird.

Die theoretische Variationskurve lässt sich nach den ersten Methoden berechnen und darstellen aus zwei Grössen w und M, wo M das arithmetische Mittel aus den Einzelbeobachtungen, w die wahrscheinliche Abweichung darstellt.

Es ist $w = 0{,}845332\, m$ oder $= 0{,}674486\, q$,

wo m die mittlere Abweichung und q die Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat bezeichnet. Letztere, die zur Berechnung von w den genauesten Wert liefert, ist gleich der Quadratwurzel aus der durch die Zahl der Beobachtungen geteilten Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelbeobachtungen vom Mittel M,

$$q = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}.$$

Die Grössen w und M geben daher über den ganzen Verlauf der Variation Auskunft, wenn es sich um eine normale eingipfelige Variationskurve handelt, und zwar genügt dann schon eine verhältnismässig geringe Zahl von Beobachtungen. Aus einer solchen lässt sich auch schon ermitteln, ob die Variation die Gausssche Kurve liefert und lässt sich, wenn dies der Fall, der ganze Verlauf

Variation darstellen, während zur **Bestimmung** desselben auf em-chem Weg eine grosse Zahl von Beobachtungen nötig wäre. Weiter, wenn die Variationskurve keine normale monomorphe Binomiale darstellt, die aus w und M abgeleitete Wahrscheinlichkeitskurve Kriterium, ob die untersuchte Variation eine Hyperbinomialkurve, Livische Kurve, Parabinomialkurve, oder eine polymorphe Kurve bt. Alle diese Kurven lassen sich aus den normalen rscheinlichkeitskurven ableiten oder darauf zurückführen. inzelnen Fällen ist auch eine analytische Reduktion auf die monohen Kurven gelungen, so bei den Hyper- und Parabinomialkurven, nderen Fällen fehlt es aber noch an einer handlichen ytischen Reduktion und hier ist es, wo die Fachmathe-iker der Variationsstatistik hilfreiche Hand reichen sen, so bei den gerade bei pflanzlicher Variation so häufigen poly-hen Kurven, von denen wir ausgingen. Pearson beschäftigte bisher nur mit einem kleinen Bruchteil dieses Problems.

Bei den hyperbinomialen Kurven habe ich gezeigt (69, S. 14 flg.), sie sich auf die normalen Kurven zurückführen lassen. Werden bestimmter Weise variierende Individuen mit n_2 in einem anderen e aber um dasselbe Mittel variierenden zusammengezählt, so ist lie erstren

$$q_1^2 = \frac{\Sigma d_1^2}{n_1},$$

lie zweiten

$$q_2^2 = \frac{\Sigma d_2^2}{n_2},$$

da $\Sigma d_1^2 + \Sigma d_2^2 = \Sigma d^2$, für die Gesamtkurve

$$q^2 = \frac{\Sigma d^2}{n_1 + n_2} = \frac{q_1^2 n_1 + q_2^2 n_2}{n_1 + n_2},$$

in

$$w = \sqrt{\frac{w_1^2 n_1 + w_2^2 n_2}{n_1 + n_2}}.$$

Nehmen, wie dies Verschaffelt voraussetzt, $n_2 = k$ Individuen er fluktuierenden Einzelvariation **nicht** teil, so wird

$$\Sigma d_2^2 = 0, \quad w_2 = 0$$

$$w_1 = w\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1}},$$

es lässt sich n_1 und n_2 ermitteln. So ergab die Hyperbinomiale von Chrysanthemum segetum (Zahl der Randstrahlen) um Brote- in Thüringen, dass daselbst 58% der Individuen variieren, an der Variation nicht teilnehmen; die theoretische Kurve stimmt dieser Voraussetzung mit der Beobachtungskurve überein. Ähn- Übereinstimmung habe ich bezüglich der theoretischen und em-chen Kurve für Bellis perennis (Variation der Hüllblätter) gefunden. glich der analytischen Darstellung der unsymmetrischen Para-nialkurven (44, 57, 59), bei denen die Entfernungen je zweier

beliebigen gleichen Ordinaten von der grössten Ordinate in dem konstanten Verhältnis $p:q$ stehen, vergl. Pearson (47), ferner A. Cournot (4).

Vielfach begnügt man sich bei statistischen Untersuchungen über Variabilität der Lebewesen mit der blossen Ermittelung von M und w (oder q). (14—17 etc.) Die Grösse w (wahrscheinliche Abweichung) heisst auch der Oscillationsindex (Stieda) der Beobachtungsreihe, $\frac{w}{M}$ der Variabilitätskoeffizient (Davenport, Brewster), w stimmt mit dem Galtonschen Quartilwert Q, mithin $\frac{w}{M}$ auch mit Verschaffelts Variationskoeffizienten $\frac{Q}{M}$ überein.

Auch der Ausdruck $\frac{w}{\sqrt{n}}$ (n Zahl der Beobachtungen hat noch eine besondere Bedeutung bei Beurteilung der Sicherheit für die Bestimmung des Mittelwertes. Es giebt nämlich $R = \frac{w}{\sqrt{n}}$ die Schwankung des Medianwertes M d. h. die Grenzen an, zwischen denen sich das Mittel bewegt ($M \pm R$).

Ausser zur Messung der Variabilität selbst und zur Ermittelung der Beziehungen zwischen individueller Variation und spezifischen Unterschieden (vergl. 67), liefern die aus der Wahrscheinlichkeitslehre abgeleiteten Formeln ein wichtiges Mittel zum Nachweis von Korrelationsbeziehungen zwischen verschiedenen Merkmalen. Man findet die Theorie für die Studien dieser korrelativen Variation bei Galton (23). Er hat daselbst einen gemeinschaftlichen arithmetischen Ausdruck für Wirkungsform und -Intensität der zwischen zwei Merkmalen bestehenden Korrelation nachgewiesen. Anwendungen dieser Formeln finden sich z. B. in den Arbeiten von Georg Duncker (68), wo Korrelationserscheinungen bei Fischen und von Davenport und Bullard (56), wo solche beim Schwein nachgewiesen worden sind.

Zum Schluss machen wir nur noch auf eine Reihe anderer mathematischer Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufmerksam, welche von J. D. H. Dickson bearbeitet worden sind (Proc. Roy. Soc. London Nr. 242, 1886, S. 63 flg.) und bei der Behandlung der Erblichkeitsstatistik vorzügliche Dienste geleistet haben. Man sehe ihre Verwendung in dem vorzüglichen Werk von Galton (25), das überhaupt eine wahre Fundgrube interessanter und wichtiger Anwendungen der Mathematik in der Variationsstatistik ist (z. B. S. 69 flg., 83—138, 221—224).

Das folgende Litteraturverzeichnis soll uns mit den wichtigsten bisherigen Abhandlungen über Variationsstatistik bekannt machen (die für den Mathematiker unentbehrlichsten sind gesperrt gedruckt).

Litteraturverzeichnis.

1. Gauss, Karl Friedr., Theoria motus corporum coelestium, Hamburg 1809.
2. Gauss, K. F., Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Göttingen 1823.
3. Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Paris 1837 chap. 3 et 4 (lois des grands nombres).
4. Cournot, A., Exposition de la théorie des chances et des probabilités. Paris, Hachette 1843.
5. Quételet, Ad., Sur l'appréciation des moyennes, Bull. de la commission centr. statist. t. II, p. 205—273, 1845.
6. Quételet, Ad., Lettres sur la théorie des probabilitéts appliquée aux sciences morales et politiques, Brüxelles 1846.
7. Quételet, Ad., Du système social et des lois qui les régissent. Paris 1848.
8. Wagner, Adolph, Die Gesetzmässigkeiten in den scheinbar willkürlichen menschlichen Handlungen vom Standpunkte der Statistik. Hamburg 1864.
9. Hagen, G., Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1867.
10. Galton, F., Hereditary Genius, London 1869.
11. Quételet, Ad., Anthropométrie ou mesure des différentes facultés de l'homme, Brüssel, Gent und Leipzig 1871.
12. Galton, F., English Men of Science their nature and nurture, London 1874.
13. Mayr, G., Die Gesetzmässigkeit im Gesellschaftsleben, München 1877, S. 56.
14. Lewis, W., Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen. Hildebrandts Jahrbücher für Nationalökonomie, Bd 32 S. 60—97, Jena 1879;
   Witt, Hugo, Die Schädelform der Esten. Dorpat 1879. 54 S.
15. von Schrenck, A., Studien über Schwangerschaft, Geburt und Wochenbett bei der Estin nebst Untersuchungen über das Becken derselben, Dorpat 1880, 375 S.
16. Strauch, Max, Anatomische Untersuchungen über das Brustbein, Dorpat 1881, 50 S.
7. Henicke, Fr., Die Varietäten des Herings. Mitt. d. Komm. z. wiss. Unters. der deutschen Meere. I. Jahrg.: IV—VI, 1878, S. 37—132; II. Jahrg.: VII—XI, 1882, S. 1—86.
18. Livi, Th., Sulla statura degli Italiani, Firenze 1883.
19. Galton, F., Inquiries into Human Faculty and its Development 1883.
20. Galton, F., Record of Family Faculties, 1884.
21. Ludwig, F., Die Anzahl der Strahlenblüten bei Chrysanthemum Leucanthemum. D. Bot. Monatsschr. 1887, Nr. 3.
22. Ludwig, F., Einige wichtige Abschnitte der mathematischen Botanik. Hoffmanns Zeitschr. f. math. naturw. Unterr. 1883, XIV S. 161 flg., 241 flg., 321 flg.; 1887 XIX S. 321 flg.; 1890 S. 243 flg.
23. Galton, F., Correlations and their measurement. Proceedings Roy. Soc. Lond. Vol. 45 1888, p. 135—145.
24. Ludwig, F., Über Zahlen und Maße im Pflanzenreiche. Wiss. Rundschau der Münchener Neuesten Nachrichten 1889 Nr. 84.

25. Galton, F., Natural Inheritance, London 1889.

26. Ludwig, F., Die konstanten Strahlenkurven der Kompositen und ihre Maxima. Verh. d. Naturf. Ges. zu Danzig 1890, S. 177 flg., Taf. VI.

27. Weldon, W. F. R., The Variation occurring in certain Decapod Crustacea I Crangon vulgaris. Proceed Roy. Soc. Lond. Vol. 47 1890, p. 445—453.

28. Stieda, Ludw., Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik. Braunschweig, 1. Auflage 1882, 2. Auflage 1892, 25 S. u. 4 Fig.

29. Bateson, W., On numerical Variation in Teeth with a discussion of the Conception of Homology. Proceed. of the Zool. Soc. Lond. 1892, p. 102 bis 115.

30. Bateson, W., and H. H. Brindley, On some cases of Variation in Secondary Sexual Characters statistically examined. Proceed. of the Zool. Soc. of Lond. 1892, p. 585—594.

31. Weldon, W. F. R., Certain correlated Variations in Crangon vulgaris. Proceed. Roy. Soc. Vol. 51 1892, p. 2—21.

32. Weldon, W. F. R., On Certain correlated Variations in Carcinus maenas. Proceed. Roy. Soc. Vol. 54 1893, p. 318—329.

33. Ammon, O., Die natürliche Auslese beim Menschen. Jena 1893.

34. Petersen, G. C. J., On some Zoological Characters applicable by the Determination of young (post larval) Flat fishes Rep. of the Danish Biol. Station IV 1893.

35. A Meeriman, M., Textbook on the method of least Squares. New-York 1894.

36. Thompson, H., On Correlation of certain external Parts of Palaemon serratus. Proc. Roy. Soc. Lond. Vol. 55, 1894, p. 221—243.

37. Bateson, W., Materials for the Study of Variation treated with especial Regard to Discontinuity in the Origin of Species London 1894, 598 S., 209 Fig. (Das reichhaltigste Material über Variation bei den Tieren aus allen Tierkreisen.)

38. de Vries, Hugo, Über halbe Galtonkurven als Zeichen diskontinuierlicher Variation. Ber. d. D. Bot. Gesellsch. Bd. XII 1894, S. 197—207 mit 1 Taf. Archiv Néerl. T. 28 livr. 5; Kruidk. Jaarboek Dodonaea Bd. VII, S. 74.

39. Verschaffelt, Ed., Über graduelle Variabilität von pflanzlichen Eigenschaften. Ber. D. B. Ges. XII 1894, S. 350—355.

40. Ludwig, F., Über Variationskurven und Variationsflächen der Pflanzen. 31 S. und 2 Tafeln. Bot. Centralbl. LXIV 1895, Nr. 1—7: 1. Variationskurven der Kompositen; 2. Über das Quételetsche Gesetz der einfachen Variationskurven; 3 Summationskurven der Umbelliferen; 4. Zur Geschichte der polymorphen Kurven; 5. Darstellung des gesamten Variationskomplexes; 6. Gesetz der Entwickelung nach den Zahlen des Fibonacci. Variationskurve des Crataegus-androeceum.

41. Eigenmann, C., Leuciscus balteatus Rich. A. Study in Variation. American Naturalist 1895 Jan., p. 10—25.

42. Duncker, Georg, Variation und Verwandtschaft von Pleuronectes flesus L. und Pl. plattessa. Wissenschaftl. Meeresuntersuchungen, herausgegeben von der Kommission zur wiss. Unters. d. dtsch. Meere zu Kiel und der Biol. Anstalt auf Helgoland, N. F. 1. Bd. 2. H., S. 47—103. 1895.

43. de Vries, Hugo, Eine zweigipflige Variationskurve. Archiv für Entwickelungsmechanik der Organismen 1898, Bd. 2, H. 1, S. 55.

44. Verschaffelt, Ed., Über asymmetrische Variationskurven. Ber. d. D.B. Ges. XIII 1895, H. 8, S. 348—356 mit 1 Taf.

ırkill, J. H., One some Variations in the Number of Stamens and Carpels. Journ. Linn. Soc. Botany Vol. XXXI 1895, S. 216—245.

ıteson, W., On the Colour-Variations of a Beele of the Family Chrysomelidae statisticaly examined Proceed. of the Zool. Soc. of London 1895, p. 850—861, 1 kol. Taf.

ıarson, K., Proceed. Roy. Soc. Lond. Vol. 57, 1895, p. 257, Math. Contributions to the Theory of Evolution etc. Philosophical Transact. Roy. Soc. London 1895 Vol. 185 A, 1896 Vol. 186 A, 1896 V. 187 A.

ıdwig, F., Weiteres über Fibonaccikurven. 1. Die numerische Variation der gesamten Blüten der Kompositenköpfe. 2. Joh. Kepler über das Vorkommen der Fibonaccireihe im Pflanzenreich. B. C. Bd. LXVIII, 1896, Nr. 1 mit einer Tafel.

ıdwig, F., Eine fünfgipfelige Variationskurve. Ber. d. D. Bot. Ges. XIV, 1896, S. 208 flg. mit einer Figur.

nann, J., Application du Calcul des Probabilités à l'étude de la Variation d'un type végétal. Bull. herb. Boissier T. IV Genève et Bâle, 1896, S. 577—590.

ent, F. H. F. C. en Prinsen Geerligs, H. C., Zaaiproeven. Archief voor de Java-Suikerindustrie in West-Java. Te Kagok-Tegal. 1896. 4. Aufl.

arren, E., Variation in Portunas depurator. Proceed. London, Vol. 60, 1896, S. 221—243.

ead, J. B., Variation and Relationship of the Flounder an the Plaice Journ. Marin. Biol. Assoc. Vol. 3, 1896, p. 293—299.

Vries, Hugo, Sur les courbes galtoniennes des monstruosités. Bull. Scientif. de la France et de la Belgique publié par Alfred Giard, T. XXVII, 1896, p. 396—418 mit fünf Figuren.

ırkill, J. H., Teratological Observations on Parnassia palustris, Journ. of Bot. January 1896, 4 S.

ıvenport, C. B. and Bullard, C. A., Contribution to the quantitative Study of Correlated Variation and the Comparative, Variability of the sexes. Proceed. of the American Academy of Arts and Sciences Vol. XXXII, Nr. 4, Dec. 1896, S 87—97.

nmon, Otto, Der Abänderungsspielraum, Ein Beitrag zur Theorie der natürlichen Auslese. Berlin, F. Dümmler, 1896, 55 S.

ıacke, Wilh., Über numerische Variation typischer Organe und korrelative Mosaikarbeit. Biol. Centralbl., Bd. XVI, 1896, S. 482—547.

ıdwig, F., Beiträge zur Phytarithmetik, 8 S. und 5 Fig., Bot. Centralbl., Bd. LXXI, 1897: 1. Einige weitere Untersuchungen zur Ermittelung der Zahlenverhältnisse der Pflanzen und ihrer Variationsweite; 2. Variationskurve und Species; 3. Die Multipla der Fibonaccizahlen in den Kurven der numerischen Variation der Blütenstände etc.; 4. Eine neue Darstellung der Näherungswerte der Kettenbrüche und die Verwandtschaften der phyllotaktischen Hauptreihe.

ıdwig, F., Das Gesetz der Variabilität der Zahl der Zungenblüten von Chrysanthemum Leucanthemum. Mitt. d. Thür. Bot. Ver. Neue Folge, H. X, 1897, S. 20—23.

dwig, F., Nachträgliche Bemerkungen über die Multipla der Fibonaccizahlen und die Koexistenz kleiner Bewegungen bei der Variation der Pflanzen. Bot. Centralbl. LXXI 1897, Nr. 35.

dwig, F., Variationskurven von Lotus, Trifolium Medicago. D. Bot. Monatsschr., H. 11, 1897, S. 294—296, mit 4 Fig.

63. Ludwig, F., Die Statistik, eine notwendige Hilfswissenschaft der Systematik. D. B. Monatsschr., H. 9, 1897, S. 241 flg.

64. Weisse, Arthur, Die Zahl der Randblüten an Kompositenköpfchen in ihrer Beziehung zur Blattstellung und Ernährung. Jahrb. f. wiss. Bot., Bd. XXX, H. 4, mit 1 Taf. Berlin 1897, S. 453 bis 483.

65. Saunders, E. R., On a Discontinous Variation occurring in Biscutella laevigata. Proceed. Roy. Soc. Lond. Vol. 62, 1897, S. 11—26.

66. Bateson, W., On Progress in the Study of Variation. Science Progress, Vol. VII (Vol. II of new Ser.) No. 6, I, 1897; II, 1898, 16 S.

67. Brewster, Edw. Tenny, A measure of Variability and the Relation of individual Variations to specific Differences. Proceed. of the Americ. Acad. of Arts and Sciences, Vol. XXXII, Nr. 15, 1897, p. 269—280.

68. Duncker, Georg, Korrelationsstudien an den Strahlenzahlen einiger Flossen von Acerina cernua L. Biol. Centralbl. XVII Nr. 21 u. 22. Nov. 1897.

69. Ludwig, F., Die pflanzlichen Variationskurven und die Gausssche Wahrscheinlichkeitskurve, Bot. Centralbl. LXXIII, 1898, 27 S. und zwei Tafeln: 1. Normale Binomialkurven; 2. Hyperbinomalkurven; 3. Parabinomialkurven; 4. Pleomorphe Kurven.

70. Ludwig, F., „Variationskurven" in Gad, Reallexikon der med. Propädentik Bd. 3, 1898.

71. Matzdorf, C., „Variationskurven" in Justs Bot. Jahresber. XXIII (1895) 2. Abt. S. 257—258 flg.; XXIV (1896) 2. Abt. (1898 erschienen) S. 2—3.

Greiz, am 16. April 1898.

Die Bewegung eines starren Körpers.

(Eine Übung in der Ausdehnungslehre.)

Von

J. Lüroth

in Freiburg i. Br.

§ 1.

Ich benutze in der folgenden Arbeit die Punktrechnung, wie sie von Grassmann besonders in der Ausdehnungslehre von 1862 (Grassmanns Werke ersten Bandes zweiter Teil) gelehrt worden ist.* Von der regressiven Multiplikation mache ich jedoch keinen Gebrauch, weil ich vom pädagogischen Standpunkt aus ihre Einführung für nicht vorteilhaft halte. Ob man ohne diese Produktbildung auskommt, muss die Erfahrung lehren. In der Mechanik ist dies bekanntlich der Fall; bei kinematischen Betrachtungen, wie in der vorliegenden Abhandlung, empfiehlt sich die Benutzung eines speziellen regressiven Produkts, das man aber auch ganz unabhängig einführen kann, wie es Peano in in der unten zuletzt genannten Arbeit gethan hat.

Die Ergänzung eines Vektors oder des Produkts von zwei Vektoren, eines Bivektors, die durch einen Strich | bezeichnet wird, kann man so wenig entbehren, wie die Senkrechte in der Geometrie. (Dagegen braucht man die Ergänzung eines Produkts von Punkten nicht.) Ich verstehe dabei unter der Ergänzung des Vektors a, bezeichnet mit $|a$, den Bivektor bc, dessen Faktoren auf a senkrecht, und so beschaffen sind, dass die Maßzahl der Fläche des aus b und c gebildeten Parallelogrammes gleich der Maßzahl der Länge von a ist. Dabei soll der Sinn so sein, dass von a aus gesehen, eine Drehung rechts herum durch einen Winkel $< 180^0$ den Vektor b in die Richtung von c bringt.

* Kurze Darstellungen nach origineller Methode finden sich in Peano: Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Torino 1888. Deutsch unter dem Titel: Die Grundzüge des geometrischen Kalküls. Deutsche Ausgabe von Schepp. Leipzig 1891. Carvallo: La méthode de Grassmann. Nouv. Annales 3me Série, Bd. 11 (1892) Seite 8. Peano: Saggio di calcolo geometrico. Accad. d. Scienze di Torino 1895/96.

Unter der Ergänzung des Bivektors de, bezeichnet durch $|de$, sei der Vektor f verstanden, für den $|f = de$ ist. Dann gilt für die Ergänzungen das Distributionsgesetz, es ist $a|b = b|a$, $(|ab)|c = abc$ also gleich einer Zahl, nämlich dem Inhalt des von den drei Vektoren abc gebildeten Parallelepipeds, und

$$|(c|ab) = (c|b)a - (a|c)b,$$
$$(ab)|cd = (a|c)(b|d) - (a|d)(b|c) = cd|ab,$$

welche beiden Formeln mit den Nrn. 180 und 176 der zweiten Ausdehnungslehre im Wesen übereinstimmen (Grassmanns Werke 1. Bd. 2. Teil Seite 136).

Die von Peano eingeführte Operation ω bezieht sich auf Formen zweiten und dritten Grades. Eine Form F zweiten Grades kann man stets schreiben

$$F = Pa + bc,$$

wo P ein beliebiger Punkt, a, b, c Vektoren sind. Dabei ist der Vektor a von der Wahl von P nicht abhängig (Grassmann, a. a. O. Nr. 347 Seite 222). Dieser Vektor sei mit ωF bezeichnet. Ist $a = 0$, also F einem Bivektor gleich, so ist $\omega F = 0$ zu setzen.

Eine Form F dritten Grades lässt sich entweder als ein Produkt von drei Vektoren $F = abc$, oder als das Produkt eines Punktes in einen Bivektor $F = Pab$ darstellen (Carvallo Seite 26 Nr. 21). Im ersten Fall werde unter ωF Null, im zweiten Falle, wo der Bivektor ab von der Wahl des Punktes P nicht abhängt, unter ωF eben dieser Bivektor verstanden.

Die Operation ω ist in beiden Fällen distributiv.

Um Klammern zu sparen, habe ich mit Carvallo und Peano die Klammern um ein Produkt von Punkten weggelassen, die Grassmann angewendet hatte, um dieses Produkt von anderen zu unterscheiden. Die Wirkung von $|$ und ω soll sich stets bis zum nächsten Operationszeichen erstrecken, sodass also z. B. $\omega(ab)$ kurz ωab, $\omega\mathfrak{A}(b-c)$ für $\omega[\mathfrak{A}(b-c)]$, $|(a-b)(c-d)$ für $|[(a-b)(c-d)]$ geschrieben ist, wenn kein Missverständnis eintreten kann.

§ 2.

Seien AB, A_1B_1 zwei Paare von Punkten von solcher Lage, dass die Entfernung $\overline{AB}$ der $\overline{A_1B_1}$ gleich ist. Dies drückt sich durch die Gleichung

$$(A_1 - B_1)^2 = (A - B)^2$$

aus, oder durch die

$$(B_1 - A_1 - B + A)|(B_1 - A_1 + B - A) = 0.$$

Bezeichnet man die Mitten der Linien AA_1 und BB_1, also die Punkte $\frac{A+A_1}{2}$, $\frac{B+B_1}{2}$ mit $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$, so schreibt sich diese Gleichung:

$$1) \qquad [B_1 - B - (A_1 - A)]|(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = 0.$$

[W]ir nehmen zuerst an, es sei $\mathfrak{B}-\mathfrak{A}$ nicht $=0$. Dann kann [d]iese Gleichung ersetzen durch:

$$B_1-B-(A_1-A)=|(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})a,$$

[d]ein Vektor ist, der nicht vollständig bestimmt ist. Es wäre an[genehm], wenn man in dieser Gleichung die Buchstaben A und B so[...]n trennen könnte. Dies geht aber nicht unmittelbar, weil man $|(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})a$ nicht in $|\mathfrak{B}a-|\mathfrak{A}a$ zerlegen darf, da — wenigstens [bi]s hier — eine Form wie $|\mathfrak{A}a$ keinen Sinn hat. Mit Benutzung [eines w]illkürlichen Punktes P aber kann man

$$(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})a=\omega P(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})a=\omega(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})Pa$$

$$=\omega\mathfrak{B}Pa-\omega\mathfrak{A}Pa$$

[setz]en und die vorletzte Gleichung dann in

$$B_1-B-|\omega\mathfrak{B}Pa=A_1-A-|\omega\mathfrak{A}Pa$$

[umforme]n, in der die Buchstaben getrennt sind. Setzt man den Vektor, [der be]iden Seiten gleich ist, $=b$, so hat man also:

$$A_1-A=|\omega\mathfrak{A}Pa+b=|(\omega\mathfrak{A}Pa+|b),$$

$$B_1-B=|\omega\mathfrak{B}Pa+b=|(\omega\mathfrak{B}Pa+|b),$$

[d]a $\omega(\mathfrak{A}|b)=\omega(\mathfrak{B}|b)=|b$, wenn man

$$Pa+|b=\Gamma$$

$$\begin{cases} A_1-A=|\omega\mathfrak{A}\Gamma, \\ B_1-B=|\omega\mathfrak{B}\Gamma. \end{cases}$$

[D]iese Formeln gelten auch dann noch, wenn $A_1-A=B_1-B$ [D]ann wird nämlich:

$$a=0,\quad \Gamma=|b,\quad |\omega\mathfrak{A}\Gamma=|\omega\mathfrak{B}\Gamma=b,$$

[A]$_1-A=B_1-B=b$, wie es sein muss.

§ 3.

[U]m die geometrische Bedeutung dieser Formeln zu erkennen, [wollen] wir zuerst annehmen, ein Punkt P stehe mit einem andern P_1 [in der] Beziehung:

$$P_1-P=\frac{1}{2}|\omega PQR,$$

[wo Q,] R gegebene Punkte sind. Schreibt man

$$PQR=P(Q-P)(R-P),$$

[so sieh]t man, dass $\omega PQR=(Q-P)(R-P)$ ist, also gleich einem [Bivekt]or, dessen Faktoren in der Ebene PQR liegen, und dass dem[nach] $|\omega PQR$ ein Vektor ist, der auf der Ebene PQR senkrecht steht. [Die Lä]nge dieses Vektors ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelo[gramm]es, dessen Seiten PQ und PR sind oder gleich dem doppelten [Inhalt] des Dreiecks PQR. Was seine Richtung angeht, so ist von

ihm aus gesehen $R - P$ rechts von $Q - P$ gelegen, d. h. wenn man sich in P auf die Ebene PQR senkrecht stellt, sodass man, um von der Richtung PQ in die Richtung PR zu sehen, eine Drehung rechtsherum durch einen Winkel $< 180^0$ machen muss, so geht die Richtung des Vektors von den Füssen nach dem Kopfe. Statt dessen kann man auch sagen, wenn man in QR steht, mit den Füssen in R, dem Kopfe in Q und nach P sieht, so geht die Richtung des Vektors nach links hin.

Fällt man PS senkrecht auf QR, so ist die Grösse von PP_1 gleich $\frac{1}{2}\overline{PS}\cdot\overline{QR}$. Bestimmt man daher einen spitzen Winkel φ aus der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \overline{QR}$, so kann man sagen, die Ebene P_1QR bildet mit der PQR den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ und zwar von QR aus gesehen mit einer Drehung nach links hin.

Nehmen wir zweitens an, die beiden Punkte PP_1 ständen unter sich und mit ihrem Mittelpunkte $\mathfrak{P}$ in dem durch die Gleichung

$$5)\qquad P_1 - P = |\,\omega\mathfrak{P}QR$$

gegebenen Zusammenhang. Da $\mathfrak{P} = \frac{P+P_1}{2}$, so wird

$$P_1 - P = 2(P_1 - \mathfrak{P}) = 2(\mathfrak{P} - P),$$

so dass

$$P_1 - \mathfrak{P} = \quad \frac{1}{2}|\,\omega\mathfrak{P}QR,$$

$$P - \mathfrak{P} = -\frac{1}{2}|\,\omega\mathfrak{P}QR$$

wird.

Es liegen also $P\mathfrak{P}P_1$ in einer geraden, in $\mathfrak{P}$ auf der Ebene $\mathfrak{P}QR$ senkrecht stehenden Linie, die Ebene P_1QR macht mit der Ebene $\mathfrak{P}QR$ nach links, die PQR nach rechts hin den Winkel $\frac{\varphi}{2}$. Von irgend einem Punkte T auf QR haben dabei P und P_1 denselben Abstand. Denn man kann $QR = UT$ setzen, wenn man den Punkt U auf QR passend bestimmt, und dann die Gleichung 5):

$$P_1 - T + T - P = |\,\omega\mathfrak{P}UT$$

schreiben. Aus ihr folgt:

$$(P_1 - T)\,|\,(P_1 - T) + (P_1 - T)\,|\,(T - P) = (P_1 - T)\,\omega\mathfrak{P}UT$$
$$(T - P)\,|\,(P_1 - T) + (T - P)\,|\,(T - P) = (T - P)\,\omega\mathfrak{P}UT$$

und durch Subtraktion:

$$(P_1 - T)^2 - (P - T)^2 = (P_1 + P - 2T)\,\omega\mathfrak{P}UT$$
$$= 2(\mathfrak{P} - T)\,\omega\mathfrak{P}UT.$$

Es ist aber $\omega\mathfrak{P}UT = (U - \mathfrak{P})(T - \mathfrak{P})$ und folglich die rechte Seite gleich Null, also $\overline{P_1T} = \overline{PT}$.

Es geht daher P_1 aus P hervor durch eine Drehung um die Axe QR durch den Winkel φ und zwar durch eine Drehung, die von

us gesehen nach links hin erfolgt. Die Grösse und der Sinn der ng, und die Axe, sind durch den Linienteil QR vollständig be-t.

§ 4.

Ian kann die Form zweiten Grades Γ durch Änderung des Punktes ndern. Denn man kann

$$\Gamma = Qa + (P - Q)a + |b$$

ben. Hier ist $(P - Q)a + |b$ ein Bivektor, den man $= |b'$ setzen Man erhält für Γ eine ausgezeichnete Form, wenn b' mit a parallel,

$$(P - Q)a + |b = \lambda |a$$

unter λ eine Zahl verstanden.*

)ie Multiplikation mit a liefert $a|b = \lambda a|a$, und dann

$$(P - Q)a = \frac{(a|b)|a - (a|a)|b}{a|a} = \frac{1}{a|a} a(|ab),$$

$$\left(P - Q + \frac{|ba}{a|a}\right)a = 0.$$

)er erste Faktor links muss also ein mit a paralleler Vektor sein, nan $= \mu a$ setzen kann, wenn man unter μ eine Zahl versteht. ergiebt sich

$$Q = P + \frac{|ba}{a|a} - \mu a.$$

)urch Einsetzen in Gleichung 6) sieht man, dass μ ganz beliebig , dass also Q auf einer bestimmten mit a parallelen Linie will-h gewählt werden kann. Man hat endlich

$$\Gamma = Qa + \frac{a|b}{a|a} \cdot |a$$

e Normalform von Γ. Die Formel 3) ergiebt dann

$$A_1 - A = |\omega \mathfrak{A} Qa + \lambda a.$$

st nun ϱ eine beliebige Zahl und setzt man

$$A_1 - (\lambda - \varrho)a = A'_1,$$
$$A + \varrho a \qquad = A',$$

d A' und A'_1 zwei Punkte, von denen der erste aus A durch eine iebung ϱa parallel a hervorgeht, während man den zweiten um)a verschieben muss, um A_1 zu erhalten. Damit wird:

$$\mathfrak{A} = \frac{A' + A'_1}{2} + \frac{1}{2}(\lambda - 2\varrho)a,$$

$$\mathfrak{A} Qa = \frac{A' + A'_1}{2} Qa,$$

$$A'_1 - A' = |\omega \frac{A' + A'_1}{2} Qa.$$

Die folgende Reduktion ist mit der Aufsuchung der Centralaxe eines s von Kräften identisch, das auch durch eine Form zweiten Grades dar-werden kann.

Die letzte Formel zeigt, dass A'_1 aus A' durch eine Drehung um die durch Q gehende mit a parallele Axe, die mit (Q, a) bezeichnet sei, hervorgeht. A_1 entsteht somit aus A durch Verschiebung parallel a und eine Drehung um eine zu a parallele Axe.

Die Form zweiten Grades Γ stellt daher eine Schraubenbewegung dar oder sie repräsentiert einen Winder (wrench).*

Wäre nun Γ' ein zweiter Winder, der ebenfalls, wie Γ, die Punkte AB in $A_1 B_1$ überführte, so müsste

7) $$\omega \mathfrak{A} \Gamma = \omega \mathfrak{A} \Gamma', \quad \omega \mathfrak{B} \Gamma = \omega \mathfrak{B} \Gamma'$$

sein. Ist aber für eine Form zweiten Grades T

$$\omega \mathfrak{A} \mathsf{T} = 0,$$

so sei

$$\mathsf{T} = \mathfrak{A} d + ef,$$

wo def Vektoren. Dann verlangt die Gleichung, dass

$$\omega \mathfrak{A} ef = ef = 0,$$

also $\mathsf{T} = \mathfrak{A} d$ sei, oder, wenn man den Punkt $\mathfrak{A} + d = R$ setzt, dass $\mathsf{T} = \mathfrak{A} R$ sei.

Die Gleichungen 7) sind also erfüllt, wenn

$$\Gamma' - \Gamma = \mathfrak{A} R = \mathfrak{B} S.$$

Diese Beziehung zwischen vier Punkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}RS$ sagt aber aus, dass sie auf einer geraden Linie liegen, und dass die beiden Vektoren $R - \mathfrak{A}$ und $S - \mathfrak{B}$ gleich sind. Setzt man also

$$R = \mathfrak{A} + \varrho(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}),$$

$$S = \mathfrak{A} + \sigma(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}),$$

so folgt $\varrho = \sigma - 1$,

$$\Gamma' - \Gamma = \varrho \mathfrak{A} \mathfrak{B},$$

wo ϱ eine beliebige Zahl ist. Jeder Winder von der Form

$$\Gamma + \varrho \mathfrak{A} \mathfrak{B}$$

führt also AB in $A_1 B_1$ über, so dass es ein ganzes Büschel von Windern giebt, die dieses leisten.

§ 5.

Soll unter diesen Windern einer sein, der eine reine Drehung ist, so muss man ϱ so bestimmen können, dass $\Gamma' = \Gamma + \varrho \mathfrak{A} \mathfrak{B}$ gleich einem Linienteil ist.**

Dann ist aber $\Gamma' \Gamma' = 0 = \Gamma \Gamma + 2\varrho(\Gamma \mathfrak{A} \mathfrak{B})$:

$$\varrho = -\frac{\Gamma \Gamma}{2(\Gamma \mathfrak{A} \mathfrak{B})}.$$

Gesetzt ϱ sei so bestimmt. Wenn man dann, mit Hilfe eines Punktes P, Γ' in die Form bringt:

---

* Grassmann a. a. O. S. 223. Anmerkung.

** Ebenda Nr. 286.

$$\Gamma' = Pa' + |b,$$

und b Vektoren sind, so folgt aus

$$0 = \Gamma'\Gamma' = 2P(a'|b),$$

wenn $a' \neq 0$, b senkrecht zu a' ist. Dann kann man also

$$b = |a'c$$

, wo c wieder ein Vektor, und es wird

$$\Gamma' = Pa' + a'c = (P - c)a',$$

nit $P - c = Q$, $a' = R - Q$, wo Q und R Punkte sind, $\Gamma' = QR$ n der That ein Linienteil. Ist aber $a' = 0$, so wird $\Gamma' = |b$ und eine reine Verschiebung dar. Es giebt also eine Drehung, die A_1B_1 überführt, wenn $a' = \omega\Gamma' \neq 0$ ist. Es wird aber

$$\omega\Gamma' = \omega\Gamma + \varrho\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \omega\Gamma + \varrho(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}),$$

wenn $\omega\Gamma' = 0$ wäre,

$$\omega\Gamma = \varrho(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$$

Die Normalform von Γ ist aber

$$\Gamma = Q\omega\Gamma + \lambda|\omega\Gamma,$$

ier $= Q\varrho(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) + \varrho\lambda|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$, und mit ihr ergiebt sich

$$\mathfrak{A}\Gamma = -\varrho Q\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho\lambda\mathfrak{A}|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$
$$\mathfrak{B}\Gamma = -\varrho Q\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho\lambda\mathfrak{B}|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$
$$\omega\mathfrak{A}\Gamma = -\varrho\omega Q\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho\lambda|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$
$$\omega\mathfrak{B}\Gamma = -\varrho\omega Q\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho\lambda|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),$$

$A_1 - A = B_1 - B$ ist, also nur eine Verschiebung nötig wird.

§ 6.

ie Ableitung der Formel 2) aus der 1) ist nur dann berechtigt, $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ nicht gleich Null ist. Fallen aber die beiden Punkte $\mathfrak{A}$ zusammen, so bestimme man einen Einheitsvektor a, sodass

$$(A_1 - A)|a = (B_1 - B)|a$$

t ϱ der gemeinsame Wert und setzt man

$$A_1 - A = \varrho a + a_1, \quad B_1 - B = \varrho a + b_1,$$

t $a|a_1 = a|b_1 = 0$. Definiert man daher die Punkte A' und B' die Gleichungen

$$A' = A + \varrho a, \quad B' = B + \varrho a,$$

d $A_1 - A' = a_1$, $B_1 - B' = b_1$ und diese Vektoren sind zu a senk- wenn sie nicht Null sind. Ferner ist

$$A_1 + A' = 2\mathfrak{A} + \varrho a, \quad B_1 + B' = 2\mathfrak{A} + \varrho a.$$

e Linien A_1A' und B_1B' werden also von der Linie $(\mathfrak{A}, a)$ in Iitten senkrecht getroffen, wenn sie nicht verschwinden. Man kann

folglich AB in A_1B_1 überführen durch eine Schiebung um ϱa allein oder in Verbindung mit einer Drehung durch 180° um die Axe $(\mathfrak{A}, a)$.

§ 7.

Indem wir nun zur Betrachtung von drei Punkten gehen, seien ABC und $A_1B_1C_1$ zwei kongruente Dreiecke. Die Mittelpunkte

$$\tfrac{1}{2}(A+A_1),\quad \tfrac{1}{2}(B+B_1),\quad \tfrac{1}{2}(C+C_1)$$

der drei Linien AA_1, BB_1, CC_1 seien mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet; und es werde zuerst angenommen, dass diese drei Punkte nicht in gerader Linie liegen, also auch nicht zwei von ihnen zusammenfallen. Man kann dann die Betrachtungen des § 2 auf die drei Paare von Punkten, AB, BC, CA anwenden und also drei Formen zweiten Grades $\mathsf{AB\Gamma}$ finden, sodass

$$8)\quad \begin{cases} A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\mathsf{\Gamma}, & B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\mathsf{A}, \quad C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\mathsf{B}, \\ B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\mathsf{\Gamma}, & C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\mathsf{A}, \quad A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\mathsf{B} \end{cases}$$

ist. Dann muss auch

$$\omega\mathfrak{A}(\mathsf{\Gamma}-\mathsf{B}) = 0,\quad \omega\mathfrak{B}(\mathsf{A}-\mathsf{\Gamma}) = 0,\quad \omega\mathfrak{C}(\mathsf{B}-\mathsf{A}) = 0$$

sein, also müssen nach dem § 4 drei Punkte PQR existieren, die

$$9)\qquad \mathsf{\Gamma}-\mathsf{B} = \mathfrak{A}P,\quad \mathsf{A}-\mathsf{\Gamma} = \mathfrak{B}Q,\quad \mathsf{B}-\mathsf{A} = \mathfrak{C}R,$$

ergeben und die somit die Gleichung

$$10)\qquad \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R = 0$$

erfüllen müssen. Multipliziert man mit $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so folgt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}P = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}Q = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}R = 0$$

und daher liegen, weil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ nicht in einer Geraden liegen sollen, PQ und R in der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Man kann somit

$$P = \alpha\mathfrak{A} + \beta''\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{C}$$

setzen, wo $\alpha\beta''\gamma$ Zahlen sind, die die Bedingung $\alpha + \beta'' + \gamma = 1$ erfüllen, und erhält

$$\mathfrak{A}P = \beta''\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \gamma\mathfrak{C}\mathfrak{A}.$$

Ähnlich giebt es Zahlen $\beta\beta'\gamma'\gamma''$, für die folgt:

$$\mathfrak{B}Q = \beta\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \gamma'\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{C}R = \beta'\mathfrak{C}\mathfrak{A} - \gamma''\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Die Gleichung 10) verlangt dann

$$(\beta''-\gamma')\mathfrak{A}\mathfrak{B} + (\beta-\gamma'')\mathfrak{B}\mathfrak{C} + (\beta'-\gamma)\mathfrak{C}\mathfrak{A} = 0$$

und aus dieser Gleichung folgen durch Multiplikation mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei

$$\beta''-\gamma' = 0,\quad \beta-\gamma'' = 0,\quad \beta'-\gamma = 0,$$

die

$$\mathsf{\Gamma}-\mathsf{B} = \beta''\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \beta'\,\mathfrak{C}\mathfrak{A},$$
$$\mathsf{A}-\mathsf{\Gamma} = \beta\,\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \beta''\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$\mathsf{B}-\mathsf{A} = \beta'\,\mathfrak{C}\mathfrak{A} - \beta\,\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

und weiter:

$$\mathsf{A} - \beta\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathsf{B} - \beta'\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \Gamma - \beta''\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

en. Bezeichnet man endlich den gemeinsamen Wert dieser drei
en zweiten Grades mit Σ, so folgt:

$$\mathsf{A} = \Sigma + \beta\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \qquad \mathsf{B} = \Sigma + \beta'\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \qquad \Gamma = \Sigma + \beta''\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

) $$A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\Sigma, \quad B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\Sigma, \quad C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\Sigma.$$

Es giebt also einen Winder, der das Dreieck ABC in das kon-
te $A_1B_1C_1$ überführt. Gäbe es noch einen zweiten Winder Σ',
das Gleiche leistete, so müsste

$$\omega\mathfrak{A}(\Sigma' - \Sigma) = \omega\mathfrak{B}(\Sigma' - \Sigma) = \omega\mathfrak{C}(\Sigma' - \Sigma) = 0,$$

Es müssten also drei Punkte UVW existieren, sodass

$$\Sigma' - \Sigma = \mathfrak{A}U = \mathfrak{B}V = \mathfrak{C}W$$

. Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}U = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C}U = 0$$

U ist notwendig mit $\mathfrak{A}$ identisch und daher

$$\Sigma' - \Sigma = 0.$$

Es giebt also nur einen Winder, der den Gleichungen 11) genügt.

§ 8.

Wenn die drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in gerader Linie liegen, setze man

$$A = \mathfrak{A} - a, \quad A_1 = \mathfrak{A} + a,$$
$$B = \mathfrak{B} - b, \quad B_1 = \mathfrak{B} + b,$$
$$C = \mathfrak{C} - c, \quad C_1 = \mathfrak{C} + c,$$

bc Vektoren sind. Dann müssen die Gleichungen bestehen

) $$\begin{cases} (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\,|\,(b - a) = 0, \\ (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\,|\,(c - b) = 0, \\ (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,|\,(a - c) = 0. \end{cases}$$

Weil $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in gerader Linie liegen, sind die drei Vektoren
$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} - \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} - \mathfrak{C}$ parallel. Ist q ein ihnen paralleler Einheits-
r, so folgt aus den drei letzten Gleichungen

) $$a\,|\,q = b\,|\,q = c\,|\,q = \varrho,$$

Wenn man daher

) $$\begin{cases} a = \varrho q + a_1, \\ b = \varrho q + b_1, \\ c = \varrho q + c_1 \end{cases}$$

, so wird

$$a_1\,|\,q = b_1\,|\,q = c_1\,|\,q = 0.$$

Definiert man jetzt drei Punkte durch die Gleichungen:

$$A' = A + 2\varrho q, \quad B' = B + 2\varrho q, \quad C' = C + 2\varrho q,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{A_1 + A'}{2} = \mathfrak{A} + \varrho q, \quad A_1 - A' = 2a_1,$$

$$\frac{B_1 + B'}{2} = \mathfrak{B} + \varrho q, \quad B_1 - B' = 2b_1,$$

$$\frac{C_1 + C'}{2} = \mathfrak{C} + \varrho q, \quad C_1 - C' = 2c_1.$$

Die Linien $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$ werden also von der Linie $(\mathfrak{A}, q)$ in ihren Mitten senkrecht getroffen, wenn sie nicht alle gleich Null sind, und daher gehen $A_1 B_1 C_1$ aus $A' B' C'$ hervor durch Drehung um 180^0 um die Axe $(\mathfrak{A}, q)$, und die $A_1 B_1 C_1$ entstehen aus ABC durch eine Schiebung um $2\varrho q$ und die eben bezeichnete Drehung. Sind die drei Vektoren $a_1 b_1 c_1$ Null, so reicht die Schiebung aus. Man hat somit auch hier die Schraubenbewegung. Aber in den Formeln 11) des vorigen Paragraphen ist diese nur als ein Grenzfall enthalten entsprechend der Annäherung von $\frac{\varphi}{2}$ an 90^0.

Auch wenn zwei der Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zusammenfallen, ist der obige Schluss noch möglich, weil dann zwei von den Gleichungen 12) nicht illusorisch werden und der Vektor q noch bestimmt ist.

Ist aber $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so bestimme man q so, dass es senkrecht auf den Vektoren $b - a$ und $c - a$ ist. Weil dann

$$(b - a) | q = 0, \quad (c - a) | q = 0,$$

bestehen die Gleichungen 13) mit ihren weiteren Folgerungen.

q kann unbestimmt werden, wenn die drei Vektoren abc komplanar sind. Nimmt man in diesem Falle q senkrecht zur Ebene abc, so folgt $\varrho = 0$, während alles übrige wie oben bleibt.

Endlich könnte die Ebene abc unbestimmt werden, indem a, b, c parallel werden. Bestimmt man dann q so, dass $a | q = 0$ ist, so wird $\varrho = 0$ und es gelten die früheren Resultate.

§ 9.

Nun werde zu den kongruenten Dreiecken ABC und $A_1 B_1 C_1$ noch ein vierter Punkt D und einer D_1 hinzugenommen, die so liegen, dass

$$\overline{AD} = \overline{A_1 D_1}, \quad \overline{BD} = \overline{B_1 D_1}, \quad \overline{CD} = \overline{C_1 D_1}$$

ist. Die Mitte von DD_1, d. h. der Punkt $\frac{1}{2}(D + D_1)$ sei mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Zuerst werde vorausgesetzt, dass von den vier Punkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ keine drei in gerader Linie liegen. Dann kann man die Betrachtungen des § 7 auf jedes der vier Dreiecke ABC, ABD, ACD, BCD anwenden und erhält so die Gleichungen:

)
$$\begin{cases} A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\Gamma, & A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\mathsf{B}, & B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\mathsf{A}, \\ B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\Gamma, & C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\mathsf{B}, & C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\mathsf{A}, \\ D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\Gamma, & D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\mathsf{B}, & D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\mathsf{A}, \end{cases}$$

)
$$A_1 - A = |\,\omega\mathfrak{A}\Sigma,\quad B_1 - B = |\,\omega\mathfrak{B}\Sigma,\quad C_1 - C = |\,\omega\mathfrak{C}\Sigma,$$

, B, Γ, Σ vier Formen zweiten Grades sind.

Die Vergleichung der beiden Werte von $A_1 - A$ und $B_1 - B$ giebt

$$\omega\mathfrak{A}(\Sigma - \Gamma) = 0,\quad \omega\mathfrak{B}(\Sigma - \Gamma) = 0,$$

us

$$\Sigma - \Gamma = -\nu\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

, wo ν eine Zahl ist. Ebenso ergiebt die Vergleichung von $B_1 - B$ $C_1 - C$

$$\Sigma - \mathsf{B} = -\mu\mathfrak{C}\mathfrak{A},$$

die von $C_1 - C$ und $A_1 - A$:

$$\Sigma - \mathsf{A} = -\lambda\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} D_1 - D &= |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma + \lambda\,|\,\omega\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \\ &= |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma + \mu\,|\,\omega\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{A} \\ &= |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma + \nu\,|\,\omega\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Da $\omega\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{D})(\mathfrak{C} - \mathfrak{D}) = \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\mathfrak{B}$ ist, muss, t die drei obigen Ausdrücke gleich sind,

$$\begin{aligned} \lambda(\mathfrak{D}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{D}) &= \mu(\mathfrak{D}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{D}) \\ &= \nu(\mathfrak{D}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}) \end{aligned}$$

Multipliziert man mit $\mathfrak{D}$, so folgt:

)
$$\lambda\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mu\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \nu\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}$$

die weitere Multiplikation mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ liefert:

$$\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mu\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \nu\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = 0.$$

Diese Gleichungen können auf zwei Arten erfüllt werden. Ent- r ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \neq 0$. Dann ist $\lambda = \mu = \nu = 0$ und es tritt zu den hungen 16) noch hinzu:

*)
$$D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma.$$

Das Tetraeder $ABCD$ wird somit durch den Winder Σ in das C_1D_1 übergeführt.

Oder es ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = 0$, und die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ liegen ner Ebene. Dann kann man die Zahl ϱ so bestimmen, dass $\mathfrak{C}$ den drei in 17) gleichgesetzten Produkten gleich wird, und t dann:

**)
$$D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\Sigma + \varrho\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

§ 10.

Das Tetraeder $A_1 B_1 C_1 D_1$ war so angenommen, dass die sechs Entfernungen der vier Ecken den entsprechenden Kantenlängen des Tetraeders $ABCD$ gleich sind. Daher sind die beiden Figuren entweder kongruent oder symmetrisch. Da in den Gleichungen 16) und 16*) die Überführung durch einen Winder Σ ausgeführt wird, sind dann die beiden Tetraeder kongruent; und daher müssen, wenn sie symmetrisch sind, die Gleichungen 16) und 16**) gelten. Diese setzen aber voraus, dass die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen.

Wir haben also den Satz: Wenn zwei Tetraeder symmetrisch gleich sind, liegen die Mitten der Verbindungslinien entsprechender Ecken in einer und derselben Ebene, die Mittelebene heissen möge.

Dass im ersten Falle die beiden Tetraeder kongruent sind, kann man zeigen, indem man die Gleichung:

$$ABCD = A_1 B_1 C_1 D_1$$

beweist.

Setzen wir, ähnlich wie in § 8,

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathfrak{A} + a, & A &= \mathfrak{A} - a, \\ B_1 &= \mathfrak{B} + b, & B &= \mathfrak{B} - b, \\ C_1 &= \mathfrak{C} + c, & C &= \mathfrak{C} - c, \\ D_1 &= \mathfrak{D} + d, & D &= \mathfrak{D} - d, \end{aligned}$$

so folgt:

$$18)\quad \begin{cases} A_1 B_1 C_1 D_1 - ABCD = 2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}d - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}c + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}b - \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}a] \\ \qquad\qquad + 2[\mathfrak{A}bcd - \mathfrak{B}acd + \mathfrak{C}abd - \mathfrak{D}abc]. \end{cases}$$

Weil ein Produkt von vier Vektoren Null ist, ist

$$\mathfrak{B}acd = \mathfrak{B}acd + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})acd = \mathfrak{A}acd \text{ u. s. w.}$$

und daher die zweite Klammer

$$\begin{aligned} &= \mathfrak{A}(bcd - acd + abd - abc) \\ &= \mathfrak{A}(b - a)(c - a)(d - a). \end{aligned}$$

Sind nun $uvwt$ vier Vektoren, so ist

$$(|ut)(|vt)(|wt) = 0,$$

weil die drei Faktoren Vektoren, die auf t senkrecht stehen, also komplanar sind.

Oder, um einen andern Beweis zu geben, sei $|vt = v'$, $|wt = w'$ gesetzt, so ist:

$$v'w'|ut = (v'|u)(w'|t) - (v'|t)(w'|u).$$

Aber $v'|t = t|v' = tvt$ ist $= 0$, und ebenso $w'|t$, daher ist

$$v'w'|ut = 0$$

und dies ist die zu beweisende Gleichung.

Es ist aber $$2(b-a) = |\,\omega(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\Sigma.$$

Bringt man daher mit Hilfe eines willkürlichen Punktes den
ler Σ in die Form $Pe+fg$, wo efg Vektoren sind, so folgt:

$$\omega(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\Sigma = e(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}),$$

r

$$b-a = \frac{1}{2}\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e,$$

$$c-a = \frac{1}{2}\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e,$$

$$d-a = \frac{1}{2}\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})e,$$

ss nach der eben bewiesenen Formel:

$$(b-a)(c-a)(d-a) = 0$$

Die erste Klammer in Gleichung 18) kann man schreiben:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}(d-a) - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}(c-a) + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}(b-a)$$
$$+\,a[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}].$$

Der Koeffizient von a ist gleich $(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})(\mathfrak{B}-\mathfrak{D})(\mathfrak{C}-\mathfrak{D})$, daher
:weite Summand als Produkt von vier Vektoren, gleich Null.
Der erste Summand wird aber gleich

$$\frac{1}{2}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})e - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e]$$

wenn man $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})$ u.s.w. einführt,

$$\frac{\mathfrak{A}}{2}[(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})e - (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})(\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e$$
$$+\,(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})(\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e].$$

Sind nun wieder $uvwt$ vier beliebige Vektoren, so hat man

$$uv\,|\,wt = (u\,|\,w)(v\,|\,t) - (u\,|\,t)(v\,|\,w),$$
$$vw\,|\,ut = (v\,|\,u)(w\,|\,t) - (v\,|\,t)(w\,|\,u),$$
$$wu\,|\,vt = (w\,|\,v)(u\,|\,t) - (w\,|\,t)(u\,|\,v),$$

r durch Addition:

$$uv\,|\,wt + vw\,|\,ut + wu\,|\,vt = 0.^{*}$$

Dieser Gleichung zufolge ist also der Koeffizient von $\frac{1}{2}\mathfrak{A}$ gleich
und demnach $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

§ 11.

Man kann den Satz über die symmetrischen Tetraeder auch noch
ındere Art beweisen. Wir denken uns von D aus eine Senkrechte
die Ebene ABC gefällt, deren Fusspunkt in dieser Ebene der
:t:

* Grassmann a. a. O. Nr. 185.

$$A + \beta(B - A) + \gamma(C - A)$$

sei, wo β und γ Zahlen sind. Da $|\,\omega ABC$ ein auf der Ebene A
senkrechter Vektor ist, kann man

19) $$D = A + \beta(B - A) + \gamma(C - A) + \lambda\,|\,\omega ABC$$

setzen. Für das kongruente Tetraeder wäre dann

$$D_1 = A_1 + \beta(B_1 - A_1) + \gamma(C_1 - A_1) + \lambda\,|\,\omega A_1 B_1 C_1.$$

Daher ist für das symmetrische

19*) $$D_1 = A_1 + \beta(B_1 - A_1) + \gamma(C_1 - A_1) - \lambda\,|\,\alpha A_1 B_1 C_1$$

also

20) $$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) - \frac{\lambda}{2}\,|\,\omega(A_1 B_1 C_1 - ABC).$$

Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen ist aber

$$A_1 B_1 C_1 - ABC = 2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}c + \mathfrak{B}\mathfrak{C}a + \mathfrak{C}\mathfrak{A}b + abc],$$

also, weil $\omega abc = 0$ ist:

$$\begin{aligned}\omega(A_1 B_1 C_1 - ABC) &= 2\omega[\mathfrak{A}\mathfrak{B}c + \mathfrak{B}\mathfrak{C}a + \mathfrak{C}\mathfrak{A}b] \\ &= 2[(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})c + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})a + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) \\ &= 2[\mathfrak{A}(b - c) + \mathfrak{B}(c - a) + \mathfrak{C}(a - b)] \\ &= \mathfrak{A}\,|\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})e + \mathfrak{B}\,|\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})e + \mathfrak{C}\,|\,(\mathfrak{B} -\end{aligned}$$

Um hiervon die Ergänzung nehmen zu können, muss man
rechte Seite, die eine Summe von Bivektoren ist, auch als so
darstellen. Zu dem Zwecke formt man sie in

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,|\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})e + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\,|\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})e \\ &\quad + \mathfrak{C}[\,|\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})e + |\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})e + |\,(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})e]\end{aligned}$$

um, was, weil die Klammer verschwindet, der ersten Summe gl
ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned}|\,\omega(A_1 B_1 C_1 - ABC) &= |\,[(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,|\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})e] + |\,[(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\,|\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{C} \\ &= [(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,|\,e](\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) - [(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,|\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})] \\ &\quad + [(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\,|\,e](\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) - [(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,|\,(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})] \\ &= \mathfrak{A}[(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\,|\,e] + \mathfrak{B}[(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\,|\,e] \\ &\qquad + \mathfrak{C}[(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\,|\,e].\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt aber einen in der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ enthalte
Vektor vor; addiert man dessen $-\frac{\lambda}{2}$-faches zu dem Punkt

$$\mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})$$

der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ nach Vorschrift von Gleichung 20), so entsteht in
wieder ein Punkt dieser Ebene.

§ 12.

Wenn die beiden symmetrischen Tetraeder $ABCD$ und $A_1 B_1 C$
gegeben sind, so ist der Winder Σ vollständig bestimmt, daher a
die Zahlen $\lambda\mu\nu$ und ϱ in 17) und 16**). Nimmt man aber Σ

iebig an und berechnet dann $A_1B_1C_1D_1$ aus den Gleichungen 16) 6**), so wird das Dreieck $A_1B_1C_1$ zu ABC kongruent. Ferner

$$D_1 - D - (A_1 - A) = |\,\omega(\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,\Sigma + \varrho|\;\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

$$\begin{aligned}(D_1 - A_1)^2 - (D - A)^2 &= 2(\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,|\,(D_1 - D - A_1 + A)\\ &= 2\varrho(\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\\ &= 2\varrho(\mathfrak{D} - \mathfrak{A})(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}).\end{aligned}$$

Somit wird nur dann

$$\overline{D_1A_1} = \overline{DA} \quad \text{und ebenso} \quad \overline{D_1B_1} = \overline{DB}, \quad \overline{D_1C_1} = \overline{DC},$$

entweder $\varrho = 0$ oder die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in einer Ebene . Nur dann erhält man folglich ein zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ kongruentes oder etrisches Tetraeder.

Es ergiebt sich nun im letzterem Falle:

$$A_1B_1C_1D_1 + ABCD = 2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} + abcd + F]$$

$$F = \mathfrak{A}\mathfrak{B}cd - \mathfrak{A}\mathfrak{C}bd + \mathfrak{A}\mathfrak{D}bc + \mathfrak{B}\mathfrak{C}ad - \mathfrak{B}\mathfrak{D}ac + \mathfrak{C}\mathfrak{D}ab.$$

Weil aber $abcd$ als Produkt von vier Vektoren, und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ verndet, weil die vier Punkte in einer Ebene liegen, ist nur noch berechnen.

Dies ist gleich

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}\mathfrak{B}(c-a)(d-a) - \mathfrak{A}\mathfrak{C}(b-a)(d-a) + \mathfrak{A}\mathfrak{D}(b-a)(c-a)\\ &\quad + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(ad - ac) - \mathfrak{A}\mathfrak{C}(ad - ab) + \mathfrak{A}\mathfrak{D}(ac - ab)\\ &\quad + \mathfrak{B}\mathfrak{C}ad - \mathfrak{B}\mathfrak{D}ac + \mathfrak{C}\mathfrak{D}ab.\end{aligned}$$

Die sechs letzten Summanden ergeben in anderer Zusammenfassung

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A})ad + (\mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\mathfrak{B})ac\\ &\qquad + (\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\mathfrak{A})ab\\ &= (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})ad + (\mathfrak{B} - \mathfrak{D})(\mathfrak{A} - \mathfrak{D})ac\\ &\qquad + (\mathfrak{A} - \mathfrak{D})(\mathfrak{C} - \mathfrak{D})ab = 0,\end{aligned}$$

eder Summand als Produkt von vier Vektoren für sich verschwindet.

Wenn man die drei Vektoren $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} - \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{D}$ mit w bezeichnet, so wird der erste Teil von F gleich

$$\frac{1}{4}\mathfrak{A}\{u\,|\,ve(|\,we + \varrho\,|\,uv) - v\,|\,ue(|\,we + \varrho\,|\,uv) + w\,|\,ue\,|\,ve\}.$$

Der Inhalt der Klammer ist $\varrho T_1 + T_2$, wo

$$T_1 = u\,|\,ve\,|\,uv - v\,|\,ue\,|\,uv,$$

$$T_2 = u\,|\,ve\,|\,we - v\,|\,ue\,|\,we + w\,|\,ue\,|\,ve.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}u\,|\,ve\,|\,wt &= wt\,|\,(u\,|\,ve)\\ &= wt\,[v(u\,|\,e) - e(u\,|\,v)],\end{aligned}$$

$$T_1 = -uve(u\,|\,v) - vue(v\,|\,u) = 0.$$

Indem man die nämliche Umformung auf T_2 anwendet, findet man

$$T_2 = e[vw(u\,|\,e) + wu(v\,|\,e) + uv(w\,|\,e)].$$

Für beliebige Vektoren uvw verschwindet die Klammer nicht. Hier aber sind diese drei Vektoren komplanar, daher kann man

$$w = \mu u + \nu v$$

setzen, womit sich

$$T_2 = e[\mu vu(u\,|\,e) + \nu vu(v\,|\,e) + \mu uv(u\,|\,e) + \nu uv(v\,|\,e)] = 0$$

ergiebt. Hiermit ist gezeigt, dass

21) $$A_1 B_1 C_1 D_1 = - ABCD$$

ist für jeden beliebigen Wert von ρ, wenn nur die vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen, dass also dann die Tetraeder symmetrisch sind.

§ 13.

Wenn, wie angenommen, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen, kann man setzen

22) $$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mu(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \nu(\mathfrak{C} - \mathfrak{A});$$

dann ergeben die Gleichungen 16) und 16**):

$$D_1 - D = (1 - \mu - \nu)(A_1 - A) + \mu(B_1 - B) + \nu(C_1 - C) + \rho\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

daher der Vektor

$$D_1 - (1 - \mu - \nu)A_1 - \mu B_1 - \nu C_1$$

dem

$$D - (1 - \mu - \nu)A - \mu B - \nu C + \rho\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

gleich ist. Ist er $= x$, so ergiebt die Gleichung 22):

$$x = \frac{\rho}{2}\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

und dann folgt:

23) $$\begin{cases} D = (1 - \mu - \nu)A + \mu B + \nu C - \frac{\rho}{2}\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \\ D_1 = (1 - \mu - \nu)A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 + \frac{\rho}{2}\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}. \end{cases}$$

Ist $\rho = 0$, so ist also D ein Punkt der Ebene ABC, D_1 der bei kongruenter Transformation entsprechende Punkt der Ebene $A_1B_1C_1$ und die beiden Tetraeder $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ sind dann beide Null.

Die Gleichungen 23) ergeben den Satz: Die von den Ecken D und D_1 auf die Mittelebene gefällten Senkrechten sind gleich lang und treffen die Dreiecke ABC bezw. $A_1B_1C_1$ in entsprechenden Punkten.

Wenn man in Formel 20) den in § 11 gefundenen Wert von

$$|\,\omega(A_1B_1C_1 - ABC)$$

einträgt, folgt:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) - \frac{\lambda}{2}[\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{C}\,|\,e) + \mathfrak{B}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\,|\,e) + \mathfrak{C}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,|\,e)].$$

Die Vergleichung mit 22) ergiebt also:

$$1-\mu-\nu=1-\beta-\gamma-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}\,|\,e),$$
$$\mu=\beta-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e),$$
$$\nu=\gamma-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)$$

und damit nach 19) und 19*):

$$D=A+\left(\mu+\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)\right)(B-A)$$
$$+\left(\nu+\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)\right)(C-A)$$
$$+\lambda\,|\,\omega ABC.$$

Ein ähnlicher Ausdruck ergiebt sich für D_1; er entsteht aus dem Vorstehenden, indem man A, B, C durch A_1, B_1, C_1, und $\lambda\,|\,\omega ABC$ durch $-\lambda\,|\,\omega A_1B_1C_1$ ersetzt. Ähnliche Ausdrücke haben wir in 23); es soll nun nachgewiesen werden, dass beide übereinstimmen. Schreibt man den obigen Ausdruck:

$$\text{24)}\quad\begin{cases} D=(1-\mu-\nu)A+\mu B+\nu C+X,\\ D_1=(1-\mu-\nu)A_1+\mu B_1+\nu C_1+Y,\end{cases}$$

so wird:

$$X+Y=\lambda\,|\,\omega(ABC-A_1B_1C_1)$$
$$+\lambda(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})+\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})$$
$$=\lambda[|\,\omega(ABC-A_1B_1C_1)+(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}|e)\mathfrak{A}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}|e)\mathfrak{B}$$
$$+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)\mathfrak{C}]=0,$$

wie oben in § 11 gezeigt wurde.

Dagegen ist:

$$X-Y=-\lambda(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)(b-a)-\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)(c-a)$$
$$+\lambda\,|\,\omega(ABC+A_1B_1C_1)$$
$$=\lambda\,|\,\omega(A_1B_1C_1+ABC)-\frac{1}{2}\lambda(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e$$
$$-\frac{1}{2}\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e.$$

Weiter folgt:

$$A_1B_1C_1+ABC=2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2\mathfrak{A}bc+2\mathfrak{B}ca+2\mathfrak{C}ab,$$
$$\omega(A_1B_1C_1+ABC)=2\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2(bc+ca+ab)$$
$$=2\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2(b-a)(c-a),$$

also

$$X-Y=2\lambda\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\frac{\lambda}{2}\,|\,[\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e\cdot|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e]$$
$$-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\,|\,e)\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})e-\frac{\lambda}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\,|\,e)\,|\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})e.$$

Setzt man
$$\mathfrak{B}-\mathfrak{A}=u,\quad \mathfrak{C}-\mathfrak{A}=v,$$
so ist die rechte Seite oben, soweit sie mit $\frac{\lambda}{2}$ multipliziert ist,

$$|\,(|\,ue\cdot|\,ve)+(v\,|\,e)\,|\,ue-(u\,|\,e)\,|\,ve=U.$$

Wenn man in $w \mid ve = (w \mid e) \mid v - (w \mid v) \mid e$

für w setzt $\mid ue$, so folgt:

$$\mid ue \cdot \mid ve = -(vue) \mid e = (euv) \mid e.$$

Anderseits folgt aus $\mid (e \mid uv) = u(v \mid e) - v(u \mid e)$:

$$- \mid e[\mid e(\mid uv)] = (v \mid e) \mid ue - (u \mid e) \mid ve.$$

Die linke Seite ist aber $= - e(euv) + \mid uv \cdot (e \mid e)$. Daher ist:

$$U = (euv)e - (euv)e + (e \mid e) \mid uv = (e \mid e) \mid uv,$$

also

$$X - Y = 2\lambda \mid \omega \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{\lambda}{2}(e \mid e) \mid (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}),$$

oder weil $\omega \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})$ ist,

$$X - Y = \frac{\lambda}{2}(4 + \varepsilon^2) \mid \omega \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

wenn man mit ε die Länge von e bezeichnet. Es wird also:

$$X = - Y = \frac{\lambda(4 + \varepsilon^2)}{4} \mid \omega \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

und die Vergleichung von 23) und 24) liefert

$$\varrho = - \frac{\lambda(4 + \varepsilon^2)}{2}.$$

Wenn bei zwei kongruenten Tetraedern die besagten Mitte einer Ebene liegen, also

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mu(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \nu(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})$$

ist, so ergeben die Gleichungen 16) und 16*):

$$D_1 - D = A_1 - A + \mu(B_1 - B - A_1 + A) + \nu(C_1 - C - A_1 + \ldots$$

und beide zusammen

$$D = A + \mu(B - A) + \nu(C - A),$$

$$D_1 = A_1 + \mu(B_1 - A_1) + \nu(C_1 - A_1),$$

die aussagen, dass $ABCD$ in einer Ebene liegen.

§ 14.

Die Betrachtungen der §§ 3 und 4 zeigen, dass, wenn Σ Form zweiten Grades ist, die Formel:

25) $$P_1 - P = \mid \omega \frac{P_1 + P}{2} \Sigma$$

eine kongruente Transformation des Raumes darstellt. Um Ausdruck von P_1 durch P aus ihr abzuleiten, nehmen wir a sei in die Normalform:

$$\Sigma = Ua + \lambda \mid e$$

gesetzt, wo e ein Einheitsvektor parallel dem Vektor a und λ eine ist. Dann hat man, da

$$\omega\left(\frac{P_1+P}{2}\,|\,e\right) = |\,e$$

$$P_1 - P = \lambda e + \frac{1}{2}\,|\,\omega P\,U a + \frac{1}{2}\,|\,\omega P_1\,U a,$$

$$P_1 - U = P - U + \lambda e - \frac{1}{2}\,|\,(P-U)a - \frac{1}{2}\,|\,(P_1-U)a.$$

ieraus folgt:

$$a\,|\,(P_1-U) = a\,|\,(P-U) + \lambda a\,|\,e$$

$$P_1 - U) = |\,a(P-U) - \frac{1}{2}\,\{(P-U)(a\,|\,a) - a[a\,|\,(P-U)]\}$$

$$-\frac{1}{2}\,\{(P_1-U)(a\,|\,a) - a[a\,|\,(P_1-U)]\}.$$

rägt man 26) ein, so erhält man

$$= P - U + \lambda e - |\,(P-U)a - \frac{1}{4}(P-U)(a\,|\,a) + \frac{1}{4}\,a[a\,|\,(P-U)]$$

$$-\frac{1}{4}(P_1-U)(a|a) + \frac{1}{4}\,a\{[a|(P-U)] + \lambda(a|e)\}.$$

tzt man die Länge des Vektors a gleich $2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$, so dass

$$a = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\cdot e$$

wird:

$$P_1 - U = P - U + \lambda e - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,|\,(P-U)e - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,(P-U)$$

$$+\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,e(e\,|\,P-U) - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,(P_1-U)$$

$$+\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,e\{[e\,|\,(P-U)] + \lambda\},$$

$$\left\{\begin{aligned} P_1 - U = (P-U)\cos\varphi + \lambda e + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,e(e\,|\,P-U) \\ -\sin\varphi\,|\,(P-U)e \end{aligned}\right.$$

tzt man in dieser Gleichung $\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \mu$ und geht zu orthogonalen naten über, so erhält man aus ihr die bekannten Eulerschen n der Transformation dieser Koordinaten.

ährend die Formel 25) für $\varphi = 180^0$ ihre Giltigkeit verliert, ist i 27) nicht der Fall. Sie liefert vielmehr

$$\frac{P+P_1}{2} = U + \frac{\lambda}{2}\,e + e(e\,|\,P-U)$$

nen Punkt auf der Axe (U, e); und da

$$P_1 - P)\,|\,e = -\,2(P-U)\,|\,e + \lambda(e\,|\,e) + (e\,|\,e)[e\,|\,P-U] = \frac{\lambda}{2},$$

die Projektion von $P_1 - P$ auf die Axe konstant, wie es bei Drehung um 180^0 sein muss.

In Formel 27) kann man schreiben:

$$(P - U)e = \omega U P e,$$

$$U + (P - U)\cos\varphi + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} e(e \mid P - U)$$

$$= P\left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} U + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} e(e \mid P - U$$

$$= P + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}[e(e \mid P - U) - (e \mid e)(P - U)]$$

$$= P + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \mid e[\mid e(P - U)].$$

Also folgt:

$$28)\qquad P_1 = P - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \mid e(\mid \omega U P e) - \sin\varphi \mid \omega U P e + \lambda e,$$

oder, wenn man die Form zweiten Grades Ue mit Π bezei
weil $e = \omega \Pi$ ist,

$$P_1 = P + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \mid (\omega \Pi \cdot \mid \omega P \Pi) + \sin\varphi \mid \omega P \Pi + \lambda \omega \Pi.$$

Betrachtet man nun die allgemeinere Form:

$$29)\qquad P_1' = P + \mid (\omega \Sigma' \cdot \mid \omega P \Sigma') + \tau \mid \omega P \Sigma',$$

wo τ ein Zahlenkoeffizient und Σ' eine Form zweiten Grade
deren Normalform

$$\xi U e + \eta \mid e$$

ist, wo ξ und η Zahlen sind, von denen man ξ positiv annehmen
so wird

$$P_1' = P + \mid (\xi e(\xi \omega P U e + \eta e) + \tau \mid (\xi \omega P U e + \eta \mid e)$$

$$= P + \xi^2 \mid e(\mid \omega P U e) + \tau \xi \mid \omega P U e + \tau \eta e.$$

Die rechte Seite wird mit der von 28) identisch, wenn

$$\xi^2 = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \tau\xi = \sin\varphi, \quad \tau\eta = \lambda.$$

Man kann also den Winder Σ' und die Zahl τ so bestin
dass durch die Formel 29) dieselbe kongruente Transformation
gestellt ist wie durch die Formel 28). Es folgt

$$\xi = \sqrt{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \tau = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \eta = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sec\frac{\varphi}{2}.$$

Es stellt also 29) eine Schraubenbewegung vor, wenn $\xi^2 + \tau^2 =$

§ 15.

Es liegt nahe, unter Σ einen beliebigen Winder verstanden
durch

$$30)\qquad P_1 = P + \varrho \mid (\omega \Sigma \cdot \mid \omega P \Sigma) + \sigma \mid \omega P \Sigma,$$

wo ϱ und σ Zahlen sind, gegebene Raumtransformation zu betra

Ersetzen wir den Punkt P und den ihm entsprechenden P_1 durch nderes Paar von zugeordneten Punkten QQ_1, so folgt:

$$Q_1 - P_1 = Q - P + \varrho \,|\, \omega \Sigma \cdot |\, \omega(Q - P) + \sigma \,|\, \omega(Q - P)\, \Sigma.$$

ei nun, wie oben angenommen, Σ in der Normalform

$$\Sigma = \xi U e + \eta \,|\, e,$$

rd

$$\omega(Q - P)\, \Sigma = \xi(P - Q)e, \quad \omega \Sigma = \xi e;$$

$$Q_1 - P_1 = Q - P + \xi^2 \varrho \,|\, e[\,|\,(P - Q)e] + \sigma \xi \,|\, (P - Q)e$$
$$= Q - P + \xi^2 \varrho [P - Q - e(P - Q \,|\, e)] + \sigma \xi \,|\, (P - Q)e$$
$$|\,(Q_1 - P_1) = |\,(Q - P)(1 - \xi^2 \varrho) - \xi^2 \varrho (P - Q \,|\, e) \,|\, e + \sigma \xi (P - Q)e.$$

ie Multiplikation beider Ausdrücke liefert dann

$$P_1) \,|\, (Q_1 - P_1) = (Q_1 - P_1)^2$$
$$(1 - \xi^2 \varrho)^2 (Q - P)^2 + \xi^2 \varrho (1 - \xi^2 \varrho)(P - Q \,|\, e)^2 + \xi^2 \varrho (1 - \xi^2 \varrho)(P - Q \,|\, e)^2$$
$$+ \xi^4 \varrho^2 (P - Q \,|\, e)^2 - \sigma^2 \xi^2 [(P - Q)^2 - (P - Q \,|\, e)^2]$$
$$[(1 - \xi^2 \varrho)^2 + \xi^2 \sigma^2](Q - P)^2 + [2 \xi^2 \varrho - \sigma^2 \xi^2 - \xi^4 \varrho^2]\,(P - Q) \,|\, e)^2.$$

etzt man

$$1 - \xi^2 \varrho = \lambda \cos \varkappa, \quad \xi \sigma = \lambda \sin \varkappa,$$

nn man dies

$$(Q_1 - P_1)^2 = (Q - P)^2 \cdot \lambda^2 + (1 - \lambda^2)(P - Q \,|\, e)^2$$

ben. Die Formel 30) stellt also nur, wenn $\lambda = 1$ ist, eine konte Transformation vor. Da aber

$$e \,|\, (Q_1 - P_1) = (1 - \xi^2 \varrho)(e \,|\, Q - P) - \xi^2 \varrho (P - Q \,|\, e)$$

$$(P_1 - Q_1) \,|\, e = (P - Q) \,|\, e$$

schreibt sich die letzte Gleichung:

$$(Q_1 - P_1)^2 - (P_1 - Q_1 \,|\, e)^2 = \lambda^2 [(Q - P)^2 - (Q - P \,|\, e)^2].$$

$Q - P)^2 - (Q - P \,|\, e)^2$ ist das Quadrat der Projektion der Strecke PQ ine Ebene, die zum Vector e senkrecht ist. Daher sagt die ung 32) aus, dass die zu e senkrechte Komponente von $P_1 Q_1$ so lang ist als die zu e senkrechte Komponente von PQ, während leichung 31) zeigt, dass die zu e parallelen Komponenten dieser ken gleich sind. Man kann also sagen, dass die Gleichung 30) affine Raumtransformation darstellt, bei der die zu e parallelen nsionen ungeändert bleiben, die zu e senkrechten aber auf ihr nes gedehnt werden, während zugleich eine Schraubung um eine parallele Axe stattfindet.

§ 16.

Im § 9 hatten wir angenommen, dass von den vier Pun $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ keine drei in gerader Linie seien.

Liegen aber die drei $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in gerader Linie, ohne dass zwe sammenfallen, so müssen zu den drei Gleichungen 12) des § 8 die drei

$$(\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|\,d=(\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|\,a,$$
$$(\mathfrak{D}-\mathfrak{B})\,|\,d=(\mathfrak{D}-\mathfrak{B})\,|\,b,$$
$$(\mathfrak{D}-\mathfrak{C})\,|\,d=(\mathfrak{D}-\mathfrak{C})\,|\,c$$

hinzukommen, die aussagen, dass der Punkt D_1 von den drei Pun $A_1B_1C_1$ so weit entfernt ist wie D von ABC.

Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder liegt $\mathfrak{D}$ ebenfalls au Linie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Ist q ein Einheitsvektor dieser Linie, so sagen die obigen Gleichungen aus

$$q\,|\,a=q\,|\,b=q\,|\,c=q\,|\,d=\varrho,$$

nach der Bezeichnung von 13). Setzt man also

$$d=\varrho q+d_1,$$

so muss $q\,|\,d_1=0$ sein. Definiert man dann den Punkt D' durch Gleichung

$$D'=D+2\varrho q,$$

so wird $\frac{D_1+D'}{2}=\mathfrak{D}+\varrho q$ ein Punkt der Axe $(\mathfrak{A},\,q)$ und

$$q\,|\,(D_1-D')=2q\,|\,d=0.$$

Die Schiebung $2\varrho q$ und eventuell die Drehung um 180^0 um Axe $(\mathfrak{A},\,q)$, die nach § 8 ABC in $A_1B_1C_1$ überführen, bringen hiernach auch D mit D_1 zur Deckung.

Liegen aber die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ nicht in derselben Gera so sei (in Übereinstimmung mit § 9) angenommen, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ einer Geraden liegen, die aber $\mathfrak{C}$ nicht enthält. Dann gelten die be letzten Systeme 15) und das 16) und die Vergleichung der schiedenen Ausdrücke des nämlichen Vektors liefert die Beziehun

$$\mathsf{A}=\Sigma+\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$
$$\mathsf{B}=\Sigma+\beta\mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

die für A_1-A, B_1-B und C_1-C dann übereinstimmend Formeln 16), für D_1-D aber

$$D_1-D=|\,\omega\mathfrak{D}\,\Sigma+\alpha\,|\,\omega\,\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$
$$=|\,\omega\mathfrak{D}\,\Sigma+\beta\,|\,\omega\,\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$$

ergeben.

)a $\alpha\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \beta\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ sein muss, kann man beide $= \varrho\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und

$$D_1 - D = |\,\omega\mathfrak{D}\,\Sigma + \varrho\,|\,\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

, wie es in 16** gefunden war.

)ie Betrachtungen der §§ 12 und 13 gelten dann ungeändert, nur letzten $\nu = 0$ zu setzen.

m ersten der beiden Fälle, die in diesem Paragraphen behandelt n, sind die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ kongruent, eine Schraubung giebt, die das eine in das andere überführt. sind im zweiten Falle die Figuren symmetrisch. Daher kann den Satz aussprechen: Wenn von den vier Mittelpunkten 'erbindungslinien entsprechender Ecken von zwei kon- ıten Tetraedern drei in einer geraden Linie liegen, so der vierte auch in dieser Linie. Bei symmetrischen Te- rn gilt ein solcher Satz nicht. Um ihn direkt zu beweisen, ıen wir den Ansatz von § 11, der

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \frac{\lambda}{2}\,|\,\omega(A_1B_1C_1 + ABC)$$

t. Nach § 13 ist aber

$$\omega(A_1B_1C_1 + ABC) = 2[\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + (b-a)(c-a)].$$

Veil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in einer Geraden liegen, ist $\omega\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$ und)$(c-a)$, ist nach Gleichungen 14): $= (b_1 - a_1)(c_1 - a_1)$.

ber die Vektoren $a_1 b_1 c_1$ stehen auf dem Vektor q senkrecht, ist $|(b_1 - a_1)(c_1 - a_1)$ ein mit q paralleler Vektor, den man setzen kann. Damit folgt:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \beta(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \gamma(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + \varkappa\lambda q$$

ɔn Satz beweist.

§ 17.

ie Formeln des vorigen Paragraphen gelten auch dann noch, der Punkt $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ zusammenfällt. Fallen aber von er Punkten drei in $\mathfrak{A}$ zusammen und ist der vierte $\mathfrak{D}$, so sind ei Gleichungen im Beginn des vorigen Paragraphen:

$$\begin{cases} (\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,|\,(d-a) = 0, \\ (\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,|\,(d-b) = 0, \\ (\mathfrak{D} - \mathfrak{A})\,|\,(d-c) = 0. \end{cases}$$

ntweder ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$, oder es sind die drei Vektoren $d-a$, $d-b$, auf $\mathfrak{D} - \mathfrak{A}$ senkrecht und daher komplanar. In diesem zweiten giebt es also drei Zahlen $\alpha\beta\gamma$, so dass

$$\alpha(d-a)+\beta(d-b)+\gamma(d-c)=0$$

ist. Ist $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, so folgt aus dieser Gleichung:

$$D_1-\frac{\alpha A_1+\beta B_1+\gamma C_1}{\alpha+\beta+\gamma}=D-\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Diese beiden gleichen Vektoren seien m genannt. Bezeichnet die beiden Punkte:

$$\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ mit } E,$$

$$\frac{\alpha A_1+\beta B_1+\gamma C_1}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ mit } E_1,$$

so sind E_1 und E entsprechende Punkte der beiden Ebenen A_1 und ABC, die bei kongruenter Transformation in einander überg

Man hat dann

$$\frac{E+E_1}{2}=\mathfrak{A},\quad D_1=E_1+m,\quad D=E+m,\quad \mathfrak{D}=\mathfrak{A}+m.$$

Weil
$$m\,|\,(d-a)=m\,|\,(d-b)=m\,|\,(d-c)=0$$
sein muss, muss auch
$$m\,|\,(b-a)=0,\quad m\,|\,(c-a)=0$$
sein, so dass $m\,\|\,q$ wird. Setzt man weiter:

$$D'=\frac{\alpha A'+\beta B'+\gamma C'}{\alpha+\beta+\gamma}+m=\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}+2\varrho q+m$$
$$=E+2\varrho q+m,$$

so folgt einerseits:

$$D_1-D'=\frac{\alpha(A_1-A')+\beta(B_1-B')+\gamma(C_1-C')}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$=2\frac{\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

mit
$$q\,|\,(D_1-D')=0,$$
anderseits
$$\frac{D_1+D'}{2}=\mathfrak{A}+\varrho q+m.$$

Der Punkt $\frac{D_1+D'}{2}$ ist also auf der Axe $(\mathfrak{A}, q)$ gelegen, d ihm von der Linie $D'D_1$, wenn sie nicht Null ist, senkrecht getr wird, und die in § 8 geschilderte Bewegung führt das Tetr $ABCD$ in $A_1B_1C_1D_1$ über, so dass der oben behandelte Fall de Kongruenz ist. Fällt daher $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammen, so müssen die b Tetraeder symmetrisch sein. Dies ergiebt sich auch aus der Bet tung der Differenz $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ des § 10, die, weil hier

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}=\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}=0$$

ist, sich auf
$$2\mathfrak{A}(bcd-acd+abd-dbc)$$
reduziert. Weil aber
$$d=\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\alpha+\beta+\gamma}$$
ist, folgt:

$$bcd = \frac{\alpha abc}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad acd = -\frac{\beta abc}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$abd = \frac{\gamma abc}{\alpha+\beta+\gamma}$$

amit ergiebt sich:

$$A_1 B_1 C_1 D_1 - ABCD = 0.$$

st $\alpha+\beta+\gamma=0$, so ist $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$, daher die drei Vektoren omplanar. Der Vektor q ist dann auf der Ebene dieser drei ren senkrecht. Aus den Gleichungen 33) folgen

$$(\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|\,(b-a)=0, \quad (\mathfrak{D}-\mathfrak{A})\,|\,(c-a)=0,$$

eigen, dass $\mathfrak{D}-\mathfrak{A}$ zu q parallel ist. Dann liefern die Gleich- 33):

$$q\,|\,d = q\,|\,a = q\,|\,b = q\,|\,c = 0.$$

omit reicht eine Drehung um 180° um die Axe $(\mathfrak{A}, q)$ aus, um D in $A_1 B_1 C_1 D_1$ überzuführen.

§ 18.

ie Sätze der §§ 10, 16, 17 über die Mitten der Strecken, welche echende Ecken von zwei kongruenten oder symmetrischen Tetra- verbinden, ergeben sich auch aus bekannten Eigenschaften der onalen Transformationen mit reellen Koeffizienten, denn jede etrische oder kongruente Raumtransformation ist ja orthogonal. ind

$$\begin{cases} x_1 = A + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y_1 = B + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z_1 = C + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

ransformationsformeln und ξ, η, ζ die Koordinaten der Mitte recke, die den Punkt (xyz) mit seinem entsprechenden $(x_1 y_1 z_1)$ det, so ist:

$$\begin{cases} 2\xi = A + (a_{11}+1)x + a_{12}y + a_{13}z \\ 2\eta = B + a_{21}x + (a_{22}+1)x + a_{23}z \\ 2\zeta = C + a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}+1)z. \end{cases}$$

ie Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = \varphi(s)$$

sogenannte charakteristische Funktion der Substitution 34) s ist bekanntlich:

$$\varphi(0) = \varepsilon = \pm 1,$$

hdem die Transformation kongruent oder symmetrisch ist.

ie Gleichung $\varphi(s)=0$ kann $s=+1$ oder $s=-1$, neben kom- Werten, zu Wurzeln haben. Ist $s=+1$ eine μ fache, $s=-1$ fache Wurzel, so ist:

$$\mu + \nu = 1 \text{ oder } 3$$
$$(-1)^\nu = \varepsilon$$

und für eine $m$fache Wurzel verschwinden in der Determinante $\varphi(s)$ alle Unterdeterminanten $(4-m)^{\text{ten}}$ Grades, während die $(3-m)^{\text{ten}}$ Grades nicht alle Null sind.*

Daher sind folgende Fälle möglich:

$$\varepsilon = +1, \quad \nu = 0 \text{ oder } 2,$$
$$-1, \quad 1 \quad 3.$$

Es ist aber $\varphi(-1)$ die Determinante der Gleichungen 35). Ist also $\nu = 1$, so verschwindet sie; zwischen den Grössen:

$$2\xi - A, \quad 2\eta - B, \quad 2\zeta - C$$

besteht eine lineare Gleichung oder die Mitten der betrachteten Strecken liegen bei symmetrischer Transformation auf einer Ebene.

Bei $\nu = 3$ ist die Transformation ebenfalls symmetrisch, es verschwinden aber alle Determinanten ersten Grades für $s = -1$, d. h. es ist

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1,$$

alle anderen a_{ik} sind Null, daher folgt:

$$2\xi = A, \quad 2\eta = B, \quad 2\zeta = C,$$

oder die Mitten fallen in denselben Punkt.

Bei $\nu = 2$ handelt es sich um kongruente Transformationen, die Unterdeterminanten zweiten Grades verschwinden für $s = -1$, daher bestehen zwischen den Grössen $2\xi - A$, $2\eta - B$, $2\zeta - C$ zwei lineare Gleichungen, und jene Streckenmitten liegen auf einer Linie.

Bei kongruenter Transformation füllen also jene Mittelpunkte entweder den ganzen Raum aus oder sie liegen auf einer Geraden, bei symmetrischer Transformation liegen sie auf einer Ebene oder sie fallen in einen Punkt zusammen.

Diese Sätze ergeben sich auch ohne Schwierigkeit aus den allgemeinen Sätzen über die Überführung eines räumlichen Systems in ein ihm gleiches, die H. Wiener gegeben hat (Berichte d. math.-phys. Klasse d. kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., 1891, Seite 659).

* Stickelberger: Über reelle orthogonale Transformationen. Beilage zum Programm des Polytechnikums, Zürich 1877, Seite VII.

Sur les types les plus généraux d'équations représentables par trois systèmes de cercles ou de droites cotés. Application aux équations quadratiques.

Par

M. d'Ocagne

à Paris.

1. Soient:

$$\alpha_1)\qquad a_1(x^2+y^2)+xf_1+y\varphi_1+\psi_1=0,$$

$$\alpha_2)\qquad a_2(x^2+y^2)+xf_2+y\varphi_2+\psi_2=0,$$

$$\alpha_3)\qquad a_3(x^2+y^2)+xf_3+y\varphi_3+\psi_3=0,$$

les équations de trois systèmes de cercles cotés respectivement au moyen des valeurs des paramètres α_1, α_2 et α_3, équations dans lesquelles f_i, φ_i, ψ_i représentent des fonctions du paramètre $\alpha_i (i=1, 2, 3)$, a_1, a_2, a_3 des constantes qui, en s'annulant, transforment le système de cercles correspondant en un système de droites.

Pour former l'équation en α_1, α_2 et α_3 représentée par l'ensemble de ces trois systèmes cotés il faut éliminer x et y entre ces trois équations. Commençons par éliminer x^2+y^2 entre ces équations prises deux à deux. Cela nous donne

$$\begin{vmatrix} f_1 & a_1 \\ f_2 & a_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_1 & a_1 \\ \varphi_2 & a_2 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_1 & \psi_1 \\ a_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_2 & a_2 \\ f_3 & a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_2 & a_2 \\ \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_2 & \psi_2 \\ a_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_3 & a_3 \\ f_1 & a_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_3 & a_3 \\ \varphi_1 & a_1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_3 & \psi_3 \\ a_1 & \psi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si on additionne ces trois équations après les avoir multipliées respectivement une première fois par φ_1, φ_2, φ_3, et une seconde par f_1, f_2, f_3, on obtient les deux suivantes:

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1' \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_2 & a_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} f_1 & a_1 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si, après avoir posé

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

nous convenons de représenter par D_f, D_φ, D_ψ ce que devie déterminant lorsqu' on y remplace les f_i, les φ_i, ou les ψ_i pa a_i, nous voyons que les équations précédendes peuvent s'écrire:

$$D_\psi x - D_f = 0,$$

$$D_\varphi y - D_\varphi = 0.$$

Portant les valeurs tirées de là dans l'équation α_1) on a

$$a_1(D_f^2 + D_\varphi^2) + D_\psi(f_1 D_f + \varphi_1 D_\varphi + \psi_1 D_\psi) = 0$$

or,

$$f_1 D_f = f_1 \begin{vmatrix} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ 0 & \varphi_2 & \psi_2 \\ 0 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 f_1 & \varphi_2 & \psi_2 \\ 0 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ 0 & \varphi_2 \\ a_3 f_1 & \varphi_3 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_1 D_\varphi = \varphi_1 \begin{vmatrix} f_1 & a_1 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & a_1 \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & 0 & \psi_2 \\ f_3 & 0 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & 0 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 \varphi_1 & \psi_2 \\ f_3 & 0 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & 0 \\ f_2 & 0 \\ f_3 & a_3 \varphi_1 \end{vmatrix}$$

$$\psi_1 D_\psi = \psi_1 \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & 0 \\ f_3 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 0 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \psi_1 \\ f_3 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

d'où en additionnant en colonne

$$f_1 D_f + \varphi_1 D_\varphi + \psi_1 D_\psi = \begin{vmatrix} a_1 f_1 & a_1 \varphi_1 & a_1 \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 f_1 & a_2 \varphi_2 & a_2 \psi_1 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 f_1 & a_3 \varphi_1 & a_3 \psi_1 \end{vmatrix} = a_1 D$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$D_f^2 + D_\varphi^2 + D_\psi D = 0,$$

ou:

$$\left\{\begin{vmatrix} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_1 & a_1 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 & \psi_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.\right.$$

'elle est donc, sous forme symétrique, l'équation en α_1, α_2, α_3 us générale représentable par trois systèmes de cercles cotés $_2)$, $\alpha_3)$. .

upposons que deux de ces systèmes de cercles se réduisent à des nes de droites. Pour cela, faisons $a_1 = a_2 = 0$ et $a_3 = 1$ (puisque différent de zéro). L'équation 1) devient alors:

$$\left\{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \psi_1 & f_1 \\ \psi_2 & f_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0\right.$$

i on pose d'une manière générale:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_1 \end{vmatrix} = |uv|$$

eut s'écrire

$$) \left\{ |\varphi\psi|^2 + |\psi f|^2 + f_3 |f\varphi| \, |\varphi\psi| + \varphi_3 |f\varphi| \, |\psi f| + \psi_3 |f\varphi|^2 = 0.\right.$$

. Examinons dans quels cas, les fonctions f_i, φ_i, ψ_i étant des omes du 1[er] ou du 2[me] degré, la dernière équation écrite pourra uadratique, c'est à dire du second degré par rapport à l'ensemble riables α_1, α_2 et α_3. Pour cela représentons par

λ le degré des polynomes $|\varphi\psi|$ et $|\psi f|$,
μ „ „ „ „ $|f\varphi|$,
ν „ „ „ „ f_3 et φ_3 ,
π „ „ „ „ ψ_3 .

n voit que les deux premiers termes seront du degré 2λ, les suivants du degré $\lambda + \mu + \nu$ et le dernier du degré $2\mu + \pi$. que l'équation soit quadratique il faudra donc que l'on ait

$$2\lambda \leq 2, \quad \lambda + \mu + \nu \leq 2, \quad 2\mu + \pi \leq 2,$$

π ne pouvant d'ailleurs être nuls à la fois puis qu' alors α_3 disrait de l'équation donnée. Ces conditions ne peuvent être réalisées ans les trois hypothèses

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1, \quad \pi = 2,$$
$$\lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad \nu = 1, \quad \pi = 0,$$
$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 2, \quad \pi = 2,$$

onnent respectivement

$$2\lambda = 2, \quad \lambda + \mu + \nu = 2, \quad 2\mu + \pi = 2,$$
$$2\lambda = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 2, \quad 2\mu + \pi = 2.$$

Nous allons faire voir que les deux dernières hypothèses do être écartées. Prenant, en effet, les polynomes f_1, φ_1, ψ_1, f_2, φ_2, premier degré (car s'ils se réduisaient à des constantes les vari α_1 et α_2 disparaitraient de l'équation) cherchons à faire en sorte les polynomes $|\varphi\psi|$ et $|\psi f|$ se réduisent à des constantes. Si posons d'une manière générale:

$$f_i = m_i\alpha_i + n_i, \quad \varphi_i = p_i\alpha_i + q_i, \quad \psi_i = r_i\alpha_i + s_i,$$

nous voyons que la condition requise sera remplie si l'on a

$$3)\qquad m_1 r_2 - m_2 r_1 = 0,$$
$$4)\qquad p_1 r_2 - p_2 r_1 = 0,$$
$$5)\qquad m_1 s_2 - m_2 s_1 = 0,$$
$$6)\qquad n_1 r_2 - n_2 r_1 = 0,$$
$$7)\qquad p_1 s_2 - q_2 r_1 = 0,$$
$$8)\qquad q_1 r_2 - p_2 s_1 = 0.$$

De 3) et 4) on tire

$$9)\qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Si dans 6) et 8) on remplace m_2, p_2, r_2 par les quantités portionnelles tirées de 9), on a

$$10)\qquad n_1 r_1 - m_1 s_1 = 0,$$
$$11)\qquad q_1 r_1 - p_1 s_1 = 0.$$

Les équations 5) et 10) donnent alors

$$\frac{m_1}{r_1} = \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2}{s_2}$$

et de même 7) et 11)

$$\frac{p_1}{r_1} = \frac{q_1}{s_1} = \frac{q_2}{s_2}.$$

Ces deux dernières suites d'égalités donnent à leur tour

$$12)\qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{s_1}{s_2},$$

et

$$13)\qquad \frac{m_1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{r_1}{s_1}.$$

Remplaçant enfin dans cette dernière suite d'égalités m_1, p_1, n_1, q_1, s_1 par les quantités proportionnelles tirées respectivement et de 12), on a

$$14)\qquad \frac{m_2}{n_2} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{r_2}{s_2}.$$

Les trois doubles proportions 9), 13) et 14) constituent un sys qui pourrait être substitué à celui que forment les équations 3) à 8).

Si nous supposons d'abord les divers coefficients non nuls, voyons que les égalités 9) et 12) établissent que les faisceaux α α_2) ont même point de convergence, les égalités 13) et 14) qu

t est à l'infini. Quelles que soient les valeurs attribuées à α_1 et α_2 les droites cotées correspondantes se couperaient en ce point é à l'infini. L'emploi de l'abaque deviendrait illusoire.

Pourrait on maintenant satisfaire au système formé par 9), 13) 4) au moyen de valeurs nulles pour certains coefficients? Une nière manière consisterait à supposer nuls les deux termes d'un rapports entrant dans 9), par exemple $m_1 = m_2 = 0$; mais alors, vertu de 13) et 14) on devrait avoir aussi $n_1 = n_2 = 0$ et les èmes α_1) et α_2) seraient encore parallèles entre eux, hypothèse inissible, comme on vient de le voir.

Une seconde manière consisterait à annuler à la fois les termes orrespondant dans une des doubles proportions, comme

$$m_1 = p_1 = r_1 = 0 \quad \text{ou} \quad n_1 = q_1 = s_1 = 0,$$

alors la variable correspondante α_1 disparaitrait de l'équation.

Les deux hypothèses pour lesquelles $\lambda = 0$ doivent donc être ées, et il ne reste que la première ci-dessus que nous allons ier en détail.

3. La condition $\lambda = 1$ entraine les égalités 3) et 4) ci-dessus ies en 9) d'où on tire encore

$$m_1 p_2 - m_2 p_1 = 0. \qquad)$$

La condition $\mu = 0$ entraine précisément cette égalité 15), plus

$$m_1 q_2 - n_2 p_1 = 0, \qquad)$$

$$n_1 p_2 - m_2 q_1 = 0. \qquad)$$

Remplaçant dans 17) m_2 et p_2 par les quantités proportionnelles s de 9) on a

$$n_1 p_1 - m_1 q_1 = 0. \qquad)$$

De 16) et 18) on tire

$$\frac{m_1}{p_1} = \frac{n_1}{q_1} = \frac{n_2}{q_2}, \qquad)$$

i on tire de là des quantités proportionnelles à n_1 et à q_1 pour orter dans 17) on a

$$n_2 p_2 - m_2 q_2 = 0. \qquad)$$

Les égalités 18) et 20) peuvent être substituées à 16) et 17) former avec 9) l'ensemble des conditions exigées par l'hypothèse 1, $\mu = 0$. Ces égalités expriment que les centres des faisceaux t α_2) sont rejetés à l'infini, mais ici dans des directions différentes.

Supposons que l'on y satisfasse par des valeurs non nulles. On a alors de 19) l'égalité:

$$n_1 q_2 - n_2 q_1 = 0$$

jointe à 15), 16) et 17) montre que $|f\varphi|$ devient identiquet nul, hypothèse inadmissible car alors la variable α_3 n'entrerait dans l'équation 2bis).

On ne peut donc ici satisfaire aux égalité 9), 18) et 20) qu'en prenant
$$m_1 = m_2 = p_1 = p_2 = 0.$$

Comme en outre, les coefficients r_1 et r_2 sont nécessaiment différents de zéro, puisque, s'il n'en était pas ainsi, α_1 et α_2 disparaitraient des équations $\alpha_1)$ et $\alpha_2)$, on pourra prendre $r_1 = r_2 = 1$.

En résumé, l'équation $2^{\text{bis}})$ sera quadratique lorsque à α_1 et à α_2 correspondront les systèmes de droites parallèles

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1)_1 & n_1 x + q_1 y + s_1 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2)_1 & n_2 x + q_2 y + s_2 + \alpha_2 = 0 \end{array}\right\} (\text{avec } n_1 q_2 - n_2 q_1 \neq 0).$$

et à α_3 le système de cercles.

$$\alpha_3)_1 \quad x^2 + y^2 + (m_3\alpha_3 + n_3)x + (p_3\alpha_3 + q_3)y + t_3\alpha_3^2 + r_3\alpha_3 + s_3 = 0.$$

Remarquons que les centres de ces cercles, dont les coordonnées résultent des équations
$$2x + m_3\alpha_3 + n_3 = 0,$$
$$2y + p_3\alpha_3 + \varphi_3 = 0,$$
se trouvent sur la droite
$$2p_3 x - 2m_3 y + n_3 p_3 - m_3 q_3 = 0.$$

L'enveloppe de ces cercles est la conique
$$(m_3 x + p_3 y + r_3)^2 - 4t_3(x^2 + y^2 + n_3 x + q_3 y + s_3) = 0,$$
à laquelle ils sont bitangents, ce qui montre que la droite précédente est un axe de cette conique.

4. On peut se demander si inversement toute équation quadratique telle que

$$\text{Q)} \quad \left\{\begin{array}{l} A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2 + A_3\alpha_3^2 + 2B_1\alpha_2\alpha_3 + 2B_2\alpha_3\alpha_1 + 2B_3\alpha_1\alpha_2 \\ \qquad + 2C_1\alpha_1 + 2C_2\alpha_2 + 2C_3\alpha_3 + D = 0 \end{array}\right.$$

est susceptible d'être ainsi représentée.

Pour nous en rendre compte éliminons α_1 et α_2 entre les équations $\alpha_1)_1$, $\alpha_2)_1$ et Q) et cherchons s'il est possible de déterminer pour les coefficients des deux premières des valeurs réelles telles que l'équation quadratique en x et y résultante représente un cercle.

Si on tire α_1 et α_2 des équations $\alpha_1)_1$ et $\alpha_2)_1$ ci-dessus pour les porter dans l'équation Q), on obtient en égalant entre eux les coefficients des termes en x^2 et y^2 de l'équations obtenue et annulant celui du terme en xy, les équations:

$$A_1 n_1^2 + A_2 n_2^2 + 2B_3 n_1 n_2 = A_1 q_1^2 + A_2 q_2^2 + 2B_3 q_1 q_2,$$
$$A_1 n_1 q_1 + A_2 n_2 q_2 + B_3(n_1 q_2 + n_2 q_1) = 0.$$

De la seconde on tire
$$q_2 = -q_1 \frac{A_1 n_1 + B_3 n^2}{A_2 n_2 + B_3 n_1}.$$

Portant dans la précédente, on trouve, après réduction,
$$q_1^2 = \frac{(A_2 n_2 + B_3 n_1)^2}{A_1 A_2 - B_3^2}.$$

.e numérateur de cette fraction étant positif on voit que la é de q_1 exige

$$A_1 A_2 - B_3^2 > 0.$$

Comme on peut permuter entre eux les indices affectés aux trois bles, on voit que la condition de réalité peut s'exprimer ainsi: ans l'équation Q), les variables α_1, α_2 et α_3 sont con-ées comme les coordonnées courantes d'un point de ace, il faut que la section par l'un des plans de co-nnées de la quadrique définie par cette équation soit enre elliptique.

Supposant la condition remplie on a

$$q_1 = \pm \frac{A_2 n_2 + B_3 n_1}{\sqrt{A_1 A_2 - B_3^2}}$$

ar suite,

$$q_2 = \mp \frac{A_1 n_1 + B_3 n_2}{\sqrt{A_1 A_2 - B_3^2}}.$$

Le choix de n_1 et n_2 est libre, à cette seule réserve près qu'on urait prendre à la fois $n_1 = n_2 = 0$, parce qu' alors q_1 et q_2 étant aussi, les deux faisceaux de droites α_1) et α_2) seraient tout entiers s à l'infini.

Quant à s_1 et s_2, qui n'entrent pas dans les équations de con-, on peut les choisir arbitrairement. Nous prendrous $s_1 = s_2 = 0$. Dès lors, n_1 et n_2 étans quelconques mais non nuls à la fois, q_2 ayant les valeurs 22) et 23), et l'inégalité de condition 21) satisfaite, on pourra représenter l'équation Q) au moyen d'un amme coté ou abaque constitué par les systèmes de droites

$$n_1 x + q_1 y + \alpha_1 = 0,$$

$$n_2 x + q_2 y + \alpha_2 = 0,$$

système de cercles

$$\begin{cases} (A_1 n_1^2 + A_2 n_2^2 + 2 B_3 n_1 n_2)(x^2 + y^2) \\ \quad - 2[(B_1 n_2 + B_2 n_1)\alpha_3 + C_1 n_1 + C_2 n_2]x \\ \quad - 2[(B_1 q_2 + B_2 q_1)\alpha_3 + C_1 q_1 + C_2 q_2]y \\ \quad + A_3 \alpha_3^2 + 2 C_3 \alpha_3 + D = 0. \end{cases}$$

Nous terminerons par la remarque que voici: Puisque les cercles nt leurs centres en ligne droite, on doit pouvoir, en prenant cette connue axe des y, faire en sorte que l'équation de ces cercles ontienne pas de terme en x. Or, il semble ne pas pouvoir en ainsi dans le cas général, puisque nous venons de voir que n_1 et sauraient être nuls à la fois. Mais cette contradiction n'est parente. Il ne faut pas oublier, en effet, que nous avons pris $s_2 = 0$. En rétablissant pour l'un de ces coefficients une valeur onque on verrait que l'on peut en disposer de façon à annuler le cient du terme en x.

5. Le calcul effectué au n° 1 permet encore d'obtenir la form
équations représentables au moyen de trois points cotés pris respe
ment dans trois systèmes $\alpha_1)$, $\alpha_2)$, $\alpha_3)$, et qui se trouvent simu
ment sur un cercle de rayon R tracé sur un transparent mobile

Si, en effet, le point $\alpha_i)$ est défini par les coordonnée

$$x = f_i, \quad y = \varphi_i,$$

où f_i et φ_i désignent, comme précédemment, des fonctions de α_i, o
avoir, en désignant par ξ et η les coordonnées du centre mobil
trois équations:

$$(f_i - \xi)^2 + (\varphi_i - \eta)^2 = R^2 \qquad (i = 1, 2$$

ou

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 f_i \xi - 2 \varphi_i \eta + f_i^2 + \varphi_i^2 - R^2 = 0 \qquad (i = 1, 2$$

Pour éliminer ξ et η entre ces trois équations, il suffit,
avoir posé d'une manière générale

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |a_i b_i c_i|,$$

et en remarquant que

$$|1 \;\; a_i \;\; f_i^2 + \varphi_i^2 - R^2| = |1 \;\; a_i \;\; f_i^2 + \varphi_i^2|,$$

d'appliquer l'équation 1) du n° 1, ce qui donne

$$\overline{|1 \;\; -2\varphi_i \;\; f_i^2 + \varphi_i^2|}^2 + \overline{|-2f_i \;\; 1 \;\; f_i^2 + \varphi_i^2|}^2 + |-2f_i \;\; -2\varphi_i \;\; 1| \, |-2f_i \;\; -2\varphi_i \;\; f_i^2 + \varphi_i^2 - R^2|$$

ou

$$24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \overline{|1 \varphi_i \;\; f_i^2 + \varphi_i^2|}^2 + \overline{|f_i \;\; 1 \;\; f_i^2 + \varphi_i^2|}^2 + 4 |f_i \;\; \varphi_i \;\; 1| \\ & \qquad [|f_i \;\; \varphi_i \;\; f_i^2 + \varphi_i^2| - R^2 |f_i \;\; \varphi_i \;\; 1|] = \end{aligned} \right.$$

qu'on peut encore écrire, en posant

$$f_i^2 + \varphi_i^2 = \psi_i,$$

et employant la notation abrégée du n° 1,

$$D_f^2 + D_\varphi^2 + 4 D_\psi (D - R^2 D_\psi) = 0.$$

En particulier, si les points $\alpha_1)$ et $\alpha_2)$ sont distribués sur
les points $\alpha_3)$ sur Oy, cette équation, toutes réductions faites, pr
forme simple

$$\varphi_3^2 [(f_1 + f_2)^2 - 4R^2] + (\varphi_3^2 - f_1 f_2)^2 = 0.$$

On peut même supposer que le transparent porte une sé
cercles concentriques donc le rayon R soit fonction d'un qua
paramètre α_4. La forme correspondante de l'équation repré
s'obtient en remplaçant R par f_4.

Enfin si R devient infini l'équation 24) se réduit à

$$|f_i \varphi_i \;\; 1| = 0,$$

et on retombe sur la méthode des points alignés que nous avo
nalée ailleurs.*

---

* Nomogaphie, Paris 1891, chap. IV.

ZEITSCHRIFT

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896),
B. WITZSCHEL (1856–1859), M. CANTOR (1859–1896), E. KAHL (1860–1892).

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DR. R. MEHMKE UND DR. M. CANTOR.

43. BAND. 6. HEFT.

MIT 10 TEXTFIGUREN.

Ausgegeben am 25. November 1898.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

KURZGEFASSTE VORLESUNGEN ÜBER VERSCHIEDENE GEBIETE DER HÖHEREN MATHEMATIK.

HERAUSGEGEBEN VON

ROBERT FRICKE.

In 2 Teilen.

I. Teil: Algebra und Geometrie.
II. Teil: Analysis und Funktionentheorie.

gr. 8. In Leinwand gebunden.

Unter dem vorstehend genannten Titel soll eine Reihe von Vorlesungen herausgegeben werden, welche die Kenntnis der einführenden Vorlesungen über darstellende und analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung voraussetzen, und welche ihrerseits über einige sich anschliefsende Gebiete der höheren Mathematik kurze Darstellungen geben wollen, ohne irgendwo in die wissenschaftliche Einzelforschung einzugehen. Die Vorlesungen tragen eine ausgesprochen pädagogische Absicht und wenden sich einmal an solche Studierende des Ingenieurbaufaches und Maschinenbaues, welche eine über das Notwendigste hinausgehende mathematische Ausbildung anstreben. Dieserhalb wird besonderer Nachdruck auf die mathematischen Anwendungen gelegt, welche die Gebiete der Mechanik, Kinematik, Graphostatik, Geodäsie etc. betreffen. Desgleichen bedenken die Vorlesungen die Bedürfnisse der Studierenden der Physik und Astronomie, während sie den Studierenden der Mathematik im engeren Sinne nur den Überblick über einen Teil ihres Faches zu erleichtern vermögen, dagegen das Studium der Spezialvorlesungen um so weniger zu ersetzen imstande sind, als wesentliche Teile der höheren Mathematik, so z. B. Gruppentheorie, Zahlentheorie u. a., hier unberücksichtigt bleiben. Das in Rede stehende Unternehmen ist nach Ziel und Umfang in vieler Hinsicht vergleichbar mit dem jüngst in New-York erschienenen Werke: „Merriman and Woodward, Higher Mathematics, A text-book for classical and engineering colleges", einem Werke, dem die neuere deutsche Lehrbuchlitteratur einstweilen kein Analogon an die Seite zu stellen hat. Die Beachtung, welche das eben genannte Buch auch diesseits des Ozeans gefunden hat, läfst annehmen, dafs die Aufnahme der hiermit angezeigten Vorlesungen eine nicht ungünstige sein wird.

Über die automorphe Transformation einer Summe von Quadraten mit Hilfe infinitesimaler Transformationen und höherer komplexer Zahlen.

Von

Professor Beez

in Plauen i. V.

Schluss.

§ 3.

Die automorphe Transformation einer Summe von vier Quadraten.

Um die Summe von vier Quadraten in sich selbst zu transformieren, hat man in den Gleichungen:

$$
1)\quad \begin{cases}
x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3, \\
x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\
x_2' = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\
x_3' = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3
\end{cases}
$$

die Koeffizienten a_{ik} mit Hilfe von sechs unabhängigen Parametern so zu bestimmen, dass

$$
2)\quad \sum_i a_{i\varkappa}^2 = 1, \quad \sum_i a_{i\varkappa} a_{il} = 0, \qquad i, \varkappa, l = 0, 1, 2, 3.
$$

Die identische Transformation tritt ein bei

$$
a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1, \quad a_{i\varkappa} = 0, \quad i \gtrless \varkappa;
$$

durch Variation der Gleichungen 1) mit Berücksichtigung von 2), bei welchen

$$
\delta a_{ii} = 0, \quad \delta a_{i\varkappa} + \delta a_{\varkappa i} = 0, \quad \varkappa \gtrless i
$$

wird, findet man:

$$
3)\quad \begin{cases}
\delta x_0 = \phantom{-x_0\,\delta a_{01}} x_1\,\delta a_{01} + x_2\,\delta a_{02} + x_3\,\delta a_{03}, \\
\delta x_1 = -x_0\,\delta a_{01} + x_2\,\delta a_{12} + x_3\,\delta a_{13}, \\
\delta x_2 = -x_0\,\delta a_{02} - x_1\,\delta a_{12} + x_3\,\delta a_{23}, \\
\delta x_3 = -x_0\,\delta a_{03} - x_1\,\delta a_{13} - x_2\,\delta a_{23}.
\end{cases}
$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \delta a_{01} &= \lambda_1 \delta t, & \delta a_{02} &= \lambda_2 \delta t, & \delta a_{03} &= \lambda_3 \delta t, \\ & & \delta a_{12} &= \lambda_4 \delta t, & \delta a_{13} &= \lambda_5 \delta t, \\ & & & & \delta a_{23} &= \lambda_6 \delta t, \end{aligned}$$

wo die λ sechs von einander unabhängige Parameter bedeuten, so gehen die Gleichungen 3) über in:

$$4)\qquad \left\{ \begin{aligned} \delta x_0 &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\,\delta t, \\ \delta x_1 &= (-\lambda_1 x_0 + \lambda_4 x_2 + \lambda_5 x_3)\,\delta t, \\ \delta x_2 &= (-\lambda_2 x_0 - \lambda_4 x_1 + \lambda_6 x_3)\,\delta t, \\ \delta x_3 &= -(\lambda_3 x_0 + \lambda_5 x_1 + \lambda_6 x_2)\,\delta t. \end{aligned} \right.$$

Die Variation einer beliebigen Funktion $f(x_0, x_1, x_2, x_3, t)$ ergiebt sich alsdann:

$$5)\qquad \delta f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \right\} \delta t.$$

Hieraus findet sich mit Berücksichtigung von 4) das Symbol der allgemeinen infinitesimalen Transformation φf:

$$6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi f = \frac{df}{dt} &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (-\lambda_1 x_0 + \lambda_4 x_2 + \lambda_5 x_3)\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ &\quad + (-\lambda_2 x_0 - \lambda_4 x_1 + \lambda_6 x_3)\frac{\partial f}{\partial x_2} - (\lambda_3 x_0 + \lambda_5 x_1 + \lambda_6 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_3}, \end{aligned} \right.$$

oder nach den willkürlichen Parametern geordnet:

$$7)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi f &= \lambda_1\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \lambda_2\left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \lambda_3\left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \\ &\quad + \lambda_4\left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \lambda_5\left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) + \lambda_6\left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right). \end{aligned} \right.$$

Die allgemeine infinitesimale Transformation φf ist also aus den folgenden sechs speziellen Transformationen zusammengesetzt:

$$8)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 f &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \varphi_2 f &= x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \varphi_3 f &= x_3 \frac{\partial f}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \varphi_4 f &= x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \varphi_5 f &= x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ \varphi_6 f &= x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}. \end{aligned} \right.$$

Diese sechs infinitesimalen Transformationen bilden eine sechsgliedrige Gruppe, denn für beliebige i und $\varkappa$ ist:

$$(\varphi_i \varphi_k) = \sum_1^6 {}_s c_{iks} \varphi_s,$$

insbesondere:

$$\begin{array}{lllll}
(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_4, & (\varphi_1\varphi_3)=\varphi_5, & (\varphi_1\varphi_4)=-\varphi_2, & (\varphi_1\varphi_5)=-\varphi_3, & (\varphi_1\varphi_6)=0,\\
 & (\varphi_2\varphi_3)=\varphi_6, & (\varphi_2\varphi_4)=\varphi_1, & (\varphi_2\varphi_5)=0, & (\varphi_2\varphi_6)=-\varphi_3,\\
 & & (\varphi_3\varphi_4)=0, & (\varphi_3\varphi_5)=\varphi_1, & (\varphi_3\varphi_6)=\varphi_2,\\
 & & & (\varphi_4\varphi_5)=\varphi_6, & (\varphi_4\varphi_6)=-\varphi_5,\\
 & & & & (\varphi_5\varphi_6)=\varphi_4.
\end{array}$$

Durch sie wird eine sechsgliedrige Gruppe von endlichen Transformationen erzeugt, die nicht mit einander vertauscht werden können, da nicht alle $(\varphi_i\varphi_x)=0$ sind. Zur Auffindung dieser endlichen Transformationen benutzen wir wiederum die drei verschiedenen Methoden, welche wir bereits bei der automorphen Transformation zweier oder dreier Quadrate in Anwendung gebracht haben.

I. Setzen wir $t=1$, so erhalten wir eine kanonische Form der endlichen Transformation:

$$x_i' = x_i + \varphi x_i + \frac{1}{1\cdot 2}\varphi^2 x_i + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi^3 x_i + \cdots$$

Nun ist für $i=0$:

$$10)\ \begin{cases} \varphi x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \\ \varphi^2 x_0 = -(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)x_0 - (\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5)x_1 + (\lambda_1\lambda_4-\lambda_3\lambda_6)x_2 \\ \qquad\qquad + (\lambda_1\lambda_5+\lambda_2\lambda_6)x_3, \\ \varphi^3 x_0 = -h^2\varphi x_0 + f^2\varphi' x_0, \end{cases}$$

worin

$$h^2 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2, \quad f^2 = \lambda_1\lambda_6 - \lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4,$$
$$\varphi' x_0 = \lambda_6 x_1 - \lambda_5 x_2 + \lambda_4 x_3,$$

$$\begin{aligned}
\varphi^4 x_0 &= -h^2\varphi^2 x_0 - f^4 x_0,\\
\varphi^5 x_0 &= (h^4-f^4)\varphi x_0 - h^2 f^2 \varphi' x_0,\\
\varphi^6 x_0 &= (h^4-f^4)\varphi^2 x_0 + h^2 f^4 x_0,\\
\varphi^7 x_0 &= -(h^6-2h^2f^4)\varphi x_0 + (h^4-f^4)f^2\varphi' x_0,\\
\varphi^8 x_0 &= -(h^6-2h^2f^4)\varphi^2 x_0 - (h^4-f^4)f^4 x_0,\\
\varphi^9 x_0 &= (h^8-3h^4f^4+f^8)\varphi x_0 - (h^6-2h^2f^4)f^2\varphi' x_0,\\
\varphi^{10} x_0 &= (h^8-3h^4f^4+f^8)\varphi^2 x_0 + (h^6-2h^2f^4)f^4 x_0.
\end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4-f^4}{5!} - \frac{h^6-2h^2f^4}{7!} + \frac{h^8-3h^4f^4+f^8}{9!} - \cdots &= \alpha,\\
\frac{1}{2!} - \frac{h^2}{4!} + \frac{h^4-f^4}{6!} - \frac{h^6-2h^2f^4}{8!} + \frac{h^8-3h^4f^4+f^8}{10!} - \cdots &= \beta,\\
f^2\left(\frac{1}{3!} - \frac{h^2}{5!} + \frac{h^4-f^4}{7!} - \frac{h^6-2h^2f^4}{9!} + \frac{h^8-3h^4f^4+f^8}{11!} - \cdots\right) &= \gamma,\\
{}^4\left(-\frac{1}{4!} + \frac{h^2}{6!} - \frac{h^4-f^4}{8!} + \frac{h^6-2h^2f^4}{10!} - \frac{h^8-2h^4f^4+f^8}{12!} + \cdots\right) &= \delta,
\end{aligned}$$

so wird:

$$x'_0 = x_0 + \alpha\varphi x_0 + \beta\varphi^2 x_0 + \gamma\varphi' x_0 + \delta x_0,$$

worin φx_0, $\varphi^2 x_0$, $\varphi' x_0$ die in 10) angegebene Bedeutung haben. Durch Einführung dieser Werte wird:

$$11)\quad \begin{cases} x_0' = x_0[1+\delta-\beta(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)] + x_1[\alpha\lambda_1 - \beta(\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5)+\gamma\lambda_6] \\ \quad + x_2[\alpha\lambda_2+\beta(\lambda_1\lambda_4-\lambda_3\lambda_6)-\gamma\lambda_5] + x_3[\alpha\lambda_3+\beta(\lambda_1\lambda_5+\lambda_2\lambda_6)+\gamma\lambda_4]. \end{cases}$$

Setzt man hierin:

$$\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = b,\ \lambda_3 = c,\ \lambda_4 = h,\ \lambda_5 = -g,\ \lambda_6 = f,\ \alpha = -2\omega,\ \gamma = -2\vartheta,$$
$$\omega^2 + a^2 + b^2 + c^2 + h^2 + g^2 + f^2 + \vartheta^2 = 1$$

und nimmt an — was noch zu beweisen ist — dass

$$\beta = 2, \quad \delta = -2\vartheta^2$$

sei, so kommt:

$$12_0)\quad \begin{cases} x_0' = [(\omega^2-\vartheta^2)+(f^2-a^2)+(g^2-b^2)+(h^2-c^2)]x_0 \\ \quad + 2(-a\omega - f\vartheta + cg - bh)x_1 \\ \quad + 2(-b\omega - cf - g\vartheta + ah)x_2 \\ \quad + 2(-c\omega + bf - ag - h\vartheta)x_3. \end{cases}$$

Ebenso erhält man

$$x_1' = x_1 + \alpha\varphi x_1 + \beta\varphi^2 x_1 - \gamma\varphi' x_1 + \delta x_1$$

Setzt man hierin für φx_1, $\varphi^2 x_1$, $\varphi' x_1$ ihre Werte:

$$\begin{cases} \varphi x_1 = -\lambda_1 x_0 + \lambda_4 x_2 + \lambda_5 x_3, \\ \varphi^2 x_1 = -x_0(\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5) - x_1(\lambda_1^2+\lambda_4^2+\lambda_5^2) \\ \quad - x_2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_5\lambda_6) + x_3(-\lambda_1\lambda_3+\lambda_4\lambda_6), \\ \varphi' x_1 = \quad \lambda_6 x_0 - \lambda_3 x_2 + \lambda_2 x_3, \end{cases}$$

so kommt:

$$x_1 = x_0[-\alpha\lambda_1 - \beta(\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5) - \gamma\lambda_6] + x_1[1+\delta-\beta(\lambda_1^2+\lambda_4^2+\lambda_5^2)]$$
$$+ x_2[\alpha\lambda_4 - \beta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_5\lambda_6) + \gamma\lambda_3]$$
$$+ x_3[\alpha\lambda_5 + \beta(-\lambda_1\lambda_3+\lambda_4\lambda_6) - \gamma\lambda_2],$$

und nach Einsetzung der Werte von α, β, γ, δ:

$$12_1)\quad \begin{cases} x_1' = 2(a\omega + f\vartheta - bh + cg)x_0 + [(\omega^2-\vartheta^2)+(f^2-a^2) \\ \quad - (g^2-b^2) - (h^2-c^2)]x_1 \\ \quad + 2(-h\omega + fg - ab - c\vartheta)x_2 + 2(g\omega + fh + b\vartheta - ca)x_3. \end{cases}$$

Desgleichen:

$$x_2' = x_2 + \alpha\varphi x_2 + \beta\varphi^2 x_2 + \gamma\varphi' x_3 + \delta x_2,$$

worin

$$\varphi x_2 = -\lambda_2 x_0 - \lambda_4 x_1 + \lambda_6 x_3,$$
$$\varphi^2 x_2 = (\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6)x_0 - (\lambda_1\lambda_2+\lambda_5\lambda_6)x_1 - (\lambda_2^2+\lambda_4^2+\lambda_6^2)x_2$$
$$- (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_4\lambda_5)x_3,$$
$$\varphi x_2' = \lambda_5 x_0 - \lambda_3 x_1 + \lambda_1 x_3.$$

Iieraus weiter:

$$
)\left\{\begin{aligned}
x'_2 = x_0[-\alpha\lambda_2 &+ \beta(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6) + \gamma\lambda_5] \\
&+ x_1[-\alpha\lambda_4 - \beta(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_5\lambda_6) - \gamma\lambda_3] \\
&+ x_2[1 + \delta - \beta(\lambda_2^2 + \lambda_4^2 + \lambda_6^2)] \\
&+ x_3[\alpha\lambda_6 - \beta(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_4\lambda_5) + \gamma\lambda_1] \\
= 2(b\omega + g\vartheta - cf + ah)x_0 &+ 2(h\omega + fg + c\vartheta - ab)x_1 \\
&+ [(\omega^2 - \vartheta^2) - (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]x_2 \\
&+ 2(-f\omega + gh - bc - a\vartheta)x_3.
\end{aligned}\right.
$$

Endlich:

$$
\begin{aligned}
x'_3 &= x_3 + \alpha\varphi x_3 + \beta\varphi^2 x_3 - \gamma\varphi' x_3 + \delta x_3, \\
\varphi x_3 &= -(\lambda_3 x_0 + \lambda_5 x_1 + \lambda_6 x_2), \\
\varphi^2 x_3 &= (\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6)x_0 + (-\lambda_1\lambda_3 + \lambda_4\lambda_6)x_1 - (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_4\lambda_5)x_2 \\
&\qquad - (\lambda_3^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2)x_3 \\
\varphi' x_3 &= \lambda_4 x_0 - \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2.
\end{aligned}
$$

Dies giebt:

$$
)\left\{\begin{aligned}
x_3' = x_0[-\alpha\lambda_3 &+ \beta(\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6) - \gamma\lambda_4] \\
&+ x_1[-\alpha\lambda_5 + \beta(-\lambda_1\lambda_3 + \lambda_4\lambda_6) + \gamma\lambda_2] \\
&+ x_2[-\alpha\lambda_6 - \beta(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_4\lambda_5) - \gamma\lambda_1] \\
&+ x_3[1 + \delta - \beta(\lambda_3^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2)] \\
= 2(c\omega + h\vartheta - ag + bf)x_0 &+ 2(-g\omega + fh - ac - b\vartheta)x_1 \\
&+ 2(f\omega + gh + a\vartheta - bc)x_2 \\
&+ [(\omega^2 - \vartheta^2) - (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]x_3.
\end{aligned}\right.
$$

Es ist mir nicht gelungen die unendlichen Reihen für α, β, γ, δ schlossene Ausdrücke umzusetzen. Dass $\alpha = -2\omega$, $\gamma = -2\vartheta$ eue überzählige Parameter eingeführt werden, ist jedenfalls ge-.*

Dagegen ist nicht bewiesen, dass $\beta = 2$ und $\delta = -2\vartheta^2$ gesetzt n darf. Zu der Annahme $\beta = 2$ wird man leicht geführt, wenn den speziellen Fall $f = 0$, also auch $\gamma = 0$, $\delta = 0$ in Betracht Dann wird:

$$
\alpha = 1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} - \frac{h^6}{7!} + \cdots = \frac{\sin h}{h}
$$

$$
\beta = \frac{1}{2!} - \frac{h^2}{4!} + \frac{h^4}{6!} + \cdots = \frac{1 - \cos h}{h^2}.
$$

urch Einführung von $\frac{h}{2}$ wird hieraus:

$$
\alpha = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}{h}, \quad \beta = \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}.
$$

---

* Siehe diese Zeitschrift Jahrgang 41, S. 82.

Wenn $\gamma = 0$, $\delta = 0$ ist, so entsteht aus 11):

$$14)\quad \begin{cases} x'_0 = x_0[1-\beta(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)] + x_1[\alpha\lambda_1 - \beta(\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_5)] \\ \qquad + x_2[\alpha\lambda_2 + \beta(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6)] \\ \qquad + x_3[\alpha\lambda_3 + \beta(\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6)]. \end{cases}$$

Führt man in diese Gleichung die Werte von α und β aus 13) ein und setzt:

$$\cos\frac{1}{2}h = -\omega,\quad \frac{\lambda_1}{h}\sin\frac{1}{2}h = a,\quad \frac{\lambda_2}{h}\sin\frac{1}{2}h = b,$$
$$\frac{\lambda_3}{h}\sin\frac{1}{2}h = c,\quad \frac{\lambda_4}{h}\sin\frac{1}{2}h = h,\quad \frac{\lambda_5}{h}\sin\frac{1}{2}h = -g,$$
$$\frac{\lambda_6}{h}\sin\frac{1}{2}h = f,$$

so kommt

$$15)\quad \begin{cases} x'_0 = x_0[1-2(a^2+b^2+c^2)] + 2x_1(-a\omega - bh + cg) \\ \qquad + 2x_2(-b\omega + ah - cf) \\ \qquad + 2x_3(-c\omega - ag + bf)], \end{cases}$$

welche Gleichung auch ohne weiteres aus 14) abgeleitet werden kann, sobald man $\alpha = -2\omega$, $\beta = 2$ darin substituiert. Aus 12_0) entsteht die Gleichung 15), sobald dort $\vartheta = 0$ gesetzt wird.

II. Bei Anwendung der zweiten Integrationsmethode hat man die Differentialgleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_0'}{\lambda_1 x_1'+\lambda_2 x_2'+\lambda_3 x_3'} = \dfrac{dx_1'}{-\lambda_1 x_0'+\lambda_4 x_2'+\lambda_5 x_3'} = \dfrac{dx_2'}{-\lambda_2 x_0'-\lambda_4 x'_1+\lambda_6 x'_3} \\ \qquad = -\dfrac{dx_3'}{\lambda_3 x_0'+\lambda_5 x_1'+\lambda_6 x_2'} = dt \end{cases}$$

so zu integrieren, dass für $t = 0 \ldots x_0' = x_0$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$ werde. Man hat zu diesem Zwecke drei von t unabhängige Integrale aufzustellen, welche zugleich Lösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$2)\quad \begin{cases} (\lambda_1 x_1'+\lambda_2 x_2'+\lambda_3 x_3')\dfrac{\partial f}{\partial x'_0} + (-\lambda_1 x_0' + \lambda_4 x_2' + \lambda_5 x_3')\dfrac{\partial f}{\partial x'_1} \\ \qquad + (-\lambda_2 x_0' - \lambda_4 x_1' + \lambda_6 x_3')\dfrac{\partial f}{\partial x'_2} \\ \qquad - (\lambda_3 x_0' + \lambda_5 x_1' + \lambda_6 x_2')\dfrac{\partial f}{\partial x'_3} = 0 \end{cases}$$

sein werden. Ein solches Integral oder eine solche Lösung ist:

$$3)\qquad x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c.$$

Eine Lösung in linearer Form, etwa

$$4)\qquad e_0 x_0' + e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3' = c',$$

worin die e homogene, symmetrische Funktionen der λ_1 sein müssten, existiert nicht, denn dann wäre:

$$5)\quad \begin{cases} (\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3')e_0 + (-\lambda_1 x_0' + \lambda_4 x_2' + \lambda_5 x_3')e_1 \\ \qquad + (-\lambda_2 x_0' - \lambda_4 x_1' + \lambda_6 x_3')e_2 \\ \qquad - (\lambda_3 x_0' + \lambda_5 x_1' + \lambda_6 x_2')e_3 = 0, \end{cases}$$

folglich müssten die e den Gleichungen:

$$\begin{cases} \cdot & -\lambda_1 e_1 & -\lambda_2 e_2 & -\lambda_3 e_3 = 0, \\ \lambda_1 e_0 & \cdot & -\lambda_4 e_2 & -\lambda_5 e_3 = 0, \\ \lambda_2 e_0 & +\lambda_4 e_1 & \cdot & -\lambda_6 e_3 = 0, \\ \lambda_3 e_0 & +\lambda_5 e_1 & +\lambda_6 e_2 & \cdot \quad = 0 \end{cases}$$

gen, was nur dann möglich ist, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_4 & -\lambda_5 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_6 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_6 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_6 - \lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4)^2 = f^4$$

hwindet. In diesem Falle verschwinden aber auch sämtliche e. heint demnach die Integration der Gleichungen 1), so lange die ntlich von einander unabhängig sind, unmöglich zu sein.

III. Um endlich die dritte Methode der Integration — die Methode D'Alembert — anwenden zu können, hat man das simultane m:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_0'}{dt} = \quad \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3', \\ \dfrac{dx_1'}{dt} = -\lambda_1 x_0' + \lambda_4 x_2' + \lambda_5 x_3', \\ \dfrac{dx_2'}{dt} = -\lambda_2 x_0' - \lambda_4 x_1' + \lambda_6 x_3', \\ \dfrac{dx_3'}{dt} = -\lambda_3 x_0' - \lambda_5 x_1' - \lambda_6 x_2' \end{cases}$$

der Bedingung zu integrieren, dass für $t = 0 \ldots x_0' = x_0,\ x_1' = x_1,$ $x_2,\ x_3' = x_3$ werde. Man setze:

$$u' = e_0 x_0' + e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3'$$

$$\frac{du'}{dt} = \varrho u',$$

e_0, e_1, e_2, e_3 und ϱ noch zu bestimmende Konstante bedeuten.
Aus 3) folgt durch Integration:

$$u' = u'_{t=0} e^{\varrho t},$$

$$e_0 x_0' + e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3' = (e_0 x_0 + e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3) e^{\varrho t}.$$

Durch Berücksichtigung von 2) und 1) geht 3) über in:

$$\begin{aligned} \varrho(e_0 x_0' + e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3') = e_0&(\quad \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3') \\ +e_1&(-\lambda_1 x_0' + \lambda_4 x_2' + \lambda_5 x_3') \\ +e_2&(-\lambda_2 x_0' - \lambda_4 x_1' + \lambda_6 x_3') \\ -e_3&(\quad \lambda_3 x_0' + \lambda_5' x_1' + \lambda_6 x_2'). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn gleichzeitig:

$$6)\quad \begin{cases} \varrho e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0, \\ -\lambda_1 e_0 + \varrho e_1 + \lambda_4 e_2 + \lambda_5 e_3 = 0, \\ -\lambda_2 e_0 - \lambda_4 e_1 + \varrho e_2 + \lambda_6 e_3 = 0, \\ -\lambda_3 e_0 - \lambda_5 e_1 - \lambda_6 e_2 + \varrho e_3 = 0 \end{cases}$$

ist. Damit diese Gleichungen neben einander stattfinden können notwendig, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \varrho & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \varrho & \lambda_4 & \lambda_5 \\ -\lambda_2 & -\lambda_4 & \varrho & \lambda_6 \\ -\lambda_3 & -\lambda_5 & -\lambda_6 & \varrho \end{vmatrix} = \varrho^4 + \varrho^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6 \ldots \\ + (\lambda_1\lambda_6 - \lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4)^2$$

verschwinde. Es gilt daher für ϱ die Gleichung:

$$7)\quad \varrho^4 + \varrho^2 h^2 + f^4 = 0,$$

welche die vier Wurzeln hat:

$$7^*)\quad \varrho = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}}.$$

Die Grössen e_0, e_1, e_2, e_3 stehen dann in dem Verhältnis:

$$8)\quad \begin{cases} e_0 : e_1 : e_2 : e_3 = \varrho^3 + \varrho(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2) : -\lambda_1\varrho^2 + \varrho(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5) - \ldots \\ \qquad : \lambda_2\varrho^2 + \varrho(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6) - \ldots \\ \qquad : -\lambda_3\varrho^2 - \varrho(\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6) - \ldots \end{cases}$$

Setzt man nun in die Gleichung 5) für x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 ihre W…

$$x_0' = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3,$$
$$x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x_3' = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

so kommt wegen der Unabhängigkeit der x von einander:

$$9)\quad \begin{cases} e_0(a_{00} - e^{\varrho t}) + e_1 a_{10} + e_2 a_{20} + e_3 a_{30} = 0 \\ e_0 a_{01} + e_1(a_{11} - e^{\varrho t}) + e_2 a_{21} + e_3 a_{31} = 0 \\ e_0 a_{02} + e_1 a_{12} + e_2(a_{22} - e^{\varrho t}) + e_3 a_{32} = 0 \\ e_0 a_{03} + e_1 a_{13} + e_2 a_{23} + e_3(a_{33} - e^{\varrho t}) = 0 \end{cases}$$

In diese Gleichungen hat man weiter aus 8) die Werte der e … aus 7*) die vier Werte von ϱ einzuführen, so dass man zur Besti… ung der sechzehn Koeffizienten a_{ix} sechzehn Gleichungen erhält. … entsteht aus der ersten Gleichung in 9) zunächst durch Elimina… der e:

$$10)\quad \begin{cases} a_{00}[\varrho^3 + \varrho(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2)] + a_{10}[-\lambda_1\varrho^2 + \varrho(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5) - \ldots \\ \quad + a_{20}[\lambda_2\varrho^2 + \varrho(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_6) - \lambda_5 \ldots \\ \quad + a_{30}[-\lambda_3\varrho^2 - \varrho(\lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_6) - \ldots \\ \quad = e^{\varrho t}[\varrho^3 + \varrho(\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2)]. \end{cases}$$

Setzt man in diese Gleichung nacheinander die Werte der vier eln von ϱ:

$$\varrho_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}},$$

$$\varrho_2 = \sqrt{-\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}},$$

$$\varrho_3 = -\sqrt{\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}},$$

$$\varrho_4 = -\sqrt{-\sqrt{\frac{h^4}{4} - f^4} - \frac{h^2}{2}},$$

hält man zur Bestimmung der vier Koeffizienten $a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{30}$ Gleichungen. Es dürfte sich aber wohl kaum lohnen, die Rech- noch weiter zu führen.

Wenn es nun auch unmöglich erscheint mit Hilfe der infinitesimalen formationen die automorphe Transformation von vier Quadraten facher Weise zu bewerkstelligen, so kann man doch wenigstens ziemlicher Leichtigkeit die endlichen Transformationen zweier in llgemeinen sechsgliedrigen Gruppe 8) enthaltene dreigliedrige gruppen auffinden. Setzt man zur Abkürzung $\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i$, so lassen die sechs speziellen infinitesimalen Transformationen 8) kurz ben:

$$\begin{cases} \varphi_1 = x_1 p_0 - x_0 p_1, & \varphi_4 = x_2 p_1 - x_1 p_2, \\ \varphi_2 = x_2 p_0 - x_0 p_2, & \varphi_5 = x_3 p_1 - x_1 p_3, \\ \varphi_3 = x_3 p_0 - x_0 p_3, & \varphi_6 = x_3 p_2 - x_2 p_3. \end{cases}$$

Man bilde aus ihnen die infinitesimalen Transformationen:

$$\begin{cases} A_1 = \varphi_1 - \varphi_6 = x_1 p_0 - x_0 p_1 - (x_3 p_2 - x_2 p_3), \\ A_2 = \varphi_2 + \varphi_5 = x_2 p_0 - x_0 p_2 + (x_3 p_1 - x_1 p_3), \\ A_3 = \varphi_3 - \varphi_4 = x_3 p_0 - x_0 p_3 - (x_2 p_1 - x_1 p_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 = \varphi_1 + \varphi_6 = x_1 p_0 - x_0 p_1 + (x_3 p_2 - x_2 p_3), \\ B_2 = \varphi_2 - \varphi_5 = x_2 p_0 - x_0 p_2 - (x_3 p_1 - x_1 p_3), \\ B_3 = \varphi_3 + \varphi_4 = x_3 p_0 - x_0 p_3 + (x_2 p_1 - x_1 p_2). \end{cases}$$

Da

$$(A_1 A_2) = -2A_3, \quad (A_1 A_3) = 2A_2, \quad (A_2 A_3) = -2A_1,$$

$$(B_1 B_2) = 2B_3, \quad (B_1 B_3) = -2B_2, \quad (B_2 B_3) = 2B_1,$$

den sowohl A als B eine dreigliedrige Gruppe. Die Trans- ionen der Gruppe A) sind nicht mit einander vertauschbar, wenig die der Gruppe B). Da aber

$$(A_1 B_1) = (A_1 B_2) = (A_1 B_3) = 0,$$

$$(A_2 B_1) = (A_2 B_2) = (A_2 B_3) = 0,$$

$$(A_3 B_1) = (A_3 B_2) = (A_3 B_3) = 0,$$

so sind die Transformationen der Gruppe A) mit denen der Gruppe B) vertauschbar und A) und B) sind reziproke Gruppen. Um die durch A) erzeugten endlichen Transformationen zu finden, bilde man die allgemeine infinitesimale Transformation:

$$A(f) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3,$$

worin λ_1, λ_2, λ_3 die drei wesentlichen Parameter der dreigliedrigen Gruppe darstellen. Es ist also

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} Af = {} & \lambda_1(x_1 p_0 - x_0 p_1 - x_3 p_2 + x_2 p_3) \\ & + \lambda_2(x_2 p_0 - x_0 p_2 + x_3 p_1 - x_1 p_3) \\ & + \lambda_3(x_3 p_0 - x_0 p_3 - x_2 p_1 + x_1 p_2) \\ = {} & (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) p_0 + (-\lambda_1 x_0 - \lambda_3 x_2 + \lambda_2 x_3) p_1 \\ & + (-\lambda_2 x_0 + \lambda_3 x_1 - \lambda_1 x_3) p_2 \\ & + (-\lambda_3 x_0 - \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) p_3. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir nun wieder:

$$x'_0 = x_0 + A x_0 + \frac{A^2 x_0}{2!} + \frac{A^3 x_0}{3!} + \cdots$$

so wird:

$$A x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

$$A^2 x_0 = -h^2 x_0, \quad h^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$A^3 x_1 = -h^2 A x_0, \quad A^4 x_0 = h^4 x_0, \quad A^5 x_0 = h^4 A x_0, \quad A^6 x_0 = -h^6 x_0,$$

folglich:

$$12_1)\qquad x'_0 = x_0 \cos h + x_1 \lambda_1 \frac{\sin h}{h} + x_2 \lambda_2 \frac{\sin h}{h} + x_3 \lambda_3 \frac{\sin h}{h}.$$

Ebenso findet man:

$$12_2)\quad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= -x_0 \lambda_1 \frac{\sin h}{h} + x_1 \cos h - x_2 \lambda_3 \frac{\sin h}{h} + x_3 \lambda_2 \frac{\sin h}{h}, \\ x'_2 &= -x_0 \lambda_2 \frac{\sin h}{h} + x_1 \lambda_3 \frac{\sin h}{h} + x_2 \cos h - x_3 \lambda_1 \frac{\sin h}{h}, \\ x'_3 &= -x_0 \lambda_3 \frac{\sin h}{h} - x_1 \lambda_2 \frac{\sin h}{h} + x_2 \lambda_1 \frac{\sin h}{h} + x_3 \cos h. \end{aligned}\right.$$

Setzt man in diesen Gleichungen:

$$\cos h = a_0, \quad \lambda_1 \frac{\sin h}{h} = -a_1, \quad \lambda_2 \frac{\sin h}{h} = -a_2, \quad \lambda_3 \frac{\sin h}{h} = -a_3,$$

wobei

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

ist, so erhält man die einfachere Form:

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} x_0' &= a_0 x_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3, \\ x_1' &= a_1 x_0 + a_0 x_1 + a_3 x_2 - a_2 x_3, \\ x_2' &= a_2 x_0 - a_3 x_1 + a_0 x_2 + a_1 x_3, \\ x_3' &= a_3 x_0 + a_2 x_1 - a_1 x_2 + a_0 x_3. \end{aligned}\right.$$

Auf dieselbe Weise findet man, dass die endlichen Transformationen der Gruppe B) folgende Gestalt annehmen, wenn man statt $a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots$ b_0, b_1, b_2, b_3 schreibt:

$$14)\quad \begin{cases} x'_0 = b_0x_0 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3, \\ x'_1 = b_1x_0 + b_0x_1 - b_3x_2 + b_2x_3, \\ x'_2 = b_2x_0 + b_3x_1 + b_0x_2 - b_1x_3, \\ x'_3 = b_3x_0 - b_2x_1 + b_1x_2 + b_0x_3, \end{cases}$$

wobei ebenfalls:
$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$$

ist. Man erkennt leicht, dass die Transformationen 13) in die Quaternionengleichung:

$$15)\qquad x' = ax$$

zusammengefasst werden können, wenn

$$a = a_0 + ia_1 + ka_2 + kia_3,$$
$$x = x_0 + ix_1 + kx_2 + kix_3,$$
$$x' = x_0' + ix_1' + kx_2' + kix_3',$$
$$i^2 = k^2 = -1, \qquad ki = -ik$$

gesetzt ist, und ebenso die Gleichungen 14) sich in die eine Gleichung:

$$16)\qquad x' = xb$$

zusammenziehen lassen, worin

$$b = b_0 + ib_1 + kb_2 + kib_3,$$
$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1.$$

Die Transformationen der Gruppe 13) sind nicht mit einander vertauschbar, ebensowenig die der Gruppe 14), wohl aber die Transformationen der Gruppe 13) und 14) untereinander. Denn aus

$$x' = ax,$$
$$x'' = a'x',$$

folgt

$$x'' = a'ax;$$

aus

$$x' = a'x,$$
$$x' = ax',$$

aber

$$x'' = aa'x.$$

Da a und a' nicht vertauschbar sind, so gilt dasselbe auch von der Gruppe 13). Ebenso schliesst man aus der Gleichung 16), da b und b' in dem Produkt bb' sich nicht vertauschen lassen, ohne dass der Wert desselben geändert wird, dass die Transformationen der Gruppe 14) nicht vertauschbar sind. Dagegen hat man, wenn man zuerst die a, dann die b Transformation anwendet:

$$x' = ax,$$
$$x'' = x'b,$$

folglich:

$$x'' = (ax)b$$

und bei umgekehrter Anordnung:

$$x' = xb,$$
$$x'' = ax',$$
also
$$x'' = a(xb),$$
so schliesst man aus dem Umstand, dass
$$(ax)b = a(xb)$$
infolge der Geltung der assoziativen Gesetzes ist, auf die Vertaus keit der Transformationen der Gruppe 13) mit denen der Grup Die beiden Gruppen 13) und 14) sind also reziproke Gruppen

In den Gruppen 13) und 14) treten die Parameter nur un auf. Aus ihnen setzt sich eine Gruppe zusammen, welche ebenfa Summe von vier Quadraten in sich selbst überführt, aber die meter in bilinearer Zusammensetzung enthält. Es ist die Grup

17) $$x' = axb$$

oder ausgeführt:
$$\begin{aligned}
x_0' = {} & (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)x_0 \\
& + (-a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2)x_1 \\
& + (-a_0b_2 + a_1b_3 - a_2b_0 - a_3b_1)x_2 \\
& + (-a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_0)x_3, \\
x_1' = {} & (a_1b_0 + a_0b_1 + a_3b_2 - a_2b_3)x_0 \\
& + (-a_1b_1 + a_0b_0 + a_3b_3 + a_2b_2)x_1 \\
& + (-a_1b_2 - a_0b_3 + a_3b_0 - a_2b_1)x_2 \\
& + (-a_1b_3 + a_0b_2 - a_3b_1 - a_2b_0)x_3, \\
x_2' = {} & (a_2b_0 - a_3b_1 + a_0b_2 + a_1b_3)x_0 \\
& + (-a_2b_1 - a_3b_0 + a_0b_3 - a_1b_2)x_1 \\
& + (-a_2b_2 + a_3b_3 + a_0b_0 + a_1b_1)x_2 \\
& + (-a_2b_3 - a_3b_2 - a_0b_1 + a_1b_0)x_3, \\
x_3' = {} & (a_3b_0 + a_2b_1 - a_1b_2 + a_0b_3)x_0 \\
& + (-a_3b_1 + a_2b_0 - a_1b_3 - a_0b_2)x_1 \\
& + (-a_3b_2 - a_2b_3 - a_1b_0 + a_0b_1)x_2 \\
& + (-a_3b_3 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0)x_3.
\end{aligned}$$

Von dieser Gruppe nicht wesentlich verschieden ist die Gr

17*) $$x' = bxa$$

oder ausgeführt:
$$\begin{aligned}
x_0' = {} & (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)x_0 \\
& + (-a_1b_0 - a_0b_1 - a_3b_2 + a_2b_3)x_1 \\
& + (-a_2b_0 + a_3b_1 - a_0b_2 - a_1b_3)x_2 \\
& + (-a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2 - a_0b_3)x_3, \\
x_1' = {} & (a_1b_0 + a_0b_1 - a_3b_2 + a_2b_3)x_0 \\
& + (a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)x_1 \\
& + (-a_3b_0 - a_2b_1 - a_1b_2 + a_0b_3)x_2 \\
& + (a_2b_0 - a_3b_1 - a_0b_2 - a_1b_3)x_3,
\end{aligned}$$

$$x'_2 = (a_2 b_0 + a_3 b_1 + a_0 b_2 - a_1 b_3) x_0$$
$$+ (a_3 b_0 - a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_0 b_3) x_1$$
$$+ (a_0 b_0 + a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3) x_2$$
$$+ (- a_1 b_0 + a_0 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_3) x_3,$$
$$x'_3 = (a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) x_0$$
$$+ (- a_2 b_0 - a_3 b_1 + a_0 b_2 - a_1 b_3) x_1$$
$$+ (a_1 b_0 - a_0 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2) x_2$$
$$+ (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3) x_3.$$

)ass die Transformationen, welche durch die Gleichung 17) re-
ıtiert werden, eine Gruppe bilden, ist leicht nachzuweisen. Die
ıanderfolge der beiden nach gleichem Gesetz gebildeten Formeln:

$$x' = axb,$$
$$x'' = a'x'b'$$

t:

$$x'' = a'axbb'.$$

)a sowohl $a'a$ als bb' wiederum Quaternionen sind, so kann man
Gleichung auch schreiben:

$$x'' = a''xb''.$$

)ie Transformation 17) hat also die Eigentümlichkeit, zwei von
ler getrennte und verschiedene Parametergruppen zu besitzen,
ch:

$$a'' = a'a$$
$$b'' = bb',$$

enen die erste nach dem Typus 16), die zweite nach dem Typus
ebildet ist. Die Gruppen 17) und 17*) sind nicht wesentlich ver-
en, da man sie durch Vertauschung der Parameter a_i mit den
ıetern b_i in einander überführen kann. Dies ergiebt sich auch
, dass sie gleiche infinitesimale Transformationen besitzen. Es
dieselben, wie die der beiden reziproken Untergruppen 13) und
ıämlich $-A_1$, $-A_2$, $-A_3$, $-B_1$, $-B_2$, $-B_3$, siehe oben S. 285
A) und B). Lässt man auf die Transformation:

$$x' = axb$$
$$x'' = bx'a,$$

ıält man

$$x'' = baxba,$$

Schar von Transformationen, welche die Form:

$$x'' = axa$$

. Man hat also nur in 17) oder 17*) $b = a$ zu setzen, um die
iten Formeln zu erhalten. Sie lauten:

$$(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) x_0 - 2 a_0 a_1 x_1 - 2 a_0 a_2 x_2 - 2 a_0 a_3 x_3,$$
$$2 a_0 a_1 x_0 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) x_1 - 2 a_1 a_2 x_2 - 2 a_1 a_3 x_3,$$
$$2 a_0 a_2 x_0 - 2 a_1 a_2 x_1 + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) x_2 - 2 a_2 a_3 x_3,$$
$$2 a_0 a_3 x_0 - 2 a_1 a_3 x_1 - 2 a_2 a_3 x_2 + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) x_3.$$

Diese Transformationen bilden keine Gruppe, denn die einanderfolge zweier mit den Parametern a und a' giebt, da:

$$x' = axa,$$
$$x'' = a'x'a'$$

ist:

$$x'' = a'axaa',$$

welche Gleichung nicht wieder die Form 18) besitzt, da $a'a$ u verschieden sind. Die infinitesimalen Transformationen sind:

$$\varphi_1(f) = -2x_1\frac{\partial f}{\partial x_0} + 2x_0\frac{\partial f}{\partial x_1},$$
$$\varphi_2(f) = -2x_2\frac{\partial f}{\partial x_0} + 2x_0\frac{\partial f}{\partial x_2},$$
$$\varphi_3(f) = -2x_3\frac{\partial f}{\partial x_0} + 2x_0\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Hieraus findet man die Klammerausdrücke $(\varphi_i\varphi_k)$:

$$(\varphi_1\varphi_2) = 4\left(x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$
$$(\varphi_1\varphi_3) = 4\left(x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_3}\right),$$
$$(\varphi_2\varphi_3) = 4\left(x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

Da dieselben nicht aus φ_1, φ_2, φ_3 linear zusammengesetzt so bilden die letzeren keine Gruppe von infinitesimalen Transformat

Setzt man in den Formeln 17) und 17*):

$$19)\qquad \begin{cases} a_0 = \omega + \vartheta, \\ a_1 = a - f, \\ a_2 = b - g, \\ a_3 = c - h, \\ b_0 = \omega - \vartheta, \\ b_1 = a + f, \\ b_2 = b + g, \\ b_3 = c + h, \end{cases}$$

und berücksichtigt man, dass aus den Gleichungen:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$
$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$$

durch Einführung vorstehender Werte sich ergiebt:

$$19^*)\qquad \begin{cases} \omega^2 + \vartheta^2 + a^2 + f^2 + b^2 + g^2 + c^2 + h^2 = 1, \\ \omega\vartheta - af - bg - ch = 0, \end{cases}$$

so findet man wieder die Formeln 12) und daneben die gleichberecl Transformation:

$x'_0 = [(\omega^2 - \vartheta^2) + (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]x_0 + 2(-a\omega - f\vartheta + bh - cg)x_1$
$+ 2(-b\omega + cf - g\vartheta - ah)x_2 + 2(-c\omega - bf + ag - h\vartheta)x_3,$

$x'_1 = 2(a\omega + f\vartheta + bh - cg)x_0 + [(\omega^2 - \vartheta^2) + (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]x_1$
$+ 2(h\omega + fg - ab + c\vartheta)x_2 + (-g\omega + fh - b\vartheta - ca)x_3,$

$x'_2 = 2(b\omega + g\vartheta + cf - ah)x_0 + 2(-h\omega + fg - c\vartheta - ab)x_1$
$+ [(\omega^2 - \vartheta^2) - (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]x_2 + 2(f\omega + gh - bc + a\vartheta)x_3$

$x'_3 = 2(c\omega + h\vartheta + ag - bf)x_0 + 2(g\omega + hf - ac + b\vartheta)x_1$
$+ 2(-f\omega + gh - a\vartheta - bc)x_2 + [(\omega^2 - \vartheta^2) - (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]x_3$

Noch sei bemerkt, dass

$$\begin{cases} Na \cdot Nb = [(\omega + \vartheta)^2 + (a - f)^2 + (b - g)^2 + (c - h)^2]. \\ \qquad [(\omega - \vartheta)^2 + (a + f)^2 + (b + g)^2 + (c - h)^2] \\ = (\omega^2 + \vartheta^2 + a^2 + f^2 + b^2 + g^2 + c^2 + h^2)^2 \\ - 4(\omega\vartheta - af - bg - hc)^2 = 1 \end{cases}$$

übereinstimmend mit 19).

Die Transformationen 12) (Seite 280/81) und 20) gehen in einander wenn man die Parameter ϑ, f, g, h beziehentlich mit

$$-\vartheta, \quad -f, \quad -g, \quad -h$$

uscht, wobei die Gleichungen 19) bestehen bleiben.

Nimmt man in 17*):

$$b = a_0 - ia_1 - ka_2 - kia_3,$$

rd:

$_0 = x_0,$

$_1 = (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)x_1 + 2(-a_0a_3 + a_1a_2)x_2 + 2(a_0a_2 + a_1a_3)x_3,$

$_2 = 2(a_0a_3 + a_1a_2)x_1 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)x_2 + 2(-a_0a_1 + a_2a_3)x_3,$

$_3 = 2(-a_0a_2 + a_1a_3)x_1 + 2(a_0a_1 + a_2a_3)x_2 + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)x_3.$

Sieht man von der ersten Gleichung ab, oder setzt $a_0 = 0$, so er- man wieder die Eulersche ternäre orthogonale Substitution, bei er ausser dem Nullpunkt der Vektor $a_1 + ia_2 + ka_3$ und die $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ bestehen bleiben. Eine andere Form Transformation wird gefunden, wenn man eine der Grössen b $_i = -a_i$, die übrigen $b_k = a_k$ setzt. Sei z. B. $b_0 = a_0$, $b_1 = -a_1$, $_2$, $b_3 = a_3$, so giebt die Entwickelung des Produktes:

$_0 - ia_1 + ka_2 + kia_3)(x_0 + ix_1 + kx_2 + kix_3)(a_0 + ia_1 + ka_2 + kia_3)$
$= x_0' + ix_1' + kx_2' + kix_3',$

$' = (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)x_0 + 2(-a_0a_2 - a_1a_3)x_2 + 2(-a_0a_3 + a_1a_2)x_3,$

$' = x_1,$

$' = 2(a_0a_2 - a_1a_3)x_0 + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)x_2 + 2(-a_0a_1 - a_2a_3)x_3,$

$' = 2(a_0a_3 + a_1a_2)x_0 + 2(a_0a_1 - a_2a_3)x_2 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)x_3.$

Durch diese Transformation geht der Vektor $a_0 - ia_1 - ka_2$ in den Vektor $a_0 + ia_1 + ka_2$ über. Man kann diese Transformation in die vorhergehende überführen, wenn man x_1 mit x_0, x_3 mit x_2 und dem entsprechend x_1' mit x_0', x_3' mit x_2', ausserdem noch a_1 und a_2 beziehentlich mit $-a_1$ und $-a_2$ vertauscht.

§ 4.

Die automorphe Transformation einer Summe von 8, 6 und 4 Quadraten mit Hilfe der Quaternionen von acht Einheiten.

Sei

$$a = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 + i_1 i_2 a_4 + i_1 i_3 a_5 + i_2 i_3 a_6 + i_1 i_2 i_3 a_7,$$
$$x = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3 + i_1 i_2 x_4 + i_1 i_3 x_5 + i_2 i_3 x_6 + i_1 i_2 i_3 x_7,$$
$$x' = x_0' + i_1 x_1' + i_2 x_2' + i_3 x_3' + i_1 i_2 x_4' + i_1 i_3 x_5' + i_2 i_3 x_6' + i_1 i_2 i_3 x_7'.$$

Setzt man die acht Einheiten dieser Zahlen der Reihe nach gleich $e_0, e_1 \cdots e_7$, so lässt sich, wenn

$$i_l^2 = -1, \quad i_l i_m = -i_m i_l$$

angenommen wird, folgende Multiplikationstafel aufstellen:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	$\bar{0}$	4	5	$\bar{2}$	$\bar{3}$	7	$\bar{6}$
2	2	$\bar{4}$	$\bar{0}$	6	1	$\bar{7}$	$\bar{3}$	5
3	3	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	7	1	2	$\bar{4}$
4	4	2	$\bar{1}$	7	$\bar{0}$	6	$\bar{5}$	$\bar{3}$
5	5	3	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	4	2
6	6	7	3	$\bar{2}$	5	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
7	7	$\bar{6}$	5	$\bar{4}$	$\bar{3}$	2	$\bar{1}$	0

Bildet man nun zunächst das Produkt:

1) $$x' = ax$$

und setzt die Koeffizienten gleicher Einheiten auf beiden Seiten gleich, nimmt überdies an, dass die Grössen a den beiden Bedingungen:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = 1$$

und

$$a_0 a_7 - a_1 a_6 + a_2 a_5 - a_3 a_4 = 0$$

entsprechen, so erhält man zur Transformation der Summe von 8 Quadraten in sich selbst die Formeln:

$$\left\{\begin{aligned}
x_0' &= a_0 x_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 - a_4 x_4 - a_5 x_5 - a_6 x_6 + a_7 x_7,\\
x_1' &= a_1 x_0 + a_0 x_1 - a_4 x_2 - a_5 x_3 + a_2 x_4 + a_3 x_5 - a_7 x_6 - a_6 x_7,\\
x_2' &= a_2 x_0 + a_4 x_1 + a_0 x_2 - a_6 x_3 - a_1 x_4 + a_7 x_5 + a_3 x_6 + a_5 x_7,\\
x_3' &= a_3 x_0 + a_5 x_1 + a_6 x_2 + a_0 x_3 - a_7 x_4 - a_1 x_5 - a_2 x_6 - a_4 x_7,\\
x_4' &= a_4 x_0 - a_2 x_1 + a_1 x_2 - a_7 x_3 + a_0 x_4 - a_6 x_5 + a_5 x_6 - a_3 x_7,\\
x_5' &= a_5 x_0 - a_3 x_1 + a_7 x_2 + a_1 x_3 + a_6 x_4 + a_0 x_5 - a_4 x_6 - a_2 x_7,\\
x_6' &= a_6 x_0 - a_7 x_1 - a_3 x_2 + c_2 x_3 - a_5 x_4 + a_4 x_5 + a_0 x_6 - a_1 x_7,\\
x_7' &= a_7 x_0 + a_6 x_1 - a_5 x_2 + a_4 x_3 + a_3 x_4 - a_2 x_5 + a_1 x_6 + a_0 x_7.
\end{aligned}\right.$$

ine zweite Transformation erhält man aus der Gleichung:

$$x' = xb,$$

$$b = b_0 + i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3 + i_1 i_2 b_4 + i_1 i_3 b_5 + i_2 i_3 b_6 + i_1 i_2 i_3 b_7,$$

zugleich $$b^2_0 + b^2_1 + b^2_2 + b^2_3 + b^2_4 + b^2_5 + b^2_6 + b^2_7 = 1,$$

$$b_0 b_7 - b_1 b_6 + b_2 b_5 - b_3 b_4 = 0$$

t wird, nämlich

$$\left\{\begin{aligned}
x_0' &= b_0 x_0 - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3 - b_4 x_4 - b_5 x_5 - b_6 x_6 + b_7 x_7,\\
x_1' &= b_1 x_0 + b_0 x_1 + b_4 x_2 + b_5 x_3 - b_2 x_4 - b_3 x_5 - b_7 x_6 - b_6 x_7,\\
x_2' &= b_2 x_0 - b_4 x_1 + b_0 x_2 + b_6 x_3 + b_1 x_4 + b_7 x_5 - b_3 x_6 + b_5 x_7,\\
x_3' &= b_3 x_0 - b_5 x_1 - b_6 x_2 + b_0 x_3 - b_7 x_4 + b_1 x_5 + b_2 x_6 - b_4 x_7,\\
x_4' &= b_4 x_0 + b_2 x_1 - b_1 x_2 - b_7 x_3 + b_0 x_4 + b_6 x_5 - b_5 x_6 - b_3 x_7,\\
x_5' &= b_5 x_0 + b_3 x_1 + b_7 x_2 - b_1 x_3 - b_6 x_4 + b_0 x_5 + b_4 x_6 + b_2 x_7,\\
x_6' &= b_6 x_0 - b_7 x_1 + b_3 x_2 - b_2 x_3 + b_5 x_4 - b_4 x_5 + b_0 x_6 - b_1 x_7,\\
x_7' &= b_7 x_0 + b_6 x_1 - b_5 x_2 + b_4 x_3 + b_3 x_4 - b_2 x_5 + b_1 x_6 + b_0 x_7.
\end{aligned}\right.$$

ie Transformationen 1) bilden eine Gruppe, denn zwei aufeinander de geben eine Transformation von derselben Art:

$$x' = ax,$$

$$x'' = a'x',$$

$$x' = a'ax$$

$$x = a''x.$$

ie Parametergruppe: $$a'' = a'a$$

enso zusammengesetzt, wie die Gruppe $x' = ax$. Zwei Trans- ionen der Gruppe 1*) sind nicht vertauschbar, da die Faktoren des ktes $a'a$ nicht vertauschbar sind, ohne dass der Wert des Pro- geändert wird. Ebenso ist es mit den Transformationen 2*). en sind die Transformationen der Gruppe 1*) mit denen der e 2*) vertauschbar. Denn lässt man auf die a Transformation

$$x' = ax$$

Transformation folgen, so ergiebt sich:

$$x'' = (ax)b;$$

verfährt man umgekehrt, so erhält man:

$$x'' = a(xb);$$

da das assoziative Gesetz besteht, so ist

$$(ax)b = a(xb).$$

Beide Gruppen sind sechsgliedrig und enthalten ausser den sechs wesentlichen Parametern noch zwei überzählige. Beide Transformationen enthalten die Parameter unilinear. Um die bilineare Form zu gewinnen, hat man die Gruppe:

$$3) \qquad x' = axb$$

zu bilden. Ist

$$x'' = a'x'b',$$

so kommt:

$$x'' = (a'a)x(bb').$$

Es existieren also zwei verschiedene Parametergruppen:

$$3^*) \qquad a'' = a'a, \quad b'' = bb',$$

in welchen die Parameter a und b vollständig getrennt auftreten.

Die Entwickelung von $x' = axb$ ergiebt nun:

$$\begin{aligned}
x_0' = (&\ \ a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 + a_7b_7)x_0 \\
+ (&- a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_4 + a_3b_5 - a_4b_2 - a_5b_3 + a_6b_7 + a_7b_6)x_1 \\
+ (&- a_0b_2 - a_1b_4 - a_2b_0 + a_3b_6 + a_4b_1 - a_5b_7 - a_6b_3 - a_7b_5)x_2 \\
+ (&- a_0b_3 - a_1b_5 - a_2b_6 - a_3b_0 + a_4b_7 + a_5b_1 + a_6b_2 + a_7b_4)x_3 \\
+ (&- a_0b_4 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_7 - a_4b_0 + a_5b_6 - a_6b_5 + a_7b_3)x_4 \\
+ (&- a_0b_5 + a_1b_3 - a_2b_7 - a_3b_1 - a_4b_6 - a_5b_0 + a_6b_4 - a_7b_2)x_5 \\
+ (&- a_0b_6 + a_1b_7 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_0 + a_7b_1)x_6 \\
+ (&\ \ a_0b_7 + a_1b_6 - a_2b_5 + a_3b_4 + a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1 + a_7b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1' = (&\ \ a_1b_0 + a_0b_1 - a_4b_2 - a_5b_3 + a_2b_4 + a_3b_5 - a_7b_6 - a_6b_7)x_0 \\
+ (&- a_1b_1 + a_0b_0 + a_4b_4 + a_5b_5 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_7b_7 - a_6b_6)x_1 \\
+ (&- a_1b_2 + a_0b_4 - a_4b_0 + a_5b_6 - a_2b_1 + a_3b_7 - a_7b_3 + a_6b_5)x_2 \\
+ (&- a_1b_3 + a_0b_5 - a_4b_6 - a_5b_0 - a_2b_7 - a_3b_1 + a_7b_2 - a_6b_4)x_3 \\
+ (&- a_1b_4 - a_0b_2 - a_4b_1 + a_5b_7 + a_2b_0 - a_3b_6 - a_7b_5 - a_6b_3)x_4 \\
+ (&- a_1b_5 - a_0b_3 - a_4b_7 - a_5b_1 + a_2b_6 + a_3b_0 + a_7b_4 + a_6b_2)x_5 \\
+ (&- a_1b_6 - a_0b_7 + a_4b_3 - a_5b_2 - a_2b_5 + a_3b_4 - a_7b_0 - a_6b_1)x_6 \\
+ (&\ \ a_1b_7 - a_0b_6 - a_4b_5 + a_5b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 + a_7b_1 - a_6b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2' = (&\ \ a_2b_0 + a_4b_1 + a_0b_2 - a_6b_3 - a_1b_4 + a_7b_5 + a_3b_6 + a_5b_7)x_0 \\
+ (&- a_2b_1 + a_4b_0 - a_0b_4 + a_6b_5 - a_1b_2 + a_7b_3 - a_3b_7 + a_5b_6)x_1 \\
+ (&- a_2b_2 + a_4b_4 + a_0b_0 + a_6b_6 + a_1b_1 + a_7b_7 + a_3b_3 - a_5b_5)x_2 \\
+ (&- a_2b_3 + a_4b_5 + a_0b_6 - a_6b_0 + a_1b_7 - a_7b_1 - a_3b_2 + a_5b_4)x_3 \\
+ (&- a_2b_4 - a_4b_2 + a_0b_1 + a_6b_7 - a_1b_0 - a_7b_6 + a_3b_5 + a_5b_3)x_4 \\
+ (&- a_2b_5 - a_4b_3 + a_0b_7 - a_6b_1 - a_1b_6 + a_7b_0 - a_3b_4 - a_5b_2)x_5 \\
+ (&- a_2b_6 - a_4b_7 - a_0b_3 - a_6b_2 + a_1b_5 + a_7b_4 + a_3b_0 + a_5b_1)x_6 \\
+ (&\ \ a_2b_7 - a_4b_6 + a_0b_5 + a_6b_4 + a_1b_3 + a_7b_2 - a_3b_1 + a_5b_0)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3' = (\quad & a_3 b_0 + a_5 b_1 + a_6 b_2 + a_0 b_3 - a_7 b_4 - a_1 b_5 - a_2 b_6 - a_4 b_7) x_0 \\
+ (- & a_3 b_1 + a_5 b_0 - a_6 b_4 - a_0 b_5 - a_7 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_7 - a_4 b_6) x_1 \\
+ (- & a_3 b_2 + a_5 b_4 + a_6 b_0 - a_0 b_6 + a_7 b_1 - a_1 b_7 - a_2 b_3 + a_4 b_5) x_2 \\
+ (- & a_3 b_3 + a_5 b_5 + a_6 b_6 + a_0 b_0 + a_7 b_7 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_4 b_4) x_3 \\
+ (- & a_3 b_4 - a_5 b_2 + a_6 b_1 - a_0 b_7 - a_7 b_0 + a_1 b_6 - a_2 b_5 - a_4 b_3) x_4 \\
+ (- & a_3 b_5 - a_5 b_3 + a_6 b_7 + a_0 b_1 - a_7 b_6 - a_1 b_0 + a_2 b_4 + a_4 b_2) x_5 \\
+ (- & a_3 b_6 - a_5 b_7 - a_6 b_3 + a_0 b_2 + a_7 b_5 - a_1 b_4 - a_2 b_0 - a_4 b_1) x_6 \\
+ (\quad & a_3 b_7 - a_5 b_6 + a_6 b_5 - a_0 b_4 + a_7 b_3 - a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_4 b_0) x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4' = (\quad & a_4 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 - a_7 b_3 + a_0 b_4 - a_6 b_5 + a_5 b_6 - a_3 b_7) x_0 \\
+ (- & a_4 b_1 - a_2 b_0 - a_1 b_4 + a_7 b_5 + a_0 b_2 - a_6 b_3 - a_5 b_7 - a_3 b_6) x_1 \\
+ (- & a_4 b_2 - a_2 b_4 + a_1 b_0 + a_7 b_6 - a_0 b_1 - a_6 b_7 + a_5 b_3 + a_3 b_5) x_2 \\
+ (- & a_4 b_3 - a_2 b_5 + a_1 b_6 - a_7 b_0 - a_0 b_7 + a_6 b_1 - a_5 b_2 - a_3 b_4) x_3 \\
+ (- & a_4 b_4 + a_2 b_2 + a_1 b_1 + a_7 b_7 + a_0 b_0 + a_6 b_6 + a_5 b_5 - a_3 b_3) x_4 \\
+ (- & a_4 b_5 + a_2 b_3 + a_1 b_7 - a_7 b_1 + a_0 b_6 - a_6 b_0 - a_5 b_4 + a_3 b_2) x_5 \\
+ (- & a_4 b_6 + a_2 b_7 - a_1 b_3 - a_7 b_2 - a_0 b_5 - a_6 b_4 + a_5 b_0 - a_3 b_1) x_6 \\
+ (\quad & a_4 b_7 + a_2 b_6 + a_1 b_5 + a_7 b_4 - a_0 b_3 - a_6 b_2 - a_5 b_1 - a_3 b_0) x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_5' = (\quad & a_5 b_0 - a_3 b_1 + a_7 b_2 + a_1 b_3 + a_6 b_4 + a_0 b_5 - a_4 b_6 + a_2 b_7) x_0 \\
+ (- & a_5 b_1 - a_3 b_0 - a_7 b_4 - a_1 b_5 + a_6 b_2 + a_0 b_3 + a_4 b_7 + a_2 b_6) x_1 \\
+ (- & a_5 b_2 - a_3 b_4 + a_7 b_0 - a_1 b_6 - a_6 b_1 + a_0 b_7 - a_4 b_3 - a_2 b_5) x_2 \\
+ (- & a_5 b_3 - a_3 b_5 + a_7 b_6 + a_1 b_0 - a_6 b_7 - a_0 b_1 + a_4 b_2 + a_2 b_4) x_3 \\
+ (- & a_5 b_4 + a_3 b_2 + a_7 b_1 - a_1 b_7 + a_6 b_0 - a_0 b_6 - a_4 b_5 + a_2 b_3) x_4 \\
+ (- & a_5 b_5 + a_3 b_3 + a_7 b_7 + a_1 b_1 + a_6 b_6 + a_0 b_0 + a_4 b_4 - a_2 b_2) x_5 \\
+ (- & a_5 b_6 + a_3 b_7 - a_7 b_3 + a_1 b_2 - a_6 b_5 + a_0 b_4 - a_4 b_0 + a_2 b_1) x_6 \\
+ (\quad & a_5 b_7 + a_3 b_6 + a_7 b_5 - a_1 b_4 - a_6 b_3 + a_0 b_2 + a_4 b_1 + a_2 b_0) x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_6' = (\quad & a_6 b_0 - a_7 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_5 b_4 + a_4 b_5 + a_0 b_6 - a_1 b_7) x_0 \\
+ (- & a_6 b_1 - a_7 b_0 + a_3 b_4 - a_2 b_5 - a_5 b_2 + a_4 b_3 - a_0 b_7 - a_1 b_6) x_1 \\
+ (- & a_6 b_2 - a_7 b_4 - a_3 b_0 - a_2 b_6 + a_5 b_1 + a_4 b_7 + a_0 b_3 + a_1 b_5) x_2 \\
+ (- & a_6 b_3 - a_7 b_5 - a_3 b_6 + a_2 b_0 + a_5 b_7 - a_4 b_1 - a_0 b_2 - a_1 b_4) x_3 \\
+ (- & a_6 b_4 + a_7 b_2 - a_3 b_1 - a_2 b_7 - a_5 b_0 - a_4 b_6 + a_0 b_5 - a_1 b_3) x_4 \\
+ (- & a_6 b_5 + a_7 b_3 - a_3 b_7 + a_2 b_1 - a_5 b_6 + a_4 b_0 - a_0 b_4 + a_1 b_2) x_5 \\
+ (- & a_6 b_6 + a_7 b_7 + a_3 b_3 + a_2 b_2 + a_5 b_5 + a_4 b_4 + a_0 b_0 - a_1 b_1) x_6 \\
+ (\quad & a_6 b_7 + a_7 b_6 - a_3 b_5 - a_2 b_4 + a_5 b_3 + a_4 b_2 - a_0 b_1 - a_1 b_0) x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_7' = (\quad & a_7 b_0 + a_6 b_1 - a_5 b_2 + a_4 b_3 + a_3 b_4 - a_2 b_5 + a_1 b_6 + a_0 b_7) x_0 \\
+ (- & a_7 b_1 + a_6 b_0 + a_5 b_4 - a_4 b_5 + a_3 b_2 - a_2 b_3 - a_1 b_7 + a_0 b_6) x_1 \\
+ (- & a_7 b_2 + a_6 b_4 - a_5 b_0 - a_4 b_6 - a_3 b_1 - a_2 b_7 + a_1 b_3 - a_0 b_5) x_2 \\
+ (- & a_7 b_3 + a_6 b_5 - a_5 b_6 + a_4 b_0 - a_3 b_7 + a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_0 b_4) x_3 \\
+ (- & a_7 b_4 - a_6 b_2 - a_5 b_1 - a_4 b_7 + a_3 b_0 + a_2 b_6 + a_1 b_5 + a_0 b_3) x_4 \\
+ (- & a_7 b_5 - a_6 b_3 - a_5 b_7 + a_4 b_1 + a_3 b_6 - a_2 b_0 - a_1 b_4 - a_0 b_2) x_5 \\
+ (- & a_7 b_6 - a_6 b_7 + a_5 b_3 + a_4 b_2 - a_3 b_5 - a_2 b_4 + a_1 b_0 + a_0 b_1) x_6 \\
+ (\quad & a_7 b_7 - a_6 b_6 - a_5 b_5 - a_4 b_4 - a_3 b_3 - a_2 b_2 - a_1 b_1 + a_0 b_0) x_7,
\end{aligned}$$

Die vorstehenden Formeln vereinfachen sich bedeutend, wenn $b = a$ angenommen wird. In diesem Falle ergiebt die Ausführung des Produktes:

$$4) \qquad x' = axa,$$

$$\begin{aligned}
x_0' = &(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_0 + 2(-a_0a_1 + a_6a_7)x_1 \\
&+ 2(-a_0a_2 - a_5a_7)x_2 + 2(-a_0a_3 + a_4a_7)x_3 + 2(-a_0a_4 + a_3a_7)x_4 \\
&+ 2(-a_0a_5 - a_2a_7)x_5 + 2(-a_0a_6 + a_1a_7)x_6 \\
&+ 2(a_0a_7 + a_1a_6 - a_2a_5 + a_3a_4)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1' = &2(a_1a_0 - a_6a_7)x_0 + (-a_1^2 + a_0^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_7^2 - a_6^2)x_1 \\
&+ 2(-a_1a_2 + a_5a_6)x_2 + 2(-a_1a_3 - a_4a_6)x_3 + 2(-a_1a_4 - a_3a_6)x_4 \\
&+ 2(-a_1a_5 + a_2a_6)x_5 + 2(-a_1a_6 - a_0a_7 - a_2a_5 + a_3a_4)x_6 \\
&+ 2(a_1a_7 - a_0a_6)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2' = &2(a_2a_0 + a_5a_7)x_0 + 2(-a_2a_1 + a_5a_6)x_1 \\
&+ (-a_2^2 + a_4^2 + a_0^2 + a_6^2 + a_1^2 + a_7^2 + a_3^2 - a_5^2)x_2 + 2(-a_2a_3 + a_4a_5)x_3 \\
&+ 2(-a_2a_4 + a_3a_5)x_4 + 2(-a_2a_5 - a_3a_4 + a_0a_7 - a_1a_6)x_5 \\
&+ 2(-a_2a_6 + a_1a_5)x_6 + 2(a_2a_7 + a_0a_5)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3' = &2(a_3a_0 - a_4a_7)x_0 + 2(-a_3a_1 - a_4a_6)x_1 + 2(-a_3a_2 + a_4a_5)x_2 \\
&+ (-a_3^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_0^2 + a_7^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_4^2)x_3 \\
&+ 2(-a_3a_4 - a_2a_5 + a_1a_6 - a_0a_7)x_4 + 2(-a_3a_5 + a_2a_4)x_5 \\
&+ 2(-a_3a_6 - a_1a_4)x_6 + 2(a_3a_7 - a_0a_4)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4' = &2(a_4a_0 - a_3a_7)x_0 + 2(-a_4a_1 - a_3a_6)x_1 + 2(-a_4a_2 + a_3a_5)x_2 \\
&+ 2(-a_4a_3 + a_1a_6 - a_0a_7 - a_2a_5)x_3 \\
&+ (-a_4^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_7^2 + a_0^2 + a_6^2 + a_5^2 - a_3^2)x_4 \\
&+ 2(-a_4a_5 + a_2a_3)x_5 + 2(-a_4a_6 - a_1a_3)x_6 + 2(a_4a_7 - a_0a_3)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_5' = &2(a_5a_0 + a_2a_7)x_0 + 2(-a_5a_1 + a_2a_6)x_1 \\
&+ 2(-a_5a_2 - a_3a_4 + a_0a_7 - a_1a_6)x_2 \\
&+ 2(-a_5a_3 + a_2a_4)x_3 + 2(-a_5a_4 + a_2a_3)x_4 \\
&+ 2(-a_5^2 + a_3^2 + a_7^2 + a_1^2 + a_6^2 + a_0^2 + a_4^2 - a_2^2)x_5 \\
&+ 2(-a_5a_6 + a_1a_2)x_6 + 2(a_5a_7 + a_0a_2)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_6' = &2(a_6a_0 - a_1a_7)x_0 + 2(-a_6a_1 + a_3a_4 - a_2a_5 - a_0a_7)x_1 \\
&+ 2(-a_6a_2 + a_1a_5)x_2 + 2(-a_6a_3 - a_1a_4)x_3 + 2(-a_6a_4 - a_1a_3)x_4 \\
&+ 2(-a_6a_5 + a_1a_2)x_5 + (-a_6^2 + a_7^2 + a_3^2 + a_2^2 + a_5^2 + a_4^2 + a_0^2 - a_1^2)x_6 \\
&+ 2(a_6a_7 - a_0a_1)x_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_7' = &2(a_7a_0 + a_6a_1 - a_5a_2 + a_4a_3)x_0 + 2(-a_7a_1 + a_0a_6)x_1 \\
&+ 2(-a_7a_2 - a_0a_5)x_2 + 2(-a_7a_3 + a_0a_4)x_3 + 2(-a_7a_4 + a_0a_3)x_4 \\
&+ 2(-a_7a_5 - a_0a_2)x_5 + 2(-a_7a_6 + a_0a_1)x_6 \\
&+ (a_7^2 - a_6^2 - a_5^2 - a_4^2 - a_3^2 - a_2^2 - a_1^2 + a_0^2)x_7.
\end{aligned}$$

Die Transformationen, welche durch die Gleichung $x' = axa$ repräsentiert werden, bilden keine Gruppe und sind auch nicht mit

einander vertauschbar. Denn die Aufeinanderfolge zweier mit den Parametern a und a' giebt:

$$x' = axa$$

$$x'' = a'x'a'$$

5) $$x'' = a'axaa'.$$

Da die Produkte $a'a$ und aa' verschieden sind, so lässt sich dieser Gleichung nicht die Gestalt:

$$x'' = a''xa''$$

geben und die Vertauschung von a' mit a ändert den Wert des Produktes 5).

Durch anderweite Spezialisierung von b kann man leicht die Formeln erhalten, vermöge welcher eine Summe von sechs Quadraten in sich übergeführt wird. Sei

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2, \quad b_3 = -a_3, \quad b_4 = -a_4,$$
$$b_5 = -a_5, \quad b_6 = -a_6, \quad b_7 = a_7$$

und bedeuten a, x, x' (wie oben S. 292) Quaternionen von 8 Einheiten, so ist also

5) $$x' = ax\frac{1}{a}.$$

Die Entwickelung giebt:

$$\begin{aligned}
x_0' &= (a^2_0 + a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 + a^2_5 + a^2_6 + a^2_7)x_0 \\
&= x_0, \\
x'_1 &= (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)x_1 \\
&+ 2(-a_0a_4 + a_1a_2 + a_3a_7 - a_5a_6)x_2 \\
&+ 2(-a_0a_5 + a_1a_3 - a_2a_7 + a_4a_6)x_3 \\
&+ 2(a_0a_2 + a_1a_4 + a_3a_6 + a_5a_7)x_4 \\
&+ 2(a_0a_3 + a_1a_5 - a_2a_6 - a_4a_7)x_5 \\
&+ 2(-a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 - a_3a_4)x_6, \\
x_2' &= 2(a_0a_4 + a_1a_2 - a_3a_7 - a_5a_6)x_1 \\
&+ (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_2 \\
&+ 2(-a_0a_6 + a_1a_7 + a_2a_3 - a_4a_5)x_3 \\
&+ 2(-a_0a_1 + a_2a_4 - a_3a_5 + a_6a_7)x_4 \\
&+ 2(a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4)x_5 \\
&+ 2(a_0a_3 - a_1a_5 + a_2a_6 - a_4a_7)x_6, \\
x_3' &= 2(a_0a_5 + a_1a_3 + a_2a_7 + a_4a_6)x_1 \\
&+ 2(a_0a_6 - a_1a_7 + a_2a_3 - a_4a_5)x_2 \\
&+ (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_3 \\
&+ 2(-a_0a_7 - a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4)x_4 \\
&+ 2(-a_0a_1 - a_2a_4 + a_3a_5 + a_6a_7)x_5 \\
&+ 2(-a_0a_2 + a_1a_4 + a_3a_6 - a_5a_7)x_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x'_4 = {} & 2(-a_0a_2 + a_1a_4 + a_3a_6 - a_5a_7)x_1 \\
& + 2(a_0a_1 + a_2a_4 - a_3a_5 - a_6a_7)x_2 \\
& + 2(-a_0a_7 - a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4)x_3 \\
& + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_4 \\
& + 2(-a_0a_6 + a_1a_7 - a_2a_3 + a_4a_5)x_5 \\
& + 2(a_0a_5 + a_1a_3 + a_2a_7 + a_4a_6)x_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x'_5 = {} & 2(-a_0a_3 + a_1a_5 - a_2a_6 + a_4a_7)x_1 \\
& + 2(a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4)x_2 \\
& + 2(a_0a_1 - a_2a_4 + a_3a_5 - a_6a_7)x_3 \\
& + 2(a_0a_6 - a_1a_7 - a_2a_3 + a_4a_5)x_4 \\
& + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 + a_7^2)x_5 \\
& + 2(-a_0a_4 - a_1a_2 + a_3a_7 + a_5a_6)x_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x'_6 = {} & 2(-a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 - a_3a_4)x_1 \\
& + 2(-a_0a_3 - a_1a_5 + a_2a_6 + a_4a_7)x_2 \\
& + 2(a_0a_2 + a_1a_4 + a_3a_6 + a_5a_7)x_3 \\
& + 2(-a_0a_5 + a_1a_3 - a_2a_7 + a_4a_6)x_4 \\
& + 2(a_0a_4 - a_1a_2 - a_3a_7 + a_5a_6)x_5 \\
& + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)x_6.
\end{aligned}$$

Da x_7 aus den Formeln herausfällt und $x'_7 = 0$ wird, so kann man zwar die Transformation:

$$x' = ax\frac{1}{a},$$

worin a, x, x' Quaternionen von 8 Einheiten bedeuten, als eine automorphe Transformation von 7 Quadraten ansehen. Da aber für $x_0 = 0$ auch $x'_0 = 0$ wird, so reduziert sich dieselbe auf eine Transformation von 6 Quadraten in sich selbst. Die Gruppeneigenschaft desselben erhellt sofort aus obiger Gleichung.

Denn die Aufeinanderfolge zweier Transformationen:

$$x' = ax\frac{1}{a},$$

$$x'' = a'x'\frac{1}{a'}$$

ergiebt:

$$x'' = a'ax\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'}$$

$$= a''x\frac{1}{a''}.$$

Da a' und a nicht vertauschbar sind, so gilt dasselbe auch von den Transformationen der Gruppe. Die Parametergruppe lautet:

$$a'' = a'a.$$

Die identische Transformation tritt ein bei $a = 1$ oder $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0 \ldots a_7 = 0$. Die inverse Transformation wird dargestellt durch die Gleichung:

$$x' = \frac{1}{a}xa.$$

Für $x = a$ wird $x' = a$ und für $x = \frac{1}{a}$ x' ebenfalls $= \frac{1}{a}$. Dies besagt, dass bei der Transformation $x' = ax\frac{1}{a}$ der Punkt:

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \ldots x_7 = a_7$$

unverändert bleibt, ebenso aber auch der Punkt:

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = -a_1 \ldots x_6 = -a_6, \quad x_7 = a_7.$$

Endlich kann auch die automorphe Transformation von 4 Quadraten aus der Gleichung 1) abgeleitet werden.

Setzen wir nämlich in derselben:

$$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$

und zugleich $\quad b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad b_3 = a_3,$

dagegen $\quad b_4 = -a_4, \quad b_5 = -a_5, \quad b_6 = -a_6, \quad b_7 = -a_7,$

so verschwinden auch die Koeffizienten von x_0, x_1, x_2, x_3 in der Entwickelung von x_4', x_5', x_6', x_7', und es bleibt:

$$\begin{aligned}
x_0' = {} & (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_7^2)x_0 \\
& + 2(-a_0a_1 - a_2a_4 - a_3a_5 - a_6a_7)x_1 \\
& + 2(-a_0a_2 + a_1a_4 - a_3a_6 + a_5a_7)x_2 \\
& + 2(-a_0a_3 + a_1a_5 + a_2a_6 - a_4a_7)x_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1' = {} & 2(a_0a_1 - a_2a_4 - a_3a_5 + a_6a_7)x_0 \\
& + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 + a_7^2)x_1 \\
& + 2(-a_0a_4 - a_1a_2 - a_3a_7 - a_5a_6)x_2 \\
& + 2(-a_0a_5 - a_1a_3 + a_2a_7 + a_4a_6)x_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2' = {} & 2(a_0a_2 + a_1a_4 - a_3a_6 - a_5a_7)x_0 \\
& + 2(a_0a_4 - a_1a_2 + a_3a_7 - a_5a_6)x_1 \\
& + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 - a_7^2)x_2 \\
& + 2(-a_0a_6 - a_1a_7 - a_2a_3 - a_4a_5)x_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3' = {} & 2(a_0a_3 + a_1a_5 + a_2a_6 + a_4a_7)x_0 \\
& + 2(a_0a_5 - a_1a_3 - a_2a_7 + a_4a_6)x_1 \\
& + 2(a_0a_6 + a_1a_7 - a_2a_3 - a_4a_5)x_2 \\
& + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2)x_3.
\end{aligned}$$

Diese Transformationen werden in der Gleichung

$$x' = ax\bar{a} \tag{6}$$

zusammengefasst, worin $\bar{a}$ aus a auf die oben angegebene Weise entsteht. Setzt man hierin:

$$a_0 = \omega, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c,$$
$$a_4 = h, \quad a_5 = -g, \quad a_6 = f, \quad a_7 = \vartheta,$$

so erhält man die Transformation § 3, 12), die Transformation § 3, 20) dagegen, sobald man:

$$a_0 = \omega, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c,$$
$$a_4 = -h, \quad a_5 = g, \quad a_6 = -f, \quad a_7 = -\vartheta$$

einführt. Die Transformationen 12) und 20) sind invers zu denje welche man nach der Cayleyschen Methode beziehentlich au schiefen Determinanten:

$$B = \begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix}$$

und

$$B = \begin{vmatrix} \omega & -a & -b & -c \\ a & \omega & -h & g \\ b & h & \omega & -f \\ c & -g & f & \omega \end{vmatrix}$$

ableitet. Die inverse Transformation findet man einfach durch tauschung von ω mit $-\omega$ und ϑ mit $-\vartheta$. Es ergiebt sic sehr leicht aus den Quaternionendarstellungen, die wir für die ternäre orthogonale Substitution aufgestellt haben. Die eine lau

$$x' = [(\omega + \vartheta) + i(a - h) + k(b - g) + ki(c - f)]$$
$$\cdot (x_0 + ix_1 + kx_2 + kix_3)$$
$$\cdot [(\omega - \vartheta) + i(a + h) + k(b + g) + ki(c + f)].$$

Die hierzu inverse Transformation ist:

$$x' = [(\omega + \vartheta) - i(a - h) - k(b - g) - ki(c - f)]$$
$$\cdot (x_0 + ix_1 + kx_2 + kix_3)$$
$$\cdot [(\omega - \vartheta) - i(a + h) - k(b + g) - ki(c + f)].$$

Multipliziert man dieses Produkt rechts- und linksseitig mi so erhält man wieder die ursprüngliche Form, nur dass ω - $-(\omega + \vartheta)$ und $\omega - \vartheta$ in $-(\omega - \vartheta)$ übergegangen ist. Die Quaternionendarstellung hatte die Form:

$$x' = (\omega + i_1 a + i_2 b + i_3 c + i_1 i_2 h - i_1 i_3 g + i_2 i_3 f + i_1 i_2 i_3$$
$$\cdot (x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3)$$
$$\cdot (\omega + i_1 a + i_2 b + i_3 c - i_1 i_2 h + i_1 i_3 g - i_2 i_3 f - i_1 i_2 i_3$$

Hierzu ist die inverse Transformation:

$$x' = (\omega - i_1 a - i_2 b - i_3 c - i_1 i_2 h + i_1 i_3 g - i_2 i_3 f - i_1 i_2 i_3$$
$$\cdot (x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3)$$
$$\cdot (\omega - i_1 a - i_2 b - i_3 c + i_1 i_2 h - i_1 i_3 g + i_2 i_3 f + i_1 i_2 i_3 \vartheta)$$

Multipliziert man auch hier die beiden äusseren Faktoren mi so erhält man die ursprüngliche Form wieder, nur dass darin ω und ϑ, $-\omega$ und $-\vartheta$ auftreten.

uch die Parametergruppe der Euler-Cayleyschen quaternären
;onalen Substitution lässt sich mit Hilfe von Quaternionen über-
ch darstellen. Die Gruppe 17) in § 3:

$$x' = axb$$

e beiden getrennten Parametergruppen:

$$a'' = a'a \quad \text{und} \quad b'' = bb'.$$

iese Gleichungen geben nach bekannten Regeln entwickelt:

$$\begin{aligned}
a_0'' &= a_0'a_0 - a_1'a_1 - a_2'a_2 - a_3'a_3,\\
a_1'' &= a_1'a_0 + a_0'a_1 + a_3'a_2 - a_2'a_3,\\
a_2'' &= a_2'a_0 - a_3'a_1 + a_0'a_2 + a_1'a_3,\\
a_3'' &= a_3'a_0 + a_2'a_1 - a_1'a_2 + a_0'a_3\\
b_0'' &= b_0'b_0 - b_1'b_1 - b_2'b_2 - b_3'b_3,\\
b_1'' &= b_1'b_0 + b_0'b_1 - b_3'b_2 + b_2'b_3,\\
b_2'' &= b_2'b_0 + b_3'b_1 + b_0'b_2 - b_1'b_3,\\
b_3'' &= b_3'b_0 - b_2'b_1 + b_1'b_2 + b_0'b_3.
\end{aligned}$$

etzt man hierin

$$\begin{aligned}
&a_0 = \varpi + \vartheta, \quad a_1 = a - f, \quad a_2 = b - g, \quad a_3 = c - h,\\
&b_0 = \varpi - \vartheta, \quad b_1 = a + f, \quad a_2 = b + g, \quad b_3 = c + h,
\end{aligned}$$

benso die entsprechenden Werte für a'_i, a''_i und b'_i, b''_i, so er-
sich für die acht Parameter folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varpi'' &= \varpi'\varpi - a'a - b'b - c'c - h'h - g'g - f'f + \vartheta'\vartheta,\\
a'' &= a'\varpi + \varpi'a - h'b + b'h + g'c - c'g - \vartheta'f - f'\vartheta,\\
b'' &= b'\varpi + \varpi'b + h'a - a'h - f'c + c'f - \vartheta'g - g'\vartheta,\\
c'' &= c'\varpi + \varpi'c - g'a + a'g + f'h - h'f - \vartheta'h - h'\vartheta,\\
h'' &= h'\varpi + \varpi'h + a'b - b'a + f'g - g'f - \vartheta'c - c'\vartheta,\\
g'' &= g'\varpi + \varpi'g + c'a + a'c - f'h + h'f - \vartheta'b - b'\vartheta,\\
f'' &= f'\varpi + \varpi'f - c'b + b'c + g'h - h'g - \vartheta'a - a'\vartheta,\\
\vartheta'' &= \vartheta'\varpi + \varpi'\vartheta + f'a + a'f + g'b + b'g + h'c + g'h.
\end{aligned}$$

an erkennt leicht, dass diese acht Gleichungen sich in die eine
nionengleichung zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned}
&(\varpi'' + i_1a'' + i_2b'' + i_3c'' + i_1i_2h'' - i_1i_3g'' + i_2i_3f'' + i_1i_2i_3\vartheta'')\\
&(\varpi' + i_1a' + i_2b' + i_3c' + i_1i_2h' - i_1i_3g' + i_2i_3f' + i_1i_2i_3\vartheta')\\
&(\varpi + i_1a + i_2b + i_3c + i_1i_2h - i_1i_3g + i_2i_3f + i_1i_2i_3\vartheta),
\end{aligned}$$

nach dem Typus 1):

$$x' = ax$$

t ist und also die Parametergruppe der in Rede stehenden
-Cayleyschen Transformation darstellt. Schreibt man sie in
gekürzten Form:

6*) $$a'' = a' a$$

wie oben S. 294, Gleichung 3*), so kann man der zweiten Par
gruppe $b'' = b b'$ der Transformation 6) die Gestalt:

6**) $$\bar{a}'' = \bar{a}\,\bar{a}'$$

geben. Beide Gruppen sind identisch; die Entwickelung der Gleichu
liefert dieselbe Transformation wie 6*).

Lässt man auf die Transformation $x' = a x \bar{a}$ eine zweite
so ergiebt sich
$$x'' = a' a x \bar{a}\,\bar{a}',$$
oder
$$x'' = a'' x \bar{a}'',$$
woraus folgt, dass $x' = a x \bar{a}$ den Gruppencharakter besitzt. I
scheinbar zwei Parametergruppen vorhanden, nämlich:
$$a'' = a' a$$
und
$$\bar{a}'' = \bar{a}\,\bar{a}'.$$

Da diese Gleichungen aber nach dem Vorigen dieselben
formationen liefern, so reduzieren sich dieselben auf eine
Parametergleichung, in der sämtliche Parameter auftreten.

Zum Schluss mag noch einer sehr einfachen Klasse vo
morphen Transformationen gedacht werden, welche zwar keinen G
charakter besitzen, aber dafür ohne Schwierigkeit für jede beliebi
von Quadraten aufgestellt werden können. Bedeuten a und x V
von n Einheiten, deren Produkte nicht auf die ursprüngliche
heiten zurückgeführt werden können, sei also z. B.:
$$a = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + \cdots + i_{n-1} a_{n-1},$$
$$x = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + \cdots + i_{n-1} x_{n-1},$$
worin $i_1\, i_2 \ldots i_{n-1}$ primitive imaginäre Einheiten sind, für welc
die Bedingungen:
$$i_p^{\,2} = -1, \quad i_q i_p = -\, i_p i_q$$
existieren, so lässt sich erweisen, dass das Produkt:
$$x' = a x a$$
wiederum ein Vektor ist, indem sämtliche Produkte, die $i_p i_q$ un
enthalten, verschwinden.

Es findet sich nämlich zu jedem Produkt:
$$a_0 (i_r\, x_r)(i_s a_s)$$
ein zweites entgegengesetzt gleiches
$$(i_s a_s)(i_r x_r) a_0,$$
ebenso zu
$$(i_r a_r) x_0 (i_s a_s)$$
ein entgegengesetzt gleiches:
$$(i_s a_s) x_0 (i_r a_r)$$
und drittens zu

$$(i_p a_p)(i_r x_r)(i_s a_s)$$

ein entgegengesetzt gleiches:

$$(i_s a_s)(i_r x_r)(i_p a_p),$$

da $i_s i_r = - i_r i_s$, $i_p i_r i_s = - i_s i_r i_p$ ist.

Für $n = 2, 3, 4, 5$ erhält man folgende Transformationsgleichungen, deren Bildungsgesetz ohne Mühe erkannt wird:

$$n = 2, \quad a_0^2 + a_1^2 = 1,$$
$$x_0' = (a_0^2 - a_1^2)x_0 - 2a_0 a_1 x_1,$$
$$x_1' = 2a_0 a_1 x_0 + (a^2_0 - a^2_1)x_1,$$
$$n = 3, \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1,$$
$$x_0' = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2)x_0 - 2a_0 a_1 x_1 - 2a_0 a_2 x_2,$$
$$x_1' = 2a_0 a_1 x_0 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2)x_1 - 2a_1 a_2 x_2,$$
$$x_2' = 2a_0 a_2 x_0 - 2a_1 a_2 x_1 + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2)x_2,$$

$n = 4$ siehe oben,

$$n = 5, \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1,$$
$$x_0' = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)x_0 - 2a_0 a_1 x_1 - 2a_0 a_2 x_2 - 2a_0 a_3 x_3 - 2a_0 a_4 x_4,$$
$$x_1' = 2a_0 a_1 x_0 + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)x_1 - 2a_1 a_2 x_2 - 2a_1 a_3 x_3 - 2a_1 a_4 x_4,$$
$$x_2' = 2a_0 a_2 x_0 - 2a_1 a_2 x_1 + (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)x_2 - 2a_2 a_3 x_3 - 2a_2 a_4 x_4,$$
$$x_3' = 2a_0 a_3 x_0 - 2a_1 a_3 x_1 - 2a_2 a_3 x_2 + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2)x_3 - 2a_3 a_4 x_4,$$
$$x_5' = 2a_0 a_4 x_0 - 2a_1 a_4 x_1 - 2a_2 a_4 x_2 - 2a_3 a_4 x_3 + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)x_4.$$

Diese Transformationen bilden mit Ausnahme der **ersten** keine Gruppen. Denn die Aufeinanderfolge zweier solcher Transformationen:

$$x' = axa$$

und

$$x'' = a'x'a'$$

giebt:

$$x'' = a'axaa'.$$

Die Produkte $a'a$ und aa' sind für $n > 2$ keine Vektoren, auch ist $a'a$ nicht gleich aa'. Deshalb giebt es für diese Transformationen auch keine Parametergleichung.

Bemerkenswerteste Druckfehler der ersten beiden Teile.

Seite 67 Zeile 4 v. u. lies: $\frac{a_{00} - a_{11}}{a_{01}} = \frac{b_{00} - b_{11}}{b_{01}}$.

„ 69 „ 7 v. o. lies: 11).

„ 69 „ 19 v. u. lies: $x_1' = x_1$.

„ 71 „ 2 v. o. lies: $-x_1 \sin(\overline{t_4 - t_3} + \overline{t_2 - t_1})$.

„ 72 „ 12 v. o. lies: $-l \sin t$.

„ 74 Formel 23*) lies: $\frac{dx_0'}{dt} = -x_1'$, $\frac{dx_1'}{dt} = x_0'$.

Seite 74 Zeile 12 v. u. lies: $\left(\frac{d^3 x_0'}{dt^3}\right)_0 = x_1, \quad \left(\frac{d^4 x_0'}{dt^4}\right)_0 = x_0.$

„ 75 „ 4 v. o. lies: $\varphi t.$

„ 75 Formel 27) lies: $x_0'^2 + x_1'^2 = c^2.$

„ 75 „ 28) lies: $\arc \sin \frac{x_0'}{c} + t = c'.$

„ 76 „ 32) lies: $\frac{du'}{dt}.$

„ 77 Zeile 9 v. o. lies: $\varrho_2 a_{00}.$

„ 77 „ 12 v. o. lies: $\varrho_2 a_{01}.$

„ 77 Formel 37, 2) lies: $-a_{01} = a_{10}$ etc.

„ 79 Zeile 14 v. u. lies: $x' = xb.$

„ 79 „ 1 v. u. lies: $(b_0^2 - b_{12}^2) x_1.$

„ 121 „ 8 v. u. ist zur Determinante der Exponent 2 zu setzen.

„ 121 „ 3 v. u. lies: $a_{00} = a_{11} = a_{22} = 1.$

„ 123 Formel 7*, 2) lies: $\varphi^2 x_0 = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) x_0 + \lambda_0 \lambda_1 x_1 + \lambda_0 \lambda_2 x_2.$

„ 124 Zeile 1 v. o. lies: $x_0 \left(\lambda_0 \lambda_1 \frac{1 - \cos h t}{h^2} - \lambda_2 \frac{\sin h t}{h}\right)$ etc.

„ 124 „ 3 v. o. lies: $x_0 \left(\lambda_0 \lambda_2 \frac{1 - \cos h t}{h^2} + \lambda_1 \frac{\sin h t}{h}\right)$ etc.

„ 124 „ 9 v. o. lies: $\lambda_1 = -y_1, \quad \lambda_2 = -z_1.$

„ 126 „ 1 v. o. lies: $\zeta_{ki}.$

„ 126 „ 14 v. o. lies: $\frac{H^2}{t^2}.$

„ 127 „ 4 v. o. lies: $t = 1.$

„ 129 „ 14 v. u. lies: $\mp \frac{\lambda_1 \sqrt{M}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}.$

„ 129 Formel 7) lies:

$$\lambda_2 x_1' - \lambda_1 x_2' = \sqrt{M} = \sqrt{[c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - c_1^2 - h^2 x_0'^2 + 2 c_1 \lambda_0 x_0]}.$$

„ 129 Zeile 3 v. u. ändere den Nenner dementsprechend ab.

„ 132 „ 9 v. o. lies: 8).

Über elliptische Anamorphose in der dioptrischen Abbildung.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

Die dioptrischen und katoptrischen Abbildungen von Objekten durch centrierte, sphärische Flächensysteme unter Voraussetzung der bekannten Gaussschen Beschränkungen reduzieren sich in den Handbüchern der Optik meistens auf die Konstruktion und Berechnung der Bildgrössen sehr kleiner geradliniger senkrecht zur Centrale stehender, axialer oder paraxialer Objekte. Da aber in Wirklichkeit die Bilder von realen Objekten ebenfalls Raumgebilde sind, wie es die Erfahrung im Gebrauche der Fernrohre lehrt, indem diese den Tiefendimensionen des Raumes akkommodiert werden müssen, so scheint es von Interesse, die Theorie der Abbildung in dieser Richtung zu erweitern. Die Dimensionen und Koordinaten sind mit Rücksicht auf die von uns gemachte Annahme der Gaussschen Beschränkungen im allgemeinen von der Ordnung der Kleinheit der Differentiale ∂r, $\partial \vartheta$, ∂x, ∂y, ∂z u. s. w.; in der Regel aber erweitert man dieselben noch so weit zu endlichen Grössen, als sie noch die Bedingung erfüllen, dass sie sehr klein gegen die Abscissen x_0, x_1 und die Krümmungsradien $r_1, r_2, \ldots$ der brechenden Flächen sind, sowie dass die Glieder höherer Ordnung ebenfalls gegen die der ersten Ordnung der Kleinheit verschwinden. Die mathematische Behandlung des vorgesetzten Problems kann demgemäss mit Anwendung der Differentialrechnung geschehen. Indem wir die Kenntnis der Theorie der geometrischen oder graphischen Dioptrik von Systemen centrierter Flächen voraussetzen, schicken wir zunächst einige leitende Grundsätze voraus.

1. Die Centrale eines brechenden Systems centrierter sphärischer Flächen ist die optische Axe, in der selbst oder in ihrer unmittelbaren Nähe die abzubildenden Objekte und ihre Teile sich befinden.

2. In der optischen Axe sind bemerkenswert die beiden Hauptbrennpunkte, die beiden Hauptpunkte und die beiden Knotenpunkte. Die letzteren beiden Kardinalpunktepaare haben gleiche Interstitien

und liegen paarweise zu den Brennpunkten symmetrisch. Sie sind beide bipolare Abscissenanfangspunkte für konjugierte Punkte und zwar gelten die Relationen:

$$1)\qquad (H_\alpha H_\beta),\quad \frac{f}{x_0}+\frac{\varphi}{x_1}=1,\quad (K_\alpha K_\beta),\quad \frac{-\varphi}{k_0}+\frac{-f}{k_1}=1.$$

3. Für die Abscissen der Objekt- und Bildpunkte in Bezug auf einen beliebigen Anfangspunkt derselben normieren die Differentiale ∂x_0 und ∂x_1, ∂k_0 und ∂k_1; für seitliche Dimensionen wie Ordinaten oder rad. vect. ∂y_0 und ∂y_1, r_0 und r_1 oder ∂r_0 und ∂r_1 u. s. w. Ist P_0 ein als Anfangspunkt angenommener Punkt des Objekts, so ist sein Bild P_1 Anfangspunkt der Abscissen des Gesamtbildes. Ihre Örter sind an die Gleichungen 1) gebunden.

4. Wenn von allen Punkten des als ein sehr kleines Raumgebilde gedachten Objektes Strahlen nach dem ersten Knotenpunkt K_α gezogen werden und von dem zweiten Knotenpunkte K_β zu jedem dieser parallele Strahlen, so sind die einzelnen Strahlenpaare Strahlen konjugierter Punkte. Der zweite Strahlenkegel ist mit dem ersten entweder völlig kongruent oder symmetrisch.

5. Wenn man mit einer durch den ersten Knotenpunkt gehenden Erzeugungsgeraden einen Umhüllungskegel des Objekts beschreibt, so ist der zweite Knotenpunkts-Strahlenkegel auch Umhüllungskegel des Bildes. Ist also z. B. das Objekt ein gegen die Knotenpunktsaxe $K_\alpha P_0$ geneigter Kreis, so ist sein Bild entweder ein Kreis oder eine Ellipse.

6. Die beiden Knotenpunkts-Strahlenkegel können als perspektivische Strahlenbündel mit zwei getrennten versetzten Polen angesehen werden. Irgend ein konjugiertes Strahlenpaar kann als eine optische Nebenaxe betrachtet werden, wenn man nur Knotenpunktsabscissen k_0 und k_1 anwendet.

7. Ist das Objekt eine sehr kleine Gerade r_0 oder ∂r_0 und zieht man alle möglichen Knotenpunktsstrahlen ihrer Punkte nach K_α, so bilden sie einen Strahlenfächer. Das Bild der Linie ist nun ebenfalls eine kleine Gerade r_1 oder ∂r_1, deren nach K_β gezogene Knotenpunktsstrahlen einen kongruenten, homothetischen oder antithetischen Fächer bilden. Die Neigungswinkel der beiden Linien sind indes verschieden gross, und zwar ist:

$$2)\qquad \tan\beta_0 : \tan\beta_1 = x_1 : x_0 = -\varphi k_1 : f k_0.$$

Zum Beweise dieses Theorems beachte man, dass für ein aufrechtes, senkrecht zur optischen Hauptaxe oder auch senkrecht zu einer Nebenaxe stehendes Objekt (Linie) folgende Beziehungen zu seinem gleichfalls aufrechten Linienbilde bestehen:*

* Matthiessen, Beiträge zur Dioptrik der Kristalllinse in: Berlin-Eversbuschs Zeitschrift für vergleichende Augenheilkunde IV, I § 2, 1887. — Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, Leipzig 1877.

$$\text{I)}\qquad \frac{\partial y_0}{\partial y_1} = \frac{\partial r_0 \sin\beta_0}{\partial r_1 \sin\beta_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1} = \frac{-\varphi x_0}{f x_1},$$

$$\text{II)}\qquad \frac{\partial y_0}{\partial y_1} = \frac{\partial r_0 \sin\beta_0}{\partial r_1 \sin\beta_1} = \frac{\varphi + k_0}{-f} = \frac{-\varphi}{f + k_1} = \frac{k_0}{k_1};$$

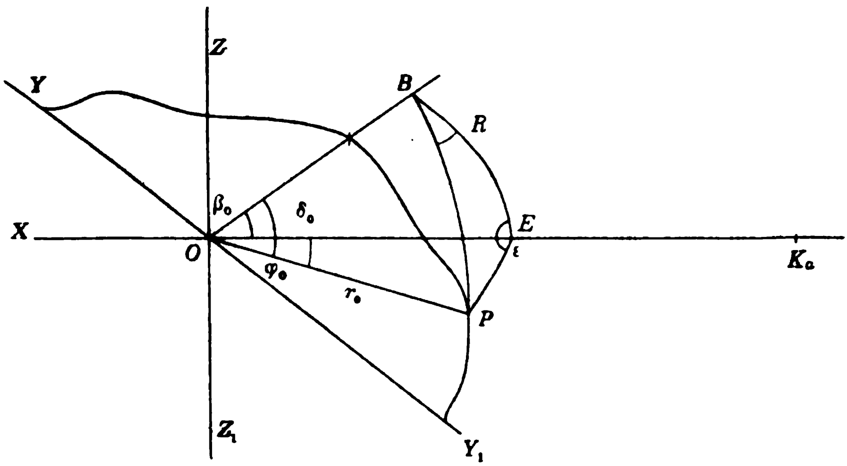
und weiter beachte man, dass für Linienelemente in der Hauptaxe oder einer Nebenaxe folgende Gleichungen bestehen:

$$\text{III)}\qquad \frac{\partial x_0}{\partial x_1} = \frac{\partial r_0 \cos\beta_0}{\partial r_1 \cos\beta_1} = \frac{x_0 - f}{\varphi - x_1} = \frac{-\varphi x_0^2}{f x_1^2},$$

$$\text{IV)}\qquad \frac{\partial x_0}{\partial x_1} = \frac{\partial r_0 \cos\beta_0}{\partial r_1 \cos\beta_1} = -\frac{\varphi + k_0}{f + k_1} = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2}.$$

Aus I) und III), beziehungsweise aus II) und IV) ergeben sich die Relationen in 2).

8. Als Abscissenaxe kann man die optische Axe wählen mit den Abscissen x_0 und x_1 und ihren Differentialen, wenn der Hauptobjektpunkt (x_0) in ihr liegt. Liegt er seitlich, so wähle man die beiden durch ihn und seinen Bildpunkt gehenden konjugierten Knotenpunkts-



strahlen k_0 und k_1. Diese auf die optische Axe projiziert, unterscheiden sich nur um Grössen der Kleinheit zweiter Ordnung, weil

$$k'_0 = \sqrt{k^2_0 + \partial y^2_0} = k_0 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial y_0^2}{k_0}.$$

Die Abscissenaxen degenerieren dann in zwei parallele Nebenaxen, welche wir unseren späteren Betrachtungen immer zu grunde legen werden, da die Vorstellungen von der Abbildung hierdurch viel klarer werden.

Wir wenden uns nunmehr der Theorie der Abbildung zu, indem wir uns als Objekt eine beliebige geschlossene krumme Oberfläche denken mit einem Pole O ihrer Polarkoordinaten. Man verbinde O mit dem ersten Knotenpunkte durch eine Gerade $K_a O$, welche wir als vordere Nebenaxe und zugleich als X-Axe eines rechtwinkligen

Koordinatensystems annehmen wollen. Es sei $K_\alpha OB$ (s. die Figur) der Neigungswinkel β eines durch O gelegten Ebenenschnittes gegen die Axe, P ein beliebiger Punkt seiner Peripherie mit dem Polarwinkel $BOP = \varphi_0$. Konstruiert man noch YOY_1 senkrecht zu $K_\alpha OB$ und OZ senkrecht zu $K_\alpha OY$, dann sind OY und OZ die beiden übrigen Koordinatenaxen; r_0 oder ∂r_0, ∂k_0, ∂y_0, ∂z_0, sowie r_1 oder ∂r_1, ∂k_1, ∂y_1, ∂z_1 die Koordinaten der beiden getrennten rechtwinkligen, dreiaxigen Koordinatensysteme. Wir denken uns ferner um O durch den Punkt P der krummen Oberfläche ein sphärisches Dreieck PBE gelegt; dann ist $BP = \varphi_0$, $BE = \beta_0$, $EP = \delta_0$,

$$B\hat{E}P = \varepsilon \quad \text{und} \quad E\hat{B}P = R.$$

Es sei nun die Gleichung der gegebenen Oberfläche der Einfachheit wegen explizit $r_0 = F(\beta, \varphi)$. Bezeichnet man das Bild des sphärischen Dreiecks mit $P_1B_1E_1$, so ist in Berücksichtigung des Umstandes, dass die Seiten dieser Dreiecke in parallelen Knotenpunkts-Strahlenfächern liegen,

$$BEP = B_1E_1P_1 = \varepsilon.$$

Weiter ist:

$$\sin\beta_0 = \tan\varphi_0 \cdot \cot\varepsilon, \quad \sin\beta_1 = \tan\varphi_1 \cdot \cot\varepsilon,$$

folglich:

3) $$\tan\varphi_0 : \tan\varphi_1 = \sin\beta_0 : \sin\beta_1.$$

Ferner ist

$$\cos\delta_0 = \cos\beta_0 \cdot \cos\varphi_0, \quad \cos\delta_1 = \cos\beta_1 \cdot \cos\varphi_1.$$

Da immer r_0 als eine sehr kleine Grösse vorausgesetzt wird, so kann man setzen:

$$r_0\cos\delta_0 = \partial k_0, \quad r_1\cos\delta_1 = \partial k_1,$$

und weil aus IV) folgt:

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1} = \frac{\partial k_0}{\partial k_1} = -\frac{\varphi + k_0}{f + k_1} = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2},$$

so wird:

$$r_0\cos\delta_0 = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2} r_1 \cos\delta_1 = -\frac{\varphi + k_0}{f + k_1} r_1 \cos\delta_1,$$

oder:

4) $$r_1 = \frac{-\varphi k_1^2}{f k_0^2} r_0 \frac{\cos\beta_0 \cdot \cos\varphi_0}{\cos\beta_1 \cos\varphi_1} = -\frac{f + k_1}{\varphi + k_0} r_0 \frac{\cos\beta_0 \cdot \cos\varphi_0}{\cos\beta_1 \cos\varphi_1}.$$

Dieses ist die Polargleichung der Bildfläche.

Wenn es sich nun um die Abbildung einer krummen Oberfläche oder einer Kurve handelt, werden die Polarkoordinaten r_0, β_0 und φ_0 in die des Bildes r_1, β_1 und φ_1 zu verwandeln sein. Handelt es sich dagegen um die Abbildung singulärer Linien und Punkte z. B. der Kanten und Ecken eines Polyeders, so sind die partikulären Gleichungen 2), 3) und 4) nach β_1, φ_1 und r_1 aufzulösen. Wir wollen hier zunächst das erste Verfahren entwickeln und gehen aus vom Quadrate der Gleichung 4):

$$r_1^2 = \left(\frac{-\varphi}{f}\right)^2 \frac{k_1^4}{k_0^4} r_0^2 \frac{\cos\beta_0^2 \cos\varphi_0^2}{\cos\beta_1^2 \cos\varphi_1^2}.$$

Es ist nun

$$\cos\beta_0^2 = \frac{1}{1+\tan\beta_0^2} = \frac{1}{1+\tan\beta_1^2\left(\frac{-\varphi k_1}{f k_0}\right)^2} = \frac{\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2 \cos\beta_1^2}{1-\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right]},$$

$$\cos\varphi_0^2 = \frac{1}{1+\tan\varphi_0^2} = \frac{1}{1+\tan\varphi_1^2\,\frac{\sin\beta_0^2}{\sin\beta_1^2}} = \frac{\cos\varphi_1^2\left[1-\cos\beta_1^2\left\{1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right\}\right]}{1-\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right]}.$$

etzt man diese Werte in die Gleichung 4) ein, so erhält man:

$$r_1^2 = \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2 r_0^2 \frac{1}{1-\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right]}.$$

$$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{1-\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2\right]}}.$$

)a dies die Gleichung eines Rotationsellipsoides ist, so ist der
lungskoeffizient des rad. vect. in jedem Falle ein elliptischer und
kann deshalb die dioptrische Abbildung von Objekten eine ellip-
Anamorphose nennen. Zur vollständigen Darstellung der Ab-
g hat man noch die Gleichung:

$$r_0 = F(\beta_0, \varphi_0)$$

etzen und die Koordinaten β_0 und φ_0 in die des Bildes β_1 und φ_1
nsformieren. Wir wollen dies Verfahren an einem Beispiele er-
n.

ls sei das Objekt ein kleines dreiaxiges Ellipsoid. Der Einfach-
regen nehmen wir an, dass seine längste Axe $2a$ mit der Knoten-
axe $K_a P_0$ zusammenfalle, und wählen die mittlere Axe $2b$ als
und die kleinste $2c$ als Z-Axe. Dann wird bei Anwendung
ben Polarkoordinaten die Gleichung des Ellipsoids:

$$r_0 = \frac{b}{\sqrt{1+\cos\varphi_0^2\left(\frac{b^2}{c^2}-1\right)-\cos\varphi_0^2\cos\beta_0^2\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)}}.$$

Vir drücken alle Elemente dieser Gleichung durch die des Bildes
abei ist:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{-f k_0^2}{\varphi k_1^2}, \quad \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{k_0}{k_1},$$

h

$$b = b_1\frac{k_0}{k_1}, \quad \frac{b^2}{c^2} = \frac{b_1^2}{c_1^2}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{b_1^2}{a_1^2}\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2,$$

$$= \frac{k_0}{k_1}\,\frac{b_1}{\sqrt{1+\cos\varphi_0^2\left(\frac{b_1^2}{c_1^2}-1\right)-\cos\varphi_0^2\cos\beta_0^2\left[\frac{b_1^2}{c_1^2}-\frac{b_1^2}{a_1^2}\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2\right]}}.$$

lieraus lassen sich die Koordinaten β_0 und φ_0 mittelst der Re-
en 5) und 6) in β_1 und φ_1 verwandeln. Substituiert man noch:

$$\frac{b_1^2}{c_1^2} - 1 = \lambda^2, \quad \frac{a_1^2}{c_1^2} - 1 = \lambda_1^2$$

und verbindet die Gleichung des Ellipsoides mit der Gleichun
erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} r_1 &= \frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_1^2\lambda^2\cos\varphi_1^2 - a_1^2(1+\lambda^2)\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{\varphi k_1}\right)^2\right] \atop - b_1^2\left[1+\lambda_1^2-\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2\right]\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2 (} } \\ &= \frac{b_1}{\sqrt{1+\lambda^2\cos\varphi_1^2 - (1+\lambda^2)\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2\left[1-\left(\frac{f k_0}{\varphi k_1}\right)^2\right] \atop -\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2}\left[1+\lambda_1^2-\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)\right]\cos\varphi_1^2\cos\beta_1^2 (}} \end{aligned}\right.$$

welches ebenfalls die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoides is

Wenn das Objekt eine Kugelfläche, also $r_0 =$ konst. ist, so
die Gleichung 7) die Abbildung und zwar ein Rotationsellips
den Halbaxen:

$$a_1 = \frac{-\varphi k_1^2}{f k_0^2} r_0,$$

$$b_1 = c_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0.$$

Wenn hierbei der Mittelpunkt der Kugel im ersten Knot
liegt, hat man zu setzen $k_0 = k_1 = 0$ und nach IV) und II):

$$a_1 = \frac{-f}{\varphi} r_0, \quad b_1 = c_1 = \frac{-f}{\varphi} r_0,$$

d. h. das Bild ist auch eine Kugel. Liegt dagegen der Mittelpu
Objektkugel im ersten Hauptpunkte, so hat man zu setzen $x_0 =$
und nach III) und I):

$$a_1 = \frac{-\varphi}{f} r_0, \quad b_1 = c_1 = r_0,$$

d. h. das Bild ist ein Rotationsellipsoid.

Wenn das Objekt ein Gitter oder ein Polyeder ist, so ka
die Polarkoordinaten r_1, β_1 und φ_1 ausdrücken durch r_0, β_0 un

Es ist ganz analog den Formeln 5) und 6):

$$8) \quad \cos\beta_1^2 = \frac{1}{1+\tan\beta_0^2\left(\frac{f k_0}{-\varphi k_1}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2\cos\beta_0^2}{1-\cos\beta_0^2\left[1-\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2\right]}$$

$$9) \quad \cos\varphi_1^2 = \frac{1}{1+\tan\varphi_0^2\frac{\sin\beta_1^2}{\sin\beta_0^2}} = \frac{\cos\varphi_0^2\left[1-\cos\beta_0^2\left\{1-\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right.\right.\right.}{1-\cos\varphi_0^2\cos\beta_0^2\left|\,1-\left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right.\right.}$$

10) $$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \cos\varphi_0{}^2 \cos\beta_0{}^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi k_1}{-f k_0}\right)^2\right]}};$$

. es sich im vorliegenden Falle im allgemeinen nur um die Ab-
dung einzelner Punkte handelt und nicht um Ebenenschnitte durch
: Y-Axe, so kann man auch einfach ausgehen von den Relationen
und 2):

$$r_1 = \frac{-\varphi k_1{}^2}{f k_0{}^2} r_0 \frac{\cos\delta_0}{\cos\delta_1} = -\frac{f + k_1}{\varphi_0 + k_0} r_0 \frac{\cos\delta_0}{\cos\delta_1},$$

$$\tan\delta_0 : \tan\delta_1 = -\varphi k_1 : f k_0,$$

raus folgt:

11) $$r_1 = \frac{k_1}{k_0} r_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \cos\delta_0{}^2 \left[1 - \left(\frac{\varphi k_1}{-f k}\right)^2\right]}}.$$

Die Gleichung:

12) $$\tan\delta_1 = \left(\frac{-f k_0}{\varphi k_1}\right) \cdot \tan\delta_0$$

ebt die Neigung des rad. vect. eines Punktes z. B. einer Ecke des lyeders gegen die Hauptaxe (Knotenpunktsaxe) und die Gleichung 11) : Länge des rad. vect. oder den Abstand des abgebildeten Punktes n dem Koordinatenanfangspunkte des Bildes.

Über den Traktoriographen von Kleritj und das Stangenplanimeter.

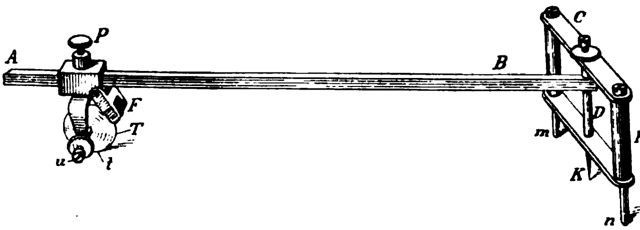
Von

Reallehrer A. Korselt
in Meerane i. S.

Auf die Aufforderung des Herrn Prof. Mehmke hin teile ich den Lesern dieser Zeitschrift folgendes über den „Traktoriographen" von Staatsrat Kleritj (jetzt serbischer Minister für Volkswirtschaft und Handel) mit. Ich entnehme die Angaben dem Aufsatze von Kleritj in Dinglers polytechnischem Journal Band 305, S. 234—237, 260—263, 1897.

Der „Traktoriograph" besteht (Fig. 1) aus der Fahrstange AB, die an dem einen Ende mit einem Fahrstift DK versehen ist, und

Fig. 1.



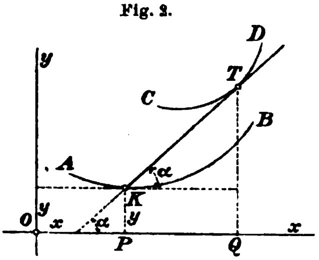
aus einem scharfrandigen, um eine wagerechte Axe drehbaren Rädchen T. Diese Axe ist in dem gabelförmigen Unterteile einer Hülse gelagert, welche auf der Stange AB verschiebbar und mittelst der Schraube P auf derselben feststellbar ist. Der spitze Fahrstift DK ist leicht drehbar in dem Rahmen CH befestigt, der auf verstellbaren Füßen m und n ruht. Durch Schrauben in den Füßen kann K beliebig eingestellt werden, und ebenso lässt sich durch Schräubchen das Rädchen T so stellen, dass seine Symmetrieebene durch AB und K geht.

Man fasst das Instrument zwischen zwei Finger und führt die Fahrspitze leicht die aufgezeichnete Kurve entlang. Der Berührungspunkt t des Rädchens beschreibt dann die der Kurve zugehörige Traktorie mit der unveränderlichen Tangente $t = Kt$. Über dem Rädchen T befindet sich ein kleineres Rädchen F mit einem Einschnitte,

der einen mit Druckfarbe getränkten Filz enthält. Diese färbt den scharfen Rand des Rädchens T und bewirkt, dass der Weg von t auf dem Papiere sich abzeichnet.

Es seien (Fig. 2) CD die Traktorie der Linie AB für die beständige Tangente t, XY die Koordinaten des Punktes K auf AB, xy diejenigen des zugehörigen Punktes T auf CD, α der Winkel einer Richtung von t mit der x-Axe. Dann ist nach der Figur:

Fig. 2.



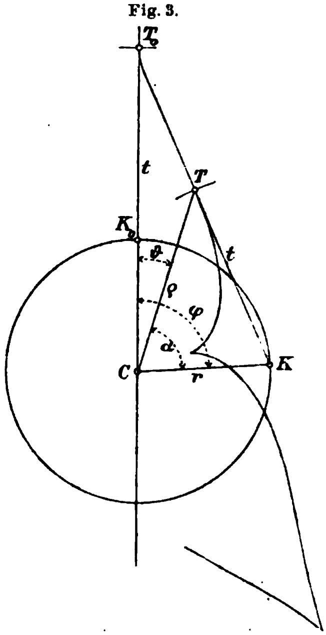
$$1)\quad \begin{cases} x = X + t\cos\alpha, \\ y = Y + t\sin\alpha, \\ y' = \operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Da aber
$$\cos\alpha = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\sin\alpha = y'(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}},$$
so folgt:
$$2)\quad \begin{cases} X = x - t(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ Y = y - ty'(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Folgende Bemerkung sei hier eingeschaltet:

Das bekannte Kennzeichen der Berührungstransformationen (siehe etwa Lie, „Geometrie der Berührungstransformationen" S. 73 Satz 2) zeigt, dass die Zuordnung 2) der Traktorie CD zu AB, also auch die umgekehrte Zuordnung 1) keine Berührungstransformation ist. Das ist auch geometrisch leicht an zwei einander berührenden Kreisen zu zeigen.

Fig. 3.



Bewegt sich die Spitze K auf einem Kreise mit dem Halbmesser r (Fig. 3) und ist $KT = t$, so beschreibt der Berührungspunkt des Rädchens eine Kreistraktorie $T_0 T T_1 \ldots$, für welche die augenblickliche Richtung KT die Tangente der Traktorie im Punkte T ist. Die Gleichung dieser Traktorie lautet:

$$k \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} k\varphi = \operatorname{tg} k(\vartheta + \alpha),$$

wo

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{t}\right)^2},$$

α der Winkel, unter dem die Tangente t vom Mittelpunkt aus gesehen wird, φ der zum befahrenen Wege K_0K gehörige Centriwinkel, und ϑ der Polwinkel, von CK_0 aus gerechnet, ist. Um den n^{ten} Teil des gegebenen Weges φ zu finden, braucht man nur zu setzen:

$$k = \frac{1}{n},$$

dann wird

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{n},$$

wodurch $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}$, also auch $\frac{\varphi}{n}$ selbst bekannt wird. Als Tangentenlänge hat man dabei zu nehmen

$$t = nr(n^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist aber die Vielteilung für ein bestimmtes r geleistet, so ist sie bekanntlich auch leicht für ein beliebiges r auszuführen.

Setzt man $t = 0$, so wird hier $k = 0$ und

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{k=0} \frac{\operatorname{tg} k\varphi}{k} = \varphi.$$

Da α bekannt ist, so ist damit φ für $r = 1$ rektifiziert und zugleich der Sektor $CK_0K = \frac{\varphi r}{2}$ quadriert. Setzt man $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so findet man eine Strecke für die Zahl $\frac{\pi}{2}$, bezogen auf den Einheitsradius.

Will man einem Kreise ein regelmässiges n-Eck einbeschreiben, so teile man wie angegeben $\frac{\pi}{2}$ in n Teile, verbinde je zwei getrennte Punkte durch eine Sehne und übertrage diese Teilung auf die andere Kreishälfte.

Die Basis e der natürlichen Logarithmen wird gezeichnet mit Hilfe der (Huyghensschen) Traktrix der Geraden. Durch Integration der Differentialgleichungen 2) findet man die Gleichung derselben:

$$\xi = -\sqrt{t^2 - \eta^2} + t\,l\,\frac{t + \sqrt{t^2 - \eta^2}}{\eta},$$

wenn ξ und η die Koordinaten eines Punktes dieser Traktorie bezeichnen. Durch Konstruktion mit Lineal und Zirkel wird daraus die auf dieselbe Axe bezogene logarithmische Linie abgeleitet:

$$x = t\,l\,\frac{y}{t},$$

also für $t = 1$

$$x = l y \quad \text{oder} \quad y = e^x.$$

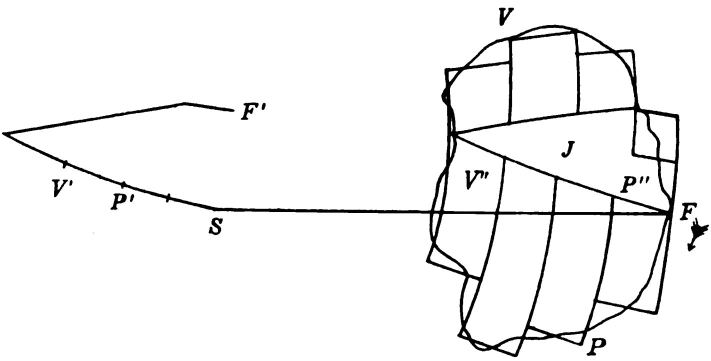
Man nehme also $x = 1$, so findet man aus der gezeichneten Traktrix und nach obigen elementaren Konstruktionen eine Strecke als Darstellung von e in Bezug auf eine gegebene Streckeneinheit. Dabei wird aber vorausgesetzt, dass man zu jedem Punkt der x-Axe den entsprechenden Punkt der Traktrix auffinden kann. Das geschieht durch Auflegen des Traktoriographen auf die Grundgerade und die schon gezeichnete Traktrix.

Wir können diesen Konstruktionen keine praktische Bedeutung beilegen, weil sie sich ebenso genau und noch einfacher mit einem Maßstabe und einem Zirkel ausführen lassen, wenn eine kleine Anzahl

/ersuchen gestattet ist. Praktisch wichtig ist aber die von tj nicht erwähnte Anwendung des Traktoriographen als Plani-, wie sie zuerst 1886 der dänische Kapitän Prytz gelehrt hat. 'rytz hat ebenfalls einen Traktoriographen angegeben, aber von ierer Konstruktion. Anstatt des Rädchens T hat sein Instrunur eine einfache Schneide, die die Traktorie in das Papier ein-. Unter dem Namen Beilplanimeter oder Stangenplani- findet es jetzt in England und Deutschland allseitig unbedingte ennung. Eine eingehende Behandlung der zugehörigen Theorie . Runge findet sich in der „Zeitschrift für Vermessungs-ı“ 1895, S. 321—331, ein kürzerer Aufsatz von J. Hamann in oen Zeitschrift 1896, S. 643 bis 650. Dem Letzteren entnehme e folgenden Angaben.

/mläuft die Spitze K im Sinne des Uhrzeigers eine Fläche V ł) mit der Anfangslage FS des Fahrarms, so beschreibt T eine

Fig. 4.



V'. P und P' mögen zwei beliebige zugehörige Punkte der n V und V' bedeuten, F' sei der zu F gehörige Punkt in der ge des Fahrarms, l die Entfernung des Punktes F' von SF. Nun iebt man V' parallel zu SF in die Lage V'', so dass F auf S Die Kurve V'' schliesst dann mit einem Bogen von V eine „Rest-‘ J ein. Die Fläche V kann dann betrachtet werden als Summe lich vieler unendlich schmaler Teile von Kreisringflächen. Der geht durch P, hat als Mittelpunkt P' und als Radius t und bis zu einem Punkt P'' des zugehörigen Teiles der Kurve V''. hdem diese Bogen die Fläche J einmal oder zweimal überstreichen, r Inhalt der Fläche V:

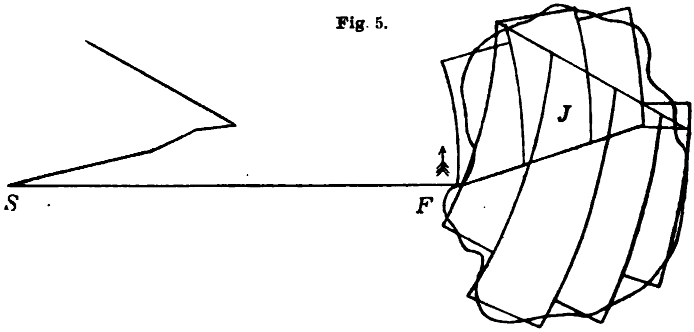
$$V = lt + J,$$

$$V = lt - J.$$

rsteres tritt ein, wenn V vom Rädchen aus gesehen vor dem Kreisbogen durch F (Fig. 4), letzteres, wenn sie hinter dem-

selben liegt (Fig. 5). Um den Betrag der Restfläche möglichst klein zu machen, legt man den Fahrarm anfangs so, dass seine Normale in F die Fläche V ungefähr hälftet. Eine Restfläche J_r wird dann

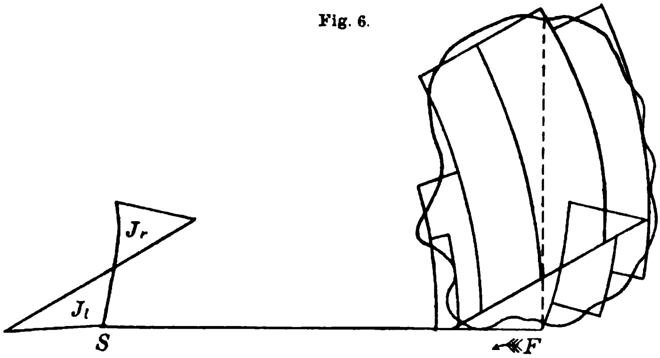
Fig. 5.



positiv, die andere J_l negativ. Man erhält dann Figur 6, in die einige Kreisbogen hinzugezeichnet sind.

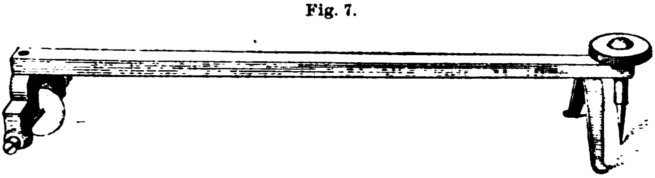
Von einer Erfindung kann aber bei keinem dieser Instrumente die Rede sein, sondern nur von einer neuen Konstruktion, wie ich

Fig. 6.



(nach den Angaben des Herrn Prof. Mehmke) aus einer Abhandlung von v. Braunmühl in dem „Kataloge mathematischer Modelle", herausgegeben von W. Dyck, München 1892, S. 85 ersehe. Darnach hat Graf Giambatista Suardi 1752 ein Instrument angegeben, das

Fig. 7.



sowohl die Traktrix von Huyghens als auch die logarithmische Linie zeichnet. Das Rädchen hat dort keine Farbe, sondern drückt seine Zähnchen in die Zeichenfläche ein. Der Fahrarm ist eine Schiene, die sich mit dem einen Ende in der Rinne eines prismatischen Lineals verschiebt.

Der Traktoriograph von Kleritj unterscheidet sich nur wenig von dem, die Traktorien ebenfalls mit Farbe genau zeichnenden Stangenplanimeter, welches die Firma Eckert und Hamann in Friedenau bei Berlin in den Handel gebracht hat; der Preis des letzteren Instrumentes (siehe Fig. 7) ist aber niedriger (15 Mark gegen 22 Mark).

Ergänzende Bemerkungen zu vorstehendem Aufsatze.

Vom Herausgeber.

Nachdem ich die Quellen eingesehen habe, kann ich den Mitteilungen des Herrn Korselt über Traktoriographen noch folgendes hinzufügen.

Schon vor Suardi hat der (auch als Erfinder einer Rechenmaschine bekannte) Marchese Poleni* einen Traktoriographen konstruiert, bei dem die Rolle mit scharfem Rande (von Poleni Rotula signatoria genannt) verwendet ist. Besagte Rolle, als deren Erfinder wir also Poleni anzusehen haben, so lange nicht ein früheres Vorkommen derselben nachgewiesen ist, bildet bekanntlich einen wesentlichen Bestandteil zahlreicher, der Neuzeit angehöriger Integrationsapparate.** Suardi, der übrigens selbst auf Poleni hinweist, hat den ganzen Apparat vereinfacht. Er beschränkt sich nicht auf den Fall der Huyghensschen Traktorie — Basis oder Direktrix eine gerade Linie —, sondern sagt ausdrücklich (unter Bezugnahme auf eine Abbildung), dass, wenn die Leitlinie z. B. ein auf Papier gezeichneter Kreis sei (von beliebigen Leitlinien ist vorher die Rede gewesen), es genüge, an der Stange, welche die Rolle trägt, einen Stift zu befestigen und letzteren der Leitlinie entlang zu führen.***

Die Bestimmung von Punkten der Kettenlinie und der logarithmischen Kurve mit Hilfe der Traktorie einer Geraden, welche Aufgabe Herr Kleritj u. a. behandelt, wird auch von Poleni a. a. O. (unter Hinweis auf Arbeiten von Huyghens u. a.) ausführlich besprochen.

Die prinzipielle Wichtigkeit der Erkenntnis, dass mit Hilfe eines so überaus einfachen Mechanismus z. B. die Konstruktion transcendenter Zahlen, wie π und e, theoretisch genau ausführbar ist, wird man nicht unterschätzen dürfen und man hat deshalb m. E. Ursache, Herrn Kleritj für seine Anregungen dankbar zu sein, trotzdem sein

* Joannis Poleni... Epistolarum Mathematicarum Fasciculus, Patavii 1729. Die „organische Konstruktion", d. h. mechanische Erzeugung der (Huyghensschen) Traktorie und der logarithmischen Kurve wird in einem Briefe an Jacob Hermann behandelt.

** Vergleiche etwa die Schrift: Abdank-Abakanowicz, Die Integraphen, Deutsch von Bitterli, Leipzig 1889, B. G. Teubner.

*** S. 36 des fraglichen Werkes, dessen Titel ist: Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne... Del Conte Giambatista Suardi Bresciano. In Brescia 1752.

Traktoriograph nicht als neue Erfindung gelten kann und trotzdem die Anwendungen, die er davon macht, nicht alle neu sind.

Leibniz, der sich auch mit der Konstruktion eines Traktoriographen beschäftigt hat,* sah in ihm hauptsächlich ein Hilfsmittel, Kurven zu quadrieren; ob aber die theoretisch genaue Methode, die Leibniz im Auge hatte, mit der angenäherten Bestimmung des Flächeninhalts einer beliebig begrenzten Figur nach Prytz irgend etwas zu thun hat, bin ich ausser Stande zu sagen.

Ich erwähne noch, dass der Traktoriograph auch zur angenäherten Bestimmung des Schwerpunkts einer beliebig begrenzten ebenen Fläche benützt werden kann (vergl. den Schluss der von Herrn Korselt oben angeführten Abhandlung von C. Runge).**

Nachtrag zu dem Aufsatze: „Über einen Mechanismus, durch den ein beliebiger Winkel in eine beliebige ungerade Anzahl gleicher Teile geteilt werden kann“.

(Diese Zeitschr. Bd. 42 S. 276.)

Von Reallehrer **A. Korselt** in Meerane i. S.

Herr Prof. Dr. Heymann in Chemnitz hat mich brieflich darauf aufmerksam gemacht, dass der Gedanke, der dem von mir im Jahrgange 42 dieser Zeitschrift beschriebenen „Claussschen Winkel“ zu Grunde liegt, keineswegs neu ist, sondern sich schon in einem von Th. Ceva 1694 angegebenen Instrumente verwirklicht findet. Eine Abbildung habe ich durch die Gefälligkeit des Herrn Prof. Dr. Hey-

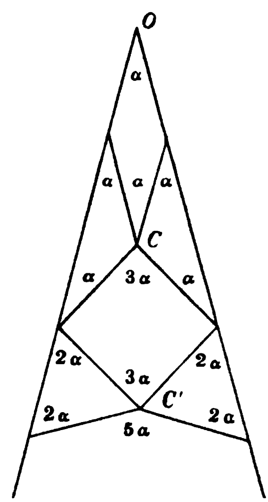
---

* Siehe den Brief an Huyghens vom 1./11. Oktober 1693, Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt, 1. Abteilung, Bd. 2, 1850. S. 164 flg.

** Die Figuren 1 und 7 sind mit gütiger Erlaubnis des Herrn Prof. Dr. E. Hammer nach Instrumenten der geodätischen Sammlung der technischen Hochschule in Stuttgart angefertigt worden. An dem Traktoriographen Fig. 1 fehlt übrigens die in der Beschreibung von Kleritj in Dinglers Journal angegebene Nadel, mit welcher genau an der Stelle des Berührungspunktes t des Rädchens T ein Stich ins Papier gemacht werden kann. Bei Hamanns Stangenplanimeter ist ein (in Fig. 7 nicht sichtbares) Farbkissen über dem Rädchen angebracht. Die das Rädchen tragende Gabel sitzt fest an der Stange, so dass nur Traktorien für eine und dieselbe Tangentenlänge beschrieben werden können. Es lag eben Hamann wie Prytz das Zeichnen beliebiger Traktorien ebenso fern, wie Kleritj die Planimetrierung beliebig begrenzter Flächen. Natürlich könnte auch an Hamanns Stangenplanimeter die Entfernung zwischen Rädchen und Fahrstift veränderlich gemacht werden, wodurch der Preisunterschied zwischen beiden Instrumenten wahrscheinlich verschwinden würde. Die Litteratur über Stangenplanimeter (bis Ende 1897) ist ausführlich angegeben in den trefflichen Berichten von E. Hammer über die Fortschritte des Kartenwesens im Geographischen Jahrbuch, Bd. XIX, S. 26 und Bd. XX, S. 475. Siehe auch die neue elementare Ableitung von L. Schleiermacher, Zeitschr. für Vermessungswesen, 1898, S. 408.

mann in J. Leupold, theatrum arithmetico-geometricum 1727, Tab. XXVII, Fig. VII (Beschreibung S. 167) gesehen.

Das Instrument von Ceva ist auch ein Zirkel, an dessen Schenkeln auf der Innenseite gleichlange drehbare, aber nicht verschiebbare Gelenkstücke befestigt sind (siehe die stark verkleinerte schematische Darstellung in nachstehender Figur). Die Mittelpunkte $O, C, C' \ldots$ sind durchbohrt, so dass sich die Scheitel der zu teilenden Winkel ziemlich scharf einstellen lassen und man nur noch die Schenkel in drehende Bewegung zu versetzen braucht. Bei dem Claussschen Winkel muss man Schenkel und Scheitel gleichzeitig einstellen, was einiges Probieren erfordert. Insofern steht der Claussche Winkel dem Ceva'schen Instrumente nach. Dafür braucht Ceva die doppelte Anzahl von Gliedern, die sich allerdings nicht kreuzen. Bei Versuchen habe ich den Claussschen Winkel hinlänglich genau befunden; das Cevasche Instrument ist noch nicht hergestellt, man kann also nicht wissen, ob es ebenso schnell arbeitet, oder ob es das Papier zu sehr zersticht.



Übrigens ist es nicht nötig, für höhere Konstruktionen besondere Instrumente zu finden, wenn man innerhalb der Grenzen einer gewöhnlichen Zeichenfläche eine schnelle, saubere und hinlänglich genaue Annäherungskonstruktion kennt. Solche giebt es für alle altberühmten geometrischen Probleme, siehe z. B. Baltzer, analytische Geometrie § 25. Interessant ist es aber zu sehen, wie alte Gedanken immer wieder gefunden werden. Auch Newton in der Arithm. univ. 1732 beschreibt in dem Probl. XXIX ein ähnliches Werkzeug, das dort auf Tab. III. abgebildet ist.

Auch muss nach der Mitteilung des Herrn Dr. Heymann die am Ende meiner Bemerkung gemachte Angabe, dass durch den Claussschen Winkel alle Dreiecksaufgaben einer gewissen Gattung auflösbar seien, dahin eingeschränkt werden, dass dies nur für diejenigen Aufgaben der genannten Gattung gilt, die auf algebraisch auflösbare Gleichungen führen. Diese brauchen aber nicht, entgegen der Meinung Dr. Heymanns, Winkelteilungsgleichungen zu sein. Denn nach einem berühmten Satze von Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1853 (zuerst von Weber bewiesen, vergl. dessen Lehrbuch der Algebra Bd. II, § 179 flg.) ist jede Abelsche Gleichung auch eine Kreisteilungsgleichung, d. h. ihre Wurzeln sind rationale Funktionen von Einheitswurzeln, sind also durch Winkelteiler konstruierbar.

Über die Mercator'sche Projektion.

Von

H. E. Timerding

in Strassburg.

Hierzu Tafel VII Fig. 1—4.

Die Mercator'sche Projektion hat nicht allein trotz der unmässigen Vergrösserung der Polarregionen gegenüber den Gegenden am Äquator eine grosse praktische Bedeutung, weil sie bei der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen die Meridiane und Breitenkreise als gerade Linien in der Ebene abbildet, und ist, weil sie infolgedessen auch immer den Weg eines unverändert nach derselben Himmelsrichtung steuernden Schiffes als gerade Linie darstellt, für Seekarten fast ausschliesslich im Gebrauch, sie ist auch in rein geometrischer Hinsicht merkwürdig, weil sie zu einer interessanten Gattung von transcendenten Kurven hinführt und so für die systematische Behandlung dieser gegenüber den algebraischen bisher sehr vernachlässigten Kurven einen ersten Ansatz liefern kann.

1. Wir denken uns einen Cylinder C, welcher eine Kugel K, deren Radius wir gleich der Längeneinheit annehmen, längs eines grössten Kreises berührt. Sei ferner für diesen grössten Kreis als Äquator die geographische Breite eines Punktes der Kugel mit θ und seine geographische Länge mit ξ bezeichnet. Bedeute endlich η den Abstand eines Punktes auf dem Cylinder von dem Äquator. Wir lassen dann den Kreisfunktionen von θ hyperbolische Funktionen von η entsprechen, indem wir setzen:

$$1)\qquad \mathfrak{Sin}\,\eta = \operatorname{tang}\theta, \quad \text{also} \quad \mathfrak{Cos}\,\eta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tang}\,\eta = \sin\theta.$$

Durch diese Gleichungen ist eine Abbildung der Kugel auf den Cylinder vermittelt, bei der die Punkte des Äquators sich selbst entsprechen, die Meridiane der Kugel durch die Seitenlinien und die Breitenkreise durch die Kreise des Cylinders dargestellt werden. Diese Abbildung ist weiter, weil:

$$2)\qquad d\xi^2 + d\eta^2 = \frac{1}{\cos\theta^2}(d\theta^2 + \cos\theta^2 d\xi^2)$$

wird, eine in den kleinsten Teilen ähnliche und mit der Mercator'schen Cylinderprojektion identisch. Den Cylinder C können wir uns längs einer Seitenlinie aufgeschnitten und auf einer Ebene ε ausgebreitet denken. In geometrischer Beziehung ist es aber vorteilhaft, das Bild des so gewonnenen ebenen Streifens unendlich oft zu wiederholen und mit diesen Bildern die ganze Ebene zu überdecken, als ob der Cylinder gleich einer Farbwalze über sie weggewälzt wäre und sein Bild unendlich oft auf sie übertragen hätte.

2. Die Koordinaten eines Kugelpunktes, bezogen auf drei senkrechte Durchmesser, von denen zwei in der Ebene des Äquators liegen, der dritte also die Pole verbindet und die Axe der Kugel ist, sind, ausgedrückt durch Breite und Länge:

$$3)\qquad x = \cos\theta\cos\xi,\quad y = \cos\theta\sin\xi,\quad z = \sin\theta,$$

und die Gleichung eines Kreises auf der Kugel hat die Form:

$$4)\qquad \alpha + \beta\sin\theta = \cos\theta(\gamma\cos\xi + \delta\sin\xi).$$

Dividieren wir durch $\cos\theta$, so geben die Beziehungen 1) die Gleichung der entsprechenden Kurve auf dem Cylinder C oder in der Mercator-Ebene ε:

$$5)\qquad \alpha\,\mathfrak{Cof}\,\eta + \beta\,\mathfrak{Sin}\,\eta = \gamma\cos\xi + \delta\sin\xi.$$

Diese Kurve wollen wir als eine Mercator-Kurve erster Ordnung bezeichnen.

3. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha^2 > \beta^2$, $\alpha^2 < \beta^2$ oder $\alpha^2 = \beta^2$ ist. Im ersten Falle schneidet die Ebene des Kreises die Kugelaxe ausserhalb, im zweiten Falle innerhalb der Kugel, so dass der Kreis selbst einen der Pole umschliesst. Im Grenzfalle geht der Kreis und seine Ebene durch einen Pol hindurch. Dies liefert uns zwei verschiedene Typen von Mercator-Kurven und einen Übergangstypus. Im ersten Falle nämlich lässt sich der Gleichung 5) die Form geben:

$$6)\qquad \mathfrak{Cof}(\eta - \eta_0) = m\cos(\xi - \xi),$$

im zweiten Falle kann man sie schreiben:

$$7)\qquad \mathfrak{Sin}(\eta - \eta_0) = n\sin(\xi - \xi_0),$$

und im Grenzfalle wird sie:

$$8)\qquad \mathfrak{Cof}\,\eta + \varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta = e^{\varepsilon\eta} = p\cos(\xi - \xi_0)$$

für $\varepsilon = \pm 1$.

4. Eine beliebige Mercator-Kurve geht also durch Parallelverschiebung aus einer der folgenden hervor:

$$9)\qquad \mathfrak{Cof}\,\eta = m\cos\xi,$$

$$10)\qquad \mathfrak{Sin}\,\eta = n\sin\xi,$$

$$11)\qquad \eta = \varepsilon\log\cos\xi.$$

Die Kurven 9) entsprechen den Kreisen der Kugel, deren Ebene

$$x = \frac{1}{m}$$

die x-Axe rechtwinklig schneidet, die Kurven 10) den grössten Kreisen, deren Ebene

$$z = ny$$

durch die x-Axe geht. Diese beiden Kreisscharen auf der Kugel bilden ein isothermisches System und damit auch die entsprechenden Kurvenscharen in der Mercator-Ebene, jede Kurve der einen Schar schneidet alle Kurven der anderen Schar unter rechten Winkeln. Figur 1 stellt einige dieser Kurven dar.

4. Die Kurven 9) des ersten Typus setzen sich aus kongruenten Ovalen zusammen, deren jedes wieder aus vier symmetrischen Vierteln besteht, also einen Mittelpunkt hat. Diese Mittelpunkte folgen sich in den Abständen 2π auf der ξ-Axe. Die Kurven 10) des zweiten Typus sind wellenähnliche Linien, deren kongruente und aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Stücke abwechselnd unter und über der ξ-Axe liegen und die Länge π haben.

5. Die doppelt unendlich vielen Mercator-Kurven des Übergangstypus sind alle kongruent und entstehen aus einander durch Parallelverschiebung oder Spiegelung an solchen Geraden, die zur ξ-Axe oder η-Axe parallel sind. Durch Verschiebung um 2π in der Richtung der ξ-Axe gehen sie in sich über. Ihre einzelnen Teile haben eine zur η-Axe parallele Symmetrieaxe und nähern sich asymptotisch zweien von dieser um $\frac{\pi}{2}$ nach links und rechts entfernten Geraden. Von einer „Scheiteltangente" — für die Kurve 11) ist es die Gerade $\eta = 0$ — werden die Kurven unendlich oft, nämlich in ihren „Scheiteln", das heisst ihren tiefsten resp. höchsten Punkten, berührt.

Besonders ausgezeichnet sind diese Kurven dadurch, dass man aus einer von ihnen die sämtlichen Kurven eines isothermischen Systems erhält, indem man die Kurve erst um alle möglichen Strecken in der Richtung der η-Axe und dann alle Kurven der so gewonnenen ersten Schar um

$$\frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \frac{3\pi}{2}$$

in der Richtung der ξ-Axe verschiebt. Von den so erhaltenen vier Scharen sind die erste und dritte zu der zweiten und vierten orthogonal, wie es Figur 2 zeigt.

6. Zu der konformen Abbildung, die durch die Beziehung eines solchen isothermischen Kurvensystems auf zwei sich rechtwinklig kreuzende Scharen paralleler Geraden in einer anderen Ebene vermittelt ist, gelangen wir wie folgt. Wir projizieren die Kreise auf der Kugel K, deren Bilder die in Rede stehenden Kurven sind, aus dem Pol, den sie enthalten, durch Ebenen. Bringen wir mit den letzteren

Äquatorebene α zum Schnitt, so ist diese dadurch mit der Mercator-
ene ε in die verlangte Beziehung gesetzt, die, wie man so findet,
rch die Gleichungen:

$$X = \cos\xi \cdot e^{\varepsilon\eta}, \quad Y = \sin\xi \cdot e^{\varepsilon\eta}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{12}$$

sgedrückt wird, wo χ und y rechtwinklige Koordinaten in der
uatorebene $z = 0$ bezeichnen. Diese Verwandtschaft drückt sich
facher aus durch

$$R = e^{\varepsilon\eta}, \tag{13}$$

lem dann
$$X = R\cos\xi, \quad Y = R\sin\xi$$
d und R den Abstand des Punktes der Äquatorebene vom Mittel-
nkte des Äquatorkreises bezeichnet. Diese konforme Abbildung ist
Herrn **Holzmüller** im 16. Bande dieser Zeitschrift ausführlich
rachtet und diese Betrachtung in seiner Einführung in die Theorie
isogonalen Verwandtschaften wiederholt. An letzterer Stelle giebt
auch eine Gleichungsform der Mercator-Kurven an und schlägt
se Bezeichnung vor.*

7. Den eigentümlichen Charakter der Mercator-Kurven erkennen w
t recht, wenn wir ihre Rektifikation versuchen. Für die Kurve 11)
d:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\varepsilon \operatorname{tang}\xi, \tag{14}$$

ist also der Neigungswinkel an einer Stelle der Kurve gegen die
eiteltangente dem Abstande des Kurvenpunktes von der nächst-
egenen Symmetrieaxe gleich. Für das Linienelement ergiebt sich:

$$ds = \frac{d\xi}{\cos\xi}. \tag{15}$$

Aus der Gleichung 9) folgt:

$$d\eta = \frac{-m\sin\xi\, d\xi}{\sqrt{m^2\cos\xi^2 - 1}}, \quad d\xi = \frac{-\frac{1}{m}\mathfrak{Sin}\,\eta\, d\eta}{\sqrt{1 - \frac{1}{m^2}\mathfrak{Cos}\,\eta^2}},$$

für das Linienelement:

$$ds = \frac{\sqrt{1-m^2}\cdot d\xi}{\sqrt{1 - m^2\cos\xi^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}\cdot d\eta}{\sqrt{1-\frac{1}{m^2}\mathfrak{Cos}\,\eta^2}}, \tag{16}$$

r:

* Auch Herr **Greenhill** hat, wie ich nachträglich bemerke, einen Ansatz
Behandlung dieser Kurven gemacht (Messenger of Mathem., Bd. XVI und XX),
er **Sumner**sche Linien nennt. Er erwähnt ihre Rektifikation durch elliptische
grale, indessen teilt er nicht mit, wie sie, indem man die Bogenlänge durch
le Koordinaten ausdrückt, naturgemäss auf die doppelte Periodizität der
tischen Funktionen führen, worin gerade, wie mir scheint, ihr Nutzen für
elementare Theorie dieser Funktionen liegt.

$$17)\quad ds = \frac{d\xi}{\sqrt{1-k_1^2 \sin\xi^2}} = \frac{d\eta}{\sqrt{1+k_2^2 \mathfrak{Sin}\,\eta^2}} = \frac{i\,d\eta'}{\sqrt{1-k_2^2 \sin\eta'^2}},$$

für

$$18)\quad i\eta' = \eta, \quad k_1^2 = \frac{-m^2}{1-m^2}, \quad k_2^2 = \frac{1}{1-m^2};$$

also

$$k_1^2 + k_2^2 = 1.$$

Ebenso folgt aus der Gleichung 10):

$$19)\quad ds = \frac{\sqrt{1+n^2}\cdot d\xi}{\sqrt{1+n^2\sin\xi^2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\cdot d\eta}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\,\mathfrak{Sin}\,\eta^2}},$$

oder

$$20)\quad ds = \frac{d\xi}{\sqrt{1-k_1'^2 \cos\xi^2}} = \frac{d\eta}{\sqrt{1-k_2'^2 \mathfrak{Cos}\,\eta^2}} = \frac{i\,d\eta'}{\sqrt{1-k_2'^2 \cos\eta'^2}}$$

für

$$21)\quad i\eta' = \eta, \quad k_1'^2 = \frac{n^2}{1+n^2}, \quad k_2'^2 = \frac{1}{1+n^2},$$

also

$$k_1'^2 + k_2'^2 = 1.$$

Die Bogenlängen der Mercator-Kurven drücken s[ich] durch elliptische Integrale erster Gattung aus. [Die] Grössen $\cos\xi$, $\sin\xi$, $\mathfrak{Cos}\,\eta$, $\mathfrak{Sin}\,\eta$ sind für einen Punkt der [M.-]Kurve gleich den mit gewissen Konstanten multiplizierten ell[iptischen] Funktionen $\sin\mathrm{am}\, s$, $\cos\mathrm{am}\, s$, $\Delta\mathrm{am}\, s$ des zugehörigen, von [einer be]stimmten Stelle aus gerechneten Bogens s. Die Perioden [ergeben] sich durch Integration nach ξ über Vielfache von [π,] nach η über Vielfache von πi.

8. Wenn man die Kurven der Mercatorschen Bildebene ε, [die] Kreisen der Kugel entsprechen, als Mercator-Kurven erster [Ordnung] bezeichnet, so hätte man dementsprechend Mercator-Kurven [zweiter] Ordnung diejenigen Kurven zu nennen, die sich durch [das Ver]schwinden einer homogenen quadratischen Funktion der vier [Grössen]

$$\cos\xi, \quad \sin\xi, \quad \mathfrak{Cos}\,\eta, \quad \mathfrak{Sin}\,\eta$$

darstellen. Diese Kurven hängen infolge der identischen Rela[tion]

$$22)\quad \cos\xi^2 + \sin\xi^2 = \mathfrak{Cos}\,\eta^2 - \mathfrak{Sin}\,\eta^2$$

von acht Parametern ab und entsprechen den sphärischen Ku[rven, die] durch beliebige Kegel zweiten Grades aus der Kugel ausges[chnitten] werden.

9. Man kann aber aus der Gesamtheit der Mercator-Kurven [zweiter] Ordnung noch eine besondere Gattung herausgreifen, deren G[leichung] die Veränderlichen ξ und η in keinem Gliede vereinigt enth[ält und] die Form hat:

$$23)\quad \begin{cases} \alpha_1\cos\xi^2 + 2\alpha_2\cos\xi\sin\xi + \alpha_3\sin\xi^2 = \\ \beta_1\mathfrak{Cos}\,\eta^2 + 2\beta_2\mathfrak{Cos}\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,\eta + \beta_3\mathfrak{Sin}\,\eta^2. \end{cases}$$

Diese Gleichung geht, wenn man in sie die verdoppelt[en Ver]änderlichen:

24) $$\mathfrak{x}' = 2\mathfrak{x}, \quad \eta' = 2\eta$$

führt, in die folgende über:

25) $$\begin{cases} (\alpha_1 - \alpha_3)\cos\mathfrak{x}' + 2\alpha_2 \sin\mathfrak{x}' + (\alpha_1 + \alpha_3) = \\ (\beta_1 + \beta_3)\mathfrak{Cos}\,\eta' + 2\beta_2 \mathfrak{Sin}\,\eta' + (\beta_1 - \beta_3), \end{cases}$$

e dieselbe Form hat wie die Gleichung der Mercator-Kurven erster dnung, nur dass ein konstantes Glied hinzugetreten ist. Die so rgestellten Kurven lassen sich durch blosse Parallelverschiebung auf e folgenden Formen zurückführen:

26) $$p\cos\mathfrak{x}' + q = \mathfrak{Cos}\,\eta' \text{ (erster Typus)},$$

27) $$s\sin\mathfrak{x}' + t = \mathfrak{Sin}\,\eta' \text{ (zweiter Typus)},$$

zu ein Übergangstypus:

28) $$k\cos\mathfrak{x}' + \mathfrak{x} = e^{\varepsilon\eta}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Die Kurve gehört zum ersten Typus, wenn in ihrer allgemeinen eichungsform $(\beta_1 + \beta_3)^2 > 4\beta_2^2$, zum zweiten, wenn $(\beta_1 + \beta_3)^2 < 4\beta_2^2$, d zum Übergangstypus, wenn $(\beta_1 + \beta_3)^2 = 4\beta_2^2$ ist (vergl. 3).

10. Um die Bedeutung dieser Unterscheidung klarzulegen, gehen r darauf zurück, dass die Kurve 23) der sphärischen Kurve ent- richt, die durch die Gleichung:

29) $$\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 = \beta_1 + 2\beta_2 z + \beta_3 z^2$$

Verbindung mit der Kugelgleichung:

30) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

rgestellt wird. Von den vier Kegeln, die durch diese sphärische rve gehen, sind zwei Cylinder, deren Axen in der Äquatorebene gen und mit den Hauptaxen der Kegelschnitte:

$$\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 = \text{const.}$$

sammenfallen. Von den beiden anderen Kegeln ist die z-Axe eine uptaxe, und ihre Mittelpunkte sind auf derselben durch die qua- tische Gleichung zu bestimmen:

31) $$(\beta_1 + \lambda) + 2\beta_2 z + (\beta_3 - \lambda)z^2 = 0,$$

der λ so zu wählen ist, dass die Diskriminante der Gleichung, nlich:

$$(\beta_1 + \lambda)(\beta_3 - \lambda) - \beta_2^2,$$

rschwindet. Also gilt für λ die quadratische Gleichung:

32) $$\lambda^2 + (\beta_1 - \beta_3)\lambda + (\beta_2^2 - \beta_1\beta_3) = 0.$$

e Diskriminante dieser Gleichung ihrerseits ist:

33) $$B = \left(\frac{\beta_1 + \beta_3}{2}\right)^2 - \beta_2^2.$$

$B > 0$, also

$$\left(\frac{\beta_1 + \beta_3}{2}\right)^2 > \beta_2^2,$$

sind die beiden Kegelmittelpunkte reell, und gleichzeitig gehört die rve der Mercator-Ebene zum ersten Typus; ist $B < 0$, so sind die

beiden Kegel imaginär, und die Mercator-Kurve gehört zum zweiten Typus. In den beiden Fällen sind auch die zugehörigen sphärischen Kurven von verschiedener Art, im ersten Falle erhalten wir eine aus zwei getrennten Zügen bestehende und im zweiten Falle eine einzügige Kurve. Im Grenzfalle $B = 0$ wird:

$$\beta_2 = \varepsilon \frac{\beta_1 + \beta_3}{2}, \qquad \lambda = \pm \frac{\beta_1 - \beta_3}{2}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

und wenn wir dies in die Gleichung für die Koordinaten der Kegelmittelpunkte einsetzen:

$$z = -\varepsilon.$$

In diesem Falle ergiebt sich also nur ein einziger Kegel, dessen Mittelpunkt auf der Kugel in einem der beiden Pole liegt, und die sphärische Kurve hat einen Doppelpunkt.

11. Der Gleichung 26), die den Mercator-Kurven des ersten Typus entspricht, lässt sich durch Wiedereinführung der Veränderlichen ξ, η die Form geben:

$$34) \qquad A \cos \xi^2 + B \sin \xi^2 = \mathfrak{Sin}\, \eta^2$$

indem man setzt:

$$35) \qquad A = \frac{1}{2}(-1 + p + q) \quad B = \frac{1}{2}(-1 - p + q).$$

Die zu dieser Gleichung gehörige Kurve korrespondiert dem sphärischen Kegelschnitt, der durch den Kegel

$$36) \qquad Ax^2 + By^2 = z^2$$

ausgeschnitten wird. Der Schar konfokaler Kegelschnitte:

$$37) \qquad \frac{x^2}{a - \varrho} + \frac{y^2}{b - \varrho} = \frac{z^2}{\varrho},$$

wo ϱ einen variabelen Parameter bezeichnet, ist somit ein isothermisches Kurvensystem:

$$38) \qquad \frac{\cos \xi^2}{a - \varrho} + \frac{\sin \xi^2}{b - \varrho} = \frac{\mathfrak{Sin}\, \eta^2}{\varrho}$$

zugewiesen, das durch Figur 3 veranschaulicht wird. Die Kurven desselben teilen sich in zwei Gattungen, und zwar ist jede Kurve der einen Gattung orthogonal zu allen Kurven, die der anderen Gattung angehören. Die Kurven der ersten Gattung, für die $a - \varrho$ und $b - \varrho$ beide das Vorzeichen von ϱ haben, bestehen aus zwei kongruenten, wellenähnlichen Zügen von der Wellenlänge π, die symmetrisch oberhalb und unterhalb der ξ-Axe liegen; die Kurven der zweiten Gattung, für die $a - \varrho$ und $b - \varrho$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, bestehen aus getrennten Ovalen. Diese sind für die ξ-Axe und je eine Parallele zur η-Axe symmetrisch, haben also Mittelpunkte, die im Abstande π auf der ξ-Axe nebeneinander liegen. Den reellen gemeinsamen Brennpunkten der sphärischen Kegelschnitte entspricht eine doppelte Punktreihe, die sich, wenn $a - b$ das Vorzeichen von b hat, ausdrückt wie folgt:

$$\xi = n\pi, \quad \eta = \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{b}{a-b}},$$

n beliebige ganze Zahl,

um deren Punkte sich die Kurven der ersten und zweiten ung immer mehr zusammenziehen, jemehr sich der Parameter dem zwerte b nähert.

12. Die Kurven 28) des Übergangstypus, deren entsprechende en auf der Kugel aus einem Pol derselben durch quadratische l projiziert werden, bilden sich, wenn man aus diesem Pol die Kugel auf die Äquatorebene projiziert, in der letzteren als lschnitte ab, die mit dem Äquatorkreise konzentrisch sind. Der kalen Kegelschnittschar

$$\frac{X^2}{a-\varrho} + \frac{Y^2}{b-\varrho} = 1$$

richt (siehe Gleichung 12) das Kurvensystem:

$$\frac{\cos \xi^2}{a-\varrho} + \frac{\sin \xi^2}{b-\varrho} = \varepsilon^{-2\varepsilon\eta}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Auch die Kurven dieses Systems zerfallen in zwei Gattungen, t, dass zwei orthogonale Kurven stets verschiedenen Gattungen ıören. Sei

$$b < a$$

halten wir nur dann eine reelle Kurve, wenn $\varrho < a$, und zwar Kurve erster Gattung, wenn $\varrho < b$, eine Kurve zweiter Gattung, ϱ zwischen b und a liegt. Die Kurven der ersten Gattung be- n aus einem einzigen wellenähnlichen Zug. Die einzelnen Wellen, ie Länge π haben, sind vom tiefsten zum tiefsten oder vom ten zum höchsten Punkt gerechnet, kongruent und gegen eine ele zur η-Axe symmetrisch. Die Kurven der zweiten Gattung ıen ebenfalls aus symmetrischen Teilen, die aus einander durch hiebung um Vielfache von π in der Richtung der ξ-Axe hervor- , die einzelnen Teile sind aber völlig getrennt und schicken je Aste ins Unendliche parallel zur η-Axe. Figur 4 stellt Kurven Gattungen dar.

Den gemeinsamen Brennpunktepaaren der Kegelschnitte 40) ent- ıen zwei Punktreihen:

$$\begin{cases} \xi = n\pi, & \eta = \varepsilon \log\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}, \\[2ex] \xi = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, & \eta = \varepsilon \log\sqrt{\dfrac{1}{b-a}}, \end{cases}$$

n beliebige ganze Zahl,

enen immer eine reell und eine imaginär ist.

13. Um die Gleichung 41) auf die Form 28) zu bringen, setze man

43) $$r = \varrho - \frac{a+b}{2}, \quad c = \frac{a-b}{2},$$

so wird sie:

44) $$c \cos \xi' + r = (c^2 - r^2) e^{2\eta'}.$$

Durch Veränderung von r erhalten wir die verschiedenen Kurven des isothermischen Systems, und zwar eine Kurve erster Gattung, wenn $r < -c$, eine Kurve zweiter Gattung, wenn $-c < r < +c$. Ist $r > c$, so wird die Kurve imaginär. Für $r = 0$ ist die Kurve nur durch den Maßstab von den Kurven 8) verschieden.

14. Suchen wir noch die Bilder der Mercator-Kurven des ersten und zweiten Typus in der Äquatorebene, so ist zu beachten, dass, wie sich die Kurven des ersten Typus auf die Bilder der sphärischen Kurven:

45) $$Ax^2 + By^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

zurückführen liessen, die Kurven des zweiten Typus auf die Bilder der Kurven:

46) $$A'x^2 + B'y^2 = z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

reduziert werden können. Dann findet man mit Hilfe der Beziehungen

47) $$X = \frac{x}{1+z}, \quad Y = \frac{y}{1+z}, \quad X^2 + Y^2 = \frac{1-z}{1+z}$$

als Bild der Kurve 45) und der zugehörigen Mercator-Kurve in der Äquatorebene:

48) $$(X^2 + Y^2 - 1)^2 = 4AX^2 + 4BY^2$$

und als Bild der Kurve 46) und der entsprechenden Mercator-Kurve des zweiten Typus:

49) $$(X^2 + Y^2)^2 + 4A'X^2 + 4B'Y^2 = 1.$$

Diese Kurven sind identisch mit den von Siebeck im 57. Bande des Crelleschen Journals behandelten, auf die die durch die elliptischen Funktionen Jacobis vermittelten konformen Abbildungen zweier Ebenen aufeinander hinleiten, und stellen die drei verschiedenen Arten dieser Kurven dar, auf gewisse Normalformen reduziert. Die Gleichung 48) giebt eine Kurve der ersten oder zweiten Art, je nachdem A und B gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, je nachdem also die zugehörige Mercator-Kurve des ersten Typus von der ersten oder zweiten Gattung ist.

Das Problem der 15 Pensionatsdamen.

Von

A. F. H. Mertelsmann,

Hamburg.

Das Problem der 15 Pensionatsdamen lautet: „Die Vorsteherin eines Pensionats wünscht die 15 Damen ihrer Pension täglich in fünf Reihen zu je dreien spazieren gehen zu lassen. Wie ist die Anordnung zu treffen, damit im Laufe einer Woche jede Dame mit jeder anderen einmal in derselben Reihe zusammengeht?“

Die Aufgabe wurde zuerst im Jahre 1850 von Kirkmann in einer englischen Zeitschrift veröffentlicht. Englische Mathematiker haben dann das Problem verschiedentlich behandelt. In deutscher Sprache findet sich die Aufgabe nebst einer Lösung, jedoch ohne Angabe der Lösungsmethode, in Professor Schuberts „Zwölf Geduldspielen“ (Berlin 1895). Rouse Ball führt in seinen „Mathematical Recreations“ zwei Lösungsweisen an. Die eine, von Mr. Anstice stammend, giebt drei verschiedene Lösungen, während die andere, von Mr. Frost herrührend, 15 567 552000 Lösungen liefert.

Der Verfasser dieser Arbeit, dem kürzlich die Aufgabe vorgelegt wurde, fand, ohne Kenntnis von den früheren Arbeiten zu haben, die im folgenden näher beschriebene Lösungsmethode, nach welcher sich, wie weiter unten gezeigt werden wird, über 15 Billionen verschiedene Lösungen ergeben.

Man bezeichne je drei am Sonntage zusammengehende Damen mit gleichen Buchstaben, die durch die Ziffern 1, 2, 3 unterschieden sind. Die Anordnung für den Sonntag würde also diese Form haben:

$$a_1\, a_2\, a_3$$
$$b_1\, b_2\, b_3$$
$$c_1\, c_2\, c_3$$
$$d_1\, d_2\, d_3$$
$$e_1\, e_2\, e_3.$$

Nunmehr kommt es darauf an, für die übrigen sechs Tage der Woche $6 \cdot 5 = 30$ Kombinationen aufzustellen, die den Forderungen

des Problems entsprechen. Sehen wir zunächst von den Ind so haben wir zur Bildung der Kombinationen die fünf Elemen c, d, e. Die Kombinationen mit Wiederholung sind nach den ungen der Aufgabe und in Rücksicht auf die Anordnung am ausgeschlossen. Es lassen sich folgende Kombinationen zu j bilden: abc, abd, abe, ade, ace, acd, bcd, bce, bde, cde. Jede stabe kommt darin 6mal vor. Da an jedem der sechs Tage jede stabe 3mal auftreten muss, ist jede Kombination 3mal zu ve Das giebt 30 Kombinationen.

Es erübrigt, die Indices in richtiger Weise zu verteilen. wir jedesmal die drei aus gleichen Elementen gebildeten Kombi unter einander, so ist nur nötig, die Ziffern für die erst bination jeder Gruppe zu bestimmen; in den beiden folgenden Ziffern cyklisch zu erhöhen.

Wir wählen zuerst die 6·3 Kombinationen, welche a e Dieselben seien so geschrieben, dass je zwei unter einander Gruppen ausser a kein gemeinschaftliches Glied haben.

I.	II.	III.
$a_1 b_1 c_1$	$a_1 b_2 d_2$	$a_1 b_3 e_3$
$a_2 b_2 c_2$	$a_2 b_3 d_3$	$a_2 b_1 e_1$
$a_3 b_3 c_3$	$a_3 b_1 d_1$	$a_3 b_2 e_2$

IV.	V.	VI.
$a_1 d_1 e_1$	$a_1 c_2 e_2$	$a_1 c_3 d_3$
$a_2 d_2 e_2$	$a_2 c_3 e_3$	$a_2 c_1 d_1$
$a_3 d_3 e_3$	$a_3 c_1 e_1$	$a_3 c_2 d_2$

Für jeden einzelnen der mit a_1 verbundenen Buchstaben wir, von links nach rechts fortschreitend, die Ziffern 1, 2, 3; scheint b_1 in Gruppe I, b_2 in Gruppe II, b_3 in Gruppe III mit bunden, während z. B. d_1, d_2, d_3 nach einander in Gruppe IV, VI auftreten.

Es handelt sich weiter um die drei Gruppen, deren Kombi mit b beginnen.

VII.	VIII.	IX.
$b_1 c_2 d_3$	$b_1 c_3 e_2$	$b_1 d_2 e_3$
$b_2 c_3 d_1$	$b_2 c_1 e_3$	$b_2 d_3 e_1$
$b_3 c_1 d_2$	$b_3 c_2 e_1$	$b_3 d_1 e_2$

Da b_1 bereits in Gruppe I mit c_1 verbunden, geben wir c die Ziffer 2 und in VIII die Ziffer 3. Für d ergiebt sich dann und VI in VII die Ziffer 3, so dass für IX die Ziffer 2 bleibt. bestimmt sich für e in VIII der Index 2 und in IX der Index

Für die letzte noch übrige Gruppe:

X.

$c_1\,d_3\,e_2$
$c_2\,d_1\,e_3$
$c_3\,d_2\,e_1$

bt sich leicht, dass d die Ziffer 3 und e eine 2 erhalten muss.

Nachdem so 30 Kombinationen richtig gebildet sind, schreiten zu der Aufgabe, dieselben auf die sechs Tage Montag bis Sonn-l in entsprechender Weise zu verteilen. Dies kann in dreifacher e geschehen.

Erste Anordnung (A_1).

Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
$a_1\,b_1\,c_1$	$a_1\,b_2\,d_2$	$a_1\,b_3\,e_3$	$a_1\,d_1\,e_1$	$a_1\,c_2\,e_2$	$a_1\,c_3\,d_3$
$a_2\,b_2\,c_2$	$a_2\,b_3\,d_3$	$a_2\,b_1\,e_1$	$a_2\,d_2\,e_2$	$a_2\,c_3\,e_3$	$a_2\,c_1\,d_1$
$a_3\,d_3\,e_3$	$a_3\,c_1\,e_1$	$a_3\,c_2\,d_2$	$a_3\,b_3\,c_3$	$a_3\,b_1\,d_1$	$a_3\,b_2\,e_2$
$b_3\,d_1\,e_2$	$b_1\,c_3\,e_2$	$b_2\,c_3\,d_1$	$b_1\,c_2\,d_3$	$b_2\,c_1\,d_2$	$b_3\,c_2\,e_3$
$c_3\,d_2\,e_1$	$c_2\,d_1\,e_3$	$c_1\,d_3\,e_2$	$b_2\,c_1\,e_3$	$b_3\,d_3\,e_1$	$b_1\,d_2\,e_1$

Als erste Reihen schreibe man die mit a_1 gebildeten sechs Kom-ionen aus Gruppe I bis VI. Mit a_2 wiederhole man dieselben staben, während a_3 mit den beiden an dem betreffenden Tage nicht aufgetretenen Buchstaben zu verbinden ist. Für die beiden fehlenden Reihen ergiebt sich z. B. für Montag, dass b und c je einmal, d und e hingegen noch je zweimal auftreten müssen. heissen die vierte und fünfte Reihe bde und cde. Die dazu ge-de Bezifferung ergiebt sich aus den zusammengestellten Kom-ionen in Gruppe IX und X. Ebenso sind die übrigen Tage leicht lden.

Zwei andere Anordnungen derselben Kombinationen ergeben sich, man, statt a_1 und a_2 an demselben Tage mit gleichen Buch-n zu kombinieren, a_1 und a_3 oder a_2 und a_3 diese Auszeichnung il werden lässt.

Zweite Anordnung (A_2).

Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
$a_1\,b_1\,c_1$	$a_1\,b_2\,d_2$	$a_1\,b_3\,e_3$	$a_1\,d_1\,e_1$	$a_1\,c_2\,e_2$	$a_1\,c_3\,d_3$
$a_2\,d_2\,e_2$	$a_2\,c_3\,e_3$	$a_2\,c_1\,d_1$	$a_2\,b_2\,c_2$	$a_2\,b_3\,d_3$	$a_2\,b_1\,e_1$
$a_3\,b_3\,c_3$	$a_3\,b_1\,d_1$	$a_3\,b_2\,e_2$	$a_3\,d_3\,e_3$	$a_3\,c_1\,e_1$	$a_3\,c_2\,d_2$
$b_2\,d_3\,e_1$	$b_3\,c_2\,e_1$	$b_1\,c_2\,d_3$	$b_3\,c_1\,d_2$	$b_2\,c_3\,d_1$	$b_2\,c_1\,e_3$
$c_2\,d_1\,e_3$	$c_1\,d_3\,e_2$	$c_3\,d_2\,e_1$	$b_1\,c_3\,e_2$	$b_1\,d_2\,e_3$	$b_3\,d_1\,e_2$

Dritte Anordnung (A_3).

Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabe
$a_1 b_1 c_1$	$a_1 b_2 d_2$	$a_1 b_3 e_3$	$a_1 d_1 e_1$	$a_1 c_2 e_2$	$a_1 c_3$ d
$a_2 d_2 e_2$	$a_2 c_3 e_3$	$a_2 c_1 d_1$	$a_2 b_2 c_2$	$a_2 b_3 d_3$	$a_2 b_1$ e
$a_3 d_3 e_3$	$a_3 c_1 e_1$	$a_3 c_2 d_2$	$a_3 b_3 c_3$	$a_3 b_1 d_1$	$a_3 b_2$ c
$b_2 c_3 d_1$	$b_1 c_2 d_3$	$b_1 c_3 e_2$	$b_1 d_2 e_3$	$b_2 c_1 e_3$	$b_3 c_1$ d
$b_3 c_2 e_1$	$b_3 d_1 e_2$	$b_2 d_3 c_1$	$c_1 d_3 e_2$	$c_3 d_2 e_1$	$c_2 d_1$ e

Die bei jeder der drei obigen Lösungen gebrauchten 3 binationen lassen sich endlich noch zu neun verschiedenen Anord die den Forderungen des Problems entsprechen, verwerten, we nicht mehr an der anfänglichen Ordnung des Sonntags festhält

B_1

Sonntag.	Montag.	Donnerstag.
$a_1 a_2 a_3$	$a_1 b_1 c_1$	$a_1 d_1 e_1$
$b_1 c_2 d_3$	$a_2 b_2 c_2$	$a_2 d_2 e_2$
$b_2 c_1 e_3$	$a_3 b_3 c_3$	$a_3 d_3 e_3$
$b_3 d_1 e_2$	$d_1 d_2 d_3$	$b_1 b_2 b_3$
$c_3 d_2 e_1$	$e_1 e_2 e_3$	$c_1 c_2 c_3$

Übrige Tage wie A_1.

B_2

Sonntag.	Montag und Donne
$a_1 a_2 a_3$	wie B_1
$b_3 c_1 d_2$	
$b_1 c_3 e_2$	
$b_2 d_3 e_1$	
$c_2 d_1 e_3$	

Übrige Tage wie A_2.

B_3

Sonntag.	Montag und Donnerstag.
$a_1 a_2 a_3$	wie B_1
$b_2 c_3 d_1$	
$b_3 c_2 e_1$	
$b_1 d_2 e_3$	
$c_1 d_3 e_2$	

Übrige Tage wie A_3.

C_1

Sonntag.	Dienstag.	Freitag.
$a_1 a_2 a_3$	$a_1 b_2 d_2$	$a_1 c_2 e_2$
$b_3 c_1 d_2$	$a_2 b_3 d_3$	$a_2 c_3 e_3$
$b_1 c_3 e_2$	$a_3 b_1 d_1$	$a_3 c_1 e_1$
$b_2 d_3 e_1$	$c_1 c_2 c_3$	$b_1 b_2 b_3$
$c_2 d_1 e_3$	$e_1 e_2 e_3$	$d_1 d_2 d_3$

Übrige Tage wie A_1.

C_2

Sonntag.	Dienstag und Frei
$a_1 a_2 a_3$	wie C_1
$b_2 c_3 d_1$	
$b_3 c_2 e_1$	
$b_1 d_2 e_3$	
$c_1 d_3 e_2$	

Übrige Tage wie A_2.

C_3

Sonntag.	Dienstag und Freitag.
$a_1\,a_2\,a_3$	wie C_1
$b_1\,c_2\,d_3$	
$b_2\,c_1\,e_3$	
$b_3\,d_1\,e_2$	
$c_3\,d_2\,e_1$	

Übrige Tage wie A_3.

D_1

ntag.	Mittwoch.	Sonnabend.
$a_2\,a_3$	$a_1\,b_3\,e_3$	$a_1\,c_3\,d_3$
$c_3\,d_1$	$a_2\,b_1\,e_1$	$a_2\,c_1\,d_1$
$c_2\,e_1$	$a_3\,b_2\,e_2$	$a_3\,c_2\,d_2$
$d_2\,e_3$	$c_1\,c_2\,c_3$	$b_1\,b_2\,b_3$
$d_3\,e_2$	$d_1\,d_2\,d_3$	$e_1\,e_2\,e_3$

Übrige Tage wie A_1.

D_2

Sonntag.	Mittwoch u. Sonnabend.
$a_1\,a_2\,a_3$	wie D_1.
$b_1\,c_2\,d_3$	
$b_2\,c_1\,e_3$	
$b_3\,d_1\,e_2$	
$c_3\,d_2\,e_1$	

Übrige Tage wie A_2.

D_3

Sonntag.	Mittwoch u. Sonnabend.
$a_1\,a_2\,a_3$	wie D_1
$b_3\,c_1\,d_2$	
$b_1\,c_3\,e_2$	
$b_2\,d_3\,e_1$	
$c_2\,d_1\,e_3$	

Übrige Tage wie A_3.

ünscht man aus einer bekannten Lösung eine andere abzuleiten, ucht man nur die 15 Glieder durch eine beliebige Permutation en zu ersetzen, also etwa

$$\begin{array}{ccccc} a_1\,a_2\,a_3 & b_1\,b_2\,b_3 & c_1\,c_2\,c_3 & d_1\,d_2\,d_3 & e_1\,e_2\,e_3 \\ b_2\,e_3\,d_2 & b_3\,a_2\,d_1 & c_3\,e_2\,a_1 & c_1\,e_1\,c_2 & a_3\,b_1\,d_3. \end{array}$$

a die Anzahl dieser Permutationen

1 307 674 368 000

, so ergeben sich ebensoviele Kombinationsgruppen, deren jede ungen liefert. Die Gesamtzahl der Lösungen ist also das Zwölf- ener Zahl, das ist

15 692 092 416 000.

rotz dieser grossen Zahl von Lösungsmöglichkeiten ist es nicht zwei Wochen so zusammenzustellen, dass beide keine Kom-

bination gemeinsam haben. Die beiden folgenden Lösungen entsprechen dieser Forderung. Die bezifferten Buchstaben sind hier durch die fortlaufenden Nummern 1 bis 15 ersetzt.

Erste Woche.

Sonntag.	Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
1 2 3	1 4 7	1 5 11	1 6 15	1 10 13	1 8 14	1 9 12
4 5 6	2 5 8	2 6 12	2 4 13	2 11 14	2 9 15	2 7 10
7 8 9	3 12 15	3 7 13	3 8 11	3 6 9	3 4 10	3 5 14
10 11 12	6 10 14	4 9 14	5 9 10	4 8 12	5 12 13	4 11 15
13 14 15	9 11 13	8 10 15	7 12 14	5 7 15	6 7 11	6 8 13

Zweite Woche.

Sonntag.	Montag.	Dienstag.	Mittwoch.	Donnerstag.	Freitag.	Sonnabend.
1 2 6	1 4 8	1 5 15	1 9 13	1 3 11	1 12 14	1 7 10
4 5 9	2 5 12	2 9 10	2 3 4	2 14 15	2 7 13	2 8 11
7 8 12	3 7 15	3 6 8	5 7 11	4 10 12	3 5 10	3 9 12
10 11 15	6 10 13	4 7 14	6 12 15	5 8 13	4 6 11	5 6 14
3 13 14	9 11 14	11 12 13	8 10 14	6 7 9	8 9 15	4 13 15

Unmöglich scheint es mir, die von Prof. Sylvester aufgestellte Forderung zu erfüllen, die sämtlichen aus den 15 Gliedern möglichen 455 Dreierkombinationen auf die 13 Wochen eines Vierteljahres so zu verteilen, dass während desselben die gleichen 3 Personen nicht mehr als einmal zusammengehen, während für jede einzelne Woche die früheren Forderungen bestehen bleiben.

Zur Hesse'schen Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten.

Von J. Thomae in Jena.

Hesse scheint der erste gewesen zu sein, der eine Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten linear zu konstruieren gelehrt hat (Crelles Journal Bd. 24). Da Hesse die neun Punkte als reale voraussetzt und zur vollständigen Lösung der Aufgabe zuerst von einem Kegelschnitte fünf Punkte bestimmt, und die weiteren Punkte mit Hilfe dieses Kegelschnittes findet, so erweckt es den Anschein, als ob seine Konstruktion nicht von völliger Allgemeinheit, und, da er einen Hilfskegelschnitt benutzt, nicht von vollkommener Unmittelbarkeit sei. Sieht man jedoch genauer hin,

findet man, dass die von Hesse angewandten Prinzipien hinreichen, Aufgabe völlig allgemein und unmittelbar zu lösen, und dass es nur Hinzufügung weniger Striche bedarf um seine Zeichnung zu einer voll-mmenen zu machen. Diese Ergänzung soll hier gegeben werden. Dabei me ich an, um nicht besondere Fälle unterscheiden zu müssen, dass t vier von den gegebenen Punkten in einer Ebene liegen, was übrigens Erleichterung der Problemlösung bedeuten würde. Dass es wenigstens Lösung der Aufgabe in allen Fällen giebt, setze ich als bekannt aus.

Wir formulieren die Aufgabe so: Sind neun Punkte gegeben, von en beliebig viele Paare aggregiert ideale (konjugiert imaginäre) sein nen, so soll

I. In einer beliebigen Ebene ε das Polarsystem linear konstruiert werden, dessen Kernkurve der Kegelschnitt (ε, F) ist, den die Ebene ε aus der gesuchten Fläche F herausschneidet).

II. Auf einer beliebigen Geraden g soll die Involution linear gefunden werden, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte (g, F) sind, oder die der Fläche F konjugiert ist.

III. Auf einer Geraden g durch einen reellen der gegebenen Punkte soll der zweite Schnittpunkt mit F linear bestimmt werden.

Die Aufgabe III wird offenbar durch die Lösung der Aufgabe II von st erledigt, weil das Problem, den zweiten Doppelpunkt einer Involution konstruieren, deren erster gegeben ist, eine bekannte lineare Lösung hat.

Die neun Punkte seien $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, $M_3 M'_3$, $M_4 M'_4$, M_5, die en vier Paare mögen bez. auf den Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$ liegen, und wenn nicht real sind, als Doppelpunkte von Involutionen auf diesen Geraden eben sein.

Hesse konstruiert die Polare eines Punktes P für die gesuchte Fläche F folgender Weise. Er sucht zunächst die Polare von P für das Hyper-oid $(g_1 g_2 M_3 M'_3 M_5)$, welches die Geraden $g_1 g_2$ und die Punkte $M_3 M'_3 M_5$ hält. Hesse setzt dabei $M_3 M'_3$ als reale Punkte voraus, was jedoch t nötig ist. Es sei k_{12} die Gerade durch M_5, die $g_1 g_2$ trifft. Gleitet Gerade h über $g_1 g_2 g_3$, so erzeugt sie in der Ebene (P, k_{12}) einen elschnitt K_{12}, dessen Punkte durch Vermittelung der Geraden h Punkten der Geraden g_3 projektiv zugeordnet sind. Der Involution g_3 entspricht eine Involution auf K_{12}, deren Axe a_{12} in bekannter ise linear gefunden wird. Sie ist die Gerade, die die Ebene (P, k_{12}) en k_{12} noch aus dem Hyperboloid herausschneidet. Die Gerade l nun, die P durch $a_{12} k_{12}$ harmonisch getrennt ist, gehört der Polarebene von P das Hyperboloid $(g_1 g_2 M_3 M'_3 M_5)$ an. — Ist k'_{12} eine beliebige $g_1 g_2 a_{12}$ fende Gerade, so gehört sie demselben Hyperboloide an, man findet wie in — oder da jetzt von dem Hyperboloid drei Erzeugende einer Schar annt sind, auch auf andere Weise — die Gerade a'_{12}, die die Ebenen $k'_{12})$ neben k'_{12} aus dem Hyperboloide schneidet. Die Gerade l', die

von P durch $a'_{12}k'_{12}$ harmonisch getrennt ist, gehört ebenfalls der Polarebene von P für das Hyperboloid an. Die Geraden ll' bestimmen die Polarebene von P für das Hyperboloid.

Konstruiert man auf gleiche Weise die Polarebenen von P für die Hyperboloide $(g_1 M_2 M'_2 g_3 M_5)(M_1 M'_1 g_2 g_3 M_5)$, so liefert der Schnittpunkt der drei Polarebenen den Punkt Q_4, der P für alle Flächen zweiter Ordnung durch die sieben Punkte $M_1 M_2 M_3 M'_1 M'_2 M'_3 M_5$, oder wie wir kürzer sagen wollen, der P für diese sieben Punkte konjugiert ist.

Der besondere Fall, dass der Punkt Q_4 durch die eben gegebene Konstruktion nicht als ein völlig bestimmter zu erbringen ist, soll zuletzt besonders besprochen werden.

Es seien $Q_2 Q_3 Q_4$ die bez. P für die Gruppen von sieben Punkten

$$M_1 M'_1 M_3 M'_3 M_4 M'_4 M_5, \quad M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_4 M'_4 M_5,$$
$$M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 M_5$$

konjugierten Punkte, so ist die Ebene $\pi \equiv (Q_2 Q_3 Q_4)$ die Polarebene von P für die durch die neun Punkte gehende Fläche F.

Liegen die neun Punkte in einer Kurve vierter Ordnung erster Spezies, so giebt es unendlich viele Flächen zweiter Ordnung durch sie. Für jede derselben müssen $Q_2 Q_3 Q_4$ dem Punkte P konjugiert sein, und es müssen deshalb diese drei Punkte auf einer Geraden liegen. Umgekehrt können, wenn die neun Punkte nicht auf einer Kurve vierter Ordnung liegen, die Punkte $Q_2 Q_3 Q_4$ für allgemeine Lagen von P nicht in einer Geraden liegen, weil dies für angebbare spezielle Lagen von P nicht statthat. Man vergleiche hierüber meine Untersuchungen in den Leipziger Berichten vom 3. Mai 1897 S. 319.

Nun seien $P_1 P_2 P_3$ drei Punkte einer Ebene ε und $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ seien ihre Polaren für die Fläche F, $p_1 p_2 p_3$ deren Schnittlinien mit ε, also die Polaren von $P_1 P_2 P_3$ für den Kegelschnitt (ε, F). Alsdann ist das Polarsystem. dessen Kernkurve (ε, F) ist, durch die drei Paare Pol und Polare $P_1 p_1$, $P_2 p_2$, $P_3 p_3$ völlig bestimmt. Auf jeder Geraden g in ε ist durch diese drei Paare Pol und Polare die Involution linear bestimmt, die der Kurve (ε, F) konjugiert ist, und es ist die Aufgabe II gelöst, sobald für das Ausgesprochene der Nachweis der Richtigkeit erbracht ist.

Die gerade Verbindungslinie der Punkte $P_\mu P_{\mu'}$ werde mit $p_{\mu\mu'}$ bezeichnet, ebenso kann der Schnittpunkt von $p_\mu p_{\mu'}$ mit $P_{\mu\mu'}$ bezeichnet werden, es ist dann $P_{\mu\mu'}$ der Pol von $p_{\mu\mu'}$.

Auf $p_{\mu\mu'}$ sind die Punkte $P_\mu (p_\mu p_{\mu\mu'})$, $P_{\mu'} (p_{\mu'} p_{\mu\mu'})$, auf p_μ sind die Punkte $P_{\mu\mu''}(p_\mu p_{\mu\mu'})$, $P_{\mu\mu''}(p_\mu p_{\mu\mu''})$ Paare der Involution, die (ε, F) konjugiert ist, deren Doppelpunkte (ε, F) angehören. — Ist Q ein Punkt auf einer der Linien p z. B. auf p_1, so ist die Polare q von Q dadurch, dass sie durch P_1 und den Q in der Involution $P_{12}(p_1 p_{12}) \cdot P_{13}(p_1 p_{13})$ zugehörigen Punkt gehen muss, bestimmt.

Um die (ε, F) konjugierte Involution auf einer Geraden g in ε zu konstruieren, bestimme man zu den Punkten $(g p_1)$, $(g p_2)$ die Polaren,

reffen g in Punkten, die mit $(gp_1)(gp_2)$ Paare der gesuchten Involution
ı und diese somit geben. Damit ist die Aufgabe II gelöst. Man
, wenn g gegeben ist, die Konstruktion dadurch erleichtern, dass man
auf g wählt.

Um der Aufgabe III gemäss auf einer Geraden g durch M_5 den zweiten
ttpunkt mit F zu finden, braucht man, da M_5 sich selbst konjugiert
ur zu einem einzigen Punkt P auf g die Polare zu konstruieren. Trifft
in Q, so ist der zweite in bekannter Weise linear zu findende Doppel-
: der Involution

$$M_5 M_5 \cdot QP \ldots$$

Schnittpunkt von g mit F.

Nun betrachten wir noch den Fall, dass der dem Punkte P für sieben
ene Punkte konjugierte Punkt Q auf die hier gegebene Weise nicht zu
ı ist. — Die drei Hyperboloide:

$$(g_1 g_2 M_3 M'_3 M_5)(g_1 M_2 M'_2 g_3 M_5)(M_1 M'_1 g_2 g_3 M_5)$$

iden sich paarweise in je einer Geraden und einer Kurve dritter Ord-
Sind die drei Geraden $g_1 g_2 g_3$ verschieden, was sich bei der hier über
egebenen Punkte gemachten Annahme, dass nicht vier in einer Ebene
ı sollen, von selbst versteht, so sind die drei Hyperboloide von
der linear unabhängig selbst dann, wenn sie eine Kurve dritter Ord-
gemein haben sollten. Zu einem Punkt P gehört daher ein und nur
unkt Q. Enthält aber eins von den drei Hyperboloiden alle drei ge-
Linien $g_1 g_2 g_3$, liegt M_5 in einer $g_1 g_2 g_3$ schneidenden Geraden, so
die drei Hyperboloide identisch, man kann dann Q nicht auf die an-
ene Weise finden, wenigstens, wenn $M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3$ aggregirt
Paare sind, so dass man diese Punkte zu zweien nur durch die
len $g_1 g_2 g_3$ real miteinander verbinden kann.

Die Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$ lassen sich auf viererlei Weise in Tripel
ieren. Liegt M_5 in einer Geraden, die nur die Geraden eines dieser
l trifft, so wählt man zur Konstruktion die drei andern Tripel. Liegt
M_5 in einer Geraden, welche die Geraden zweier Tripel, die also alle
Geraden $g_1 g_2 g_3 g_4$ trifft, so hat man wirklich einen singulären Fall,
m die gegebenen Mittel zur Konstruktion nicht ausreichen. Folgendes
umständliches und daher der Vereinfachung entgegensehendes Ver-
n führt dann zum Ziel.

Auf einer Geraden durch M_5 wähle man drei Punkte LMN und
ruiere die Polaren $\lambda \mu \nu$ von P für die Flächen

$$(M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 M_4 M'_4 L) \quad (M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 M_4 M'_4 M)$$
$$(M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 M_4 M'_4 N),$$

bilden einen LMN projektiven Ebenenbüschel $\lambda \mu \nu$. Die in dieser
ktivität

$$LMNM_5, \ldots \;\overline{\wedge}\; \lambda \mu \nu \pi \ldots$$

ntsprechende Ebene π ist die Polare von P fur die Fläche F.

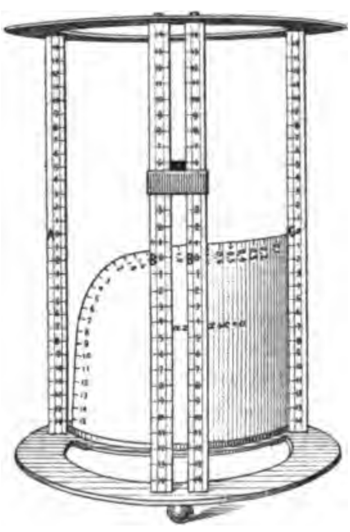
Will man mit v. Staudt nur das räumliche Polarsystem bestimmen, dessen Kernfläche F ist, so ist auch dies Problem durch Hesse gelöst, denn er lehrt ja zu jedem Punkte die Polarebene finden. — Inzwischen ist von Herrn H. Boegehold eine ausführliche Abhandlung (als Dissertation, Jena 1898) über diesen Gegenstand veröffentlicht worden.

Über einen Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen mit vier oder fünf Gliedern.

Von **R. Mehmke** in Stuttgart.

Von mehreren Seiten dazu aufgefordert, werde ich in dieser Zeitschrift einige von mir konstruierte Apparate zur mechanischen Auflösung numerischer Gleichungen vorführen, die sich 1893 auf der mathematischen Ausstellung in München befunden haben, deren, durch keine Abbildungen unterstützte Beschreibungen aber, die ich in dem Katalog jener Ausstellung gegeben habe, allerdings ungenügend erscheinen mögen.

Ich beginne mit dem nachstehend abgebildeten Apparate, der am meisten Interesse erregt zu haben scheint und in mehreren Schriften erwähnt worden ist, trotzdem er für den praktischen Gebrauch vielleicht weniger in Betracht kommt als einige andere.



Dieser Apparat beruht auf einer sehr allgemeinen Methode, Funktionen mit mehreren Veränderlichen räumlich darzustellen. Denkt man sich vier beliebige Kurven im Raume mit bezifferten Einteilungen („Skalen") irgend welcher Art versehen, so müssen die Zahlenwerte t, u, v, w, die zu vier Teilpunkten, von denen jeder sich auf einer anderen Skala befinden soll, gehören, eine bestimmte Gleichung $F(t, u, v, w) = 0$ erfüllen, damit jene Punkte in einer und derselben Ebene liegen. Sind von einem dieser Gleichung genügenden Wertsysteme drei Werte, z. B. u, v, w, gegeben, so lässt sich der vierte Wert, t, geometrisch dadurch finden, dass man die zu den Werten u, v, w gehörigen Punkte der betreffenden Skalen durch eine Ebene verbindet und den am Schnittpunkt derselben mit dem Träger der vierten Skala stehenden Wert abliest. Weitere Veränderliche können unter Umständen berücksichtigt werden, indem man eine oder mehrere der Kurven durch Scharen solcher ersetzt.*

* Noch nicht lange erst habe ich bemerkt, dass August Adler schon 1886 dieselben Gedanken ausgesprochen hat (Wiener Berichte Bd. 94, 2. Abteilung, S. 423). Die Frage, unter welcher Bedingung eine gegebene Funktion F einer derartigen Behandlung zugänglich ist, bleibt noch zu beantworten.

Im vorliegenden Beispiele sind zur Unterbringung von u, v, w drei gewöhnliche Skalen (gleichförmige Teilungen) mit gleicher Längeneinheit auf drei zu einander parallelen Geraden, die wir die u-, v- und w-Axe nennen wollen, benützt. (Bei dem abgebildeten Apparate befinden sich die erste und dritte Skala an den inneren Kanten der mit A und C bezeichneten senkrechten Stäbe, die zweite ist nicht wirklich vorhanden, sondern in der Mitte zwischen den beiden vorderen, mit B bezeichneten Stäben zu denken. Die feine Öffnung in dem vornen sichtbaren Schieber kann auf jeden Punkt dieser gedachten Skala mit Hilfe der Skalen auf den Stäben B gestellt werden. Die Nullpunkte liegen in einer zu den Axen senkrechten Ebene.)

Erteilt man den Nullpunkten der genannten Skalen die Gewichte λ, μ, ν, so wird auf der durch ihren Schwerpunkt gehenden Parallelen zu den Axen von der Ebene, welche die Skalenpunkte u, v, w verbindet, d. h. auf den Axen die Abschnitte u, v, w — die wir die Parallel-Koordinaten der Ebene nennen wollen — bildet, das Stück

$$s = \frac{\lambda u + \mu v + \nu w}{\lambda + \mu + \nu}$$

abgeschnitten, sodass die in u, v, w lineare Gleichung

$$1) \qquad \lambda u + \mu v + \nu w - (\lambda + \mu + \nu) s = 0$$

besteht. Jede Ebene, deren Parallel-Koordinaten u, v, w dieser Gleichung genügen, geht offenbar durch den Punkt, der durch die Zahlen λ, μ, ν und den Abschnitt s bestimmt ist; 1) ist die Gleichung dieses Punktes.

Soll nun eine viergliedrige Gleichung mit der Unbekannten t, etwa

$$2) \qquad t^m + at^n + bt^p + c = 0,$$

worin die Exponenten m, n, p bestimmte Werte haben, aufgelöst werden, so kann man 1) und 2) in Übereinstimmung bringen, indem man

$$3) \qquad u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

und

$$4) \qquad \lambda = t^n, \quad \mu = t^p, \quad \nu = 1, \quad s = -\frac{t^m}{t^n + t^p + 1}$$

setzt. Zu jedem Werte von t gehört nach 4) ein bestimmter Punkt (λ, μ, ν, s); giebt man t eine Reihe äquidistanter Werte, so liefern die zugehörigen Punkte eine krummlinige Skala, deren Träger, wie leicht einzusehen ist, auf einer (bloss von den Exponenten n, p abhängigen) Cylinderfläche liegt, welche die u- und w-Axe als Mantellinien enthält. (Im Falle $n = 2$, $p = 1$ ergiebt sich ein Kreiscylinder, wenn als Querschnitt des Axensystems ein gleichseitiges Dreieck genommen wird.) Es genügt der zwischen den Axen liegende, den positiven Werten von t entsprechende Teil jener Skala. (Dem Apparate ist für vollständige kubische, einfach reduzierte biquadratische und zweifach reduzierte Gleichungen fünften Grades je eine, an ihrem oberen Rande mit der betreffenden Skala versehene, cylindrisch ge-

bogene Blechschablone beigegeben. Ist eine solche Gleichung für gegebene Werte von a, b, c aufzulösen, so setzt man die richtige Schablone auf, stellt den Schieber auf den Punkt b der v-Skala, verbindet die Punkte a und c der u- bezw. w-Skala durch einen Faden, den man mit beiden Händen gespannt hält, und sieht durch die Öffnung des Schiebers nach dem Faden hin, dann lassen sich an den scheinbaren Schnittpunkten des Fadens mit der krummlinigen Skala die positiven Wurzeln der Gleichung ablesen. Etwaige negative Wurzeln ergeben sich, wenn $-t$ statt t gesetzt und die neue Gleichung ebenso behandelt wird.) Im Falle einer Gleichung mit fünf Gliedern $t^m + at^n + bt^p + ct^q + d = 0$ kann man

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c, \quad \lambda = t^n, \quad \mu = t^p, \quad \nu = t^q,$$
$$s = -\frac{t^m + d}{t^n + t^p + t^q}$$

setzen. Statt einer Kurve erhält man jetzt eine Kurvenschar mit dem Parameter d, welche auf einem, wieder durch die u- und w-Axe gehenden Cylinder liegt. (Die Verwirklichung ist möglich, wenn man entweder den Faden vor dem Cylinder so gespannt hält, dass er, durch die Öffnung des Schiebers gesehen, scheinbar durch die Punkte a und c der u- bezw. w-Skala geht, oder einen durchsichtigen Cylinder benützt. Abzulesen ist an den scheinbaren Schnittpunkten des Fadens mit der zum Werte d gehörigen Kurve.)

Bemerkungen. Obiger Apparat lässt sich als räumliche Verallgemeinerung der graphischen Tafeln („Abaques") von M. d'Ocagne zur Auflösung numerischer Gleichungen mit drei oder vier Gliedern ansehen*, die ihrerseits durch Anwendung des Prinzips der Reziprozität aus gewissen Abacus von Lalanne** hervorgegangen sind. Parallel-Koordinaten, aber nur von geraden Linien in der Ebene, sind von K. Schwering 1874 eingeführt***, von M. d'Ocagne ebenfalls gefunden (s. a. a. O.) und ausgiebig verwendet worden, während Adler sie nicht erwähnt.

* Annales des ponts et chaussées, 1884, 2ème semestre, p. 531; Nomographie, Paris 1891; s. auch W. Dyck, Katalog mathematischer Modelle, Nachtrag, München 1893, S. 9, Nr. 40d.

** S. Dycks Katalog, Nachtrag, S. 8, 40a.

*** Jahresbericht für 1874 des Westfälischen Provinzialvereins, S. 149.

Berichtigungen.

Seite 245 Zeile 10 v. o. lies $\omega(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})Pa$ statt $\omega(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})Pa$,

„ 246 „ 11 v. o. lies $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\overline{QR}$ statt $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \overline{QR}$,

„ 250 „ 1 und 2 v. o. sind die Worte „allein oder" zu streichen,

„ 258 „ 7 v. u. streiche „sind gleich lang und",

„ 266 „ 4 v. u. letzter Summand lies abc für dbc.

0 R.

Verzeichnis von Abhandlungen

aus der

ngewandten Mathematik

die im Jahre 1897 in technischen Zeitschriften erschienen sind.

Zusammengestellt von **R. Mehmke.**

Beilage

zur Zeitschrift für Mathematik und Physik
43. Jahrgang 1898 4. u. 5. Heft.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1898.

Abkürzungen für die Titel der ausgezogenen Zeitschrift

A. B. = (Wiener) Allgemeine Bauzeitung, 62. Jahrgang.
A. M. = Annales des Mines, 9me série, t. 11 et 12.
A. P. Ch. = Annales des Ponts et Chaussées, 7me série, 7me année, Ier, I et IVme trimestre.
B. = The Builder, vol. 72.
C. B. = Centralblatt der Bauverwaltung, 17. Jahrgang.
D. B. = Deutsche Bauzeitung, 31. Jahrgang.
E. = The Engineer, vol. 84.
Eg. = Engineering, vol. 43 and vol. 44.
N. A. C. = Nouvelles Annales de la Construction, 5e série, t. 4 (43e anné
P. J. = (Dinglers) Polytechnisches Journal, Bde. 303, 304, 305 und 306.
Schw. B. = Schweizerische Bauzeitung, Bde. 29 und 30.
Z. A. I. = Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Bd. 43 (neue Fo Heft-Ausgabe.
Z. B. = Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 47.
Z. I. = Zeitschrift für Instrumentenkunde, 17. Jahrgang.
Z. Ö. I. A. V. = Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten 49. Jahrgang.
Z. V. = Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 26.
Z. V. D. I. = Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. 41.
V. V. G. = Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiss, Jahrgang 76.

Abbildungen.

dan, Zur Theorie der konformen Projektionen, Z.V., S. 145—148.

ıgatsch, Zur ebenen rechtwinkeligen Abbildung der Soldnerschen Koordinaten, Z.V., S. 431—436.

Akustik.

rmhoefel, Centralbau oder Langhaus? Eine Erörterung der Schallverhältnisse in Kirchen, Z.B., S. 330—346.

Ausflussmenge, s. Hydrodynamik.

Ausgleichungsrechnung, Fehlertheorie.

ümcke, Zur Jordanschen Theorie des Maximalfehlers, Z. V., S. 51—54, 276—281, 561—562.

, Polygonometrische Berechnungen mit Nebenbedingungen, Z. V., S. 208—213.

ge, Zur Methode der kleinsten Quadrate, Z.V., S. 454—456.

Jhlich, Stations-Ausgleichung von nicht vollkommen symmetrischen Beobachtungssätzen nach der Besselschen Methode, Z.V., S. 465—480.

Balken, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Dampfmaschinen, s. Reibung, Tafeln (graphische), Wärmetheorie.

Blockwerke.

n Boda, Die Stromlauf-Formeln und ihre Anwendung zur Schaltung Siemensscher Blockwerke, Z.Ö.I.A.V., S. 620—624, 634—636, 647—652, 664 bis666.

Brücken, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Dampfcylinder, s. Wärmetheorie.

pfmaschinen, s. Dynamik, Reibung, Tafeln (graphische), Wärmetheorie.

Druckverteilung, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Dynamik.

gler und A. Ulbrich, Das Anlaufen der Fördermaschinen aus jeder Kurbelstellung, Z.V.D.I. S. 974—975.

rd Knoller, Die Massenwirkungen der Dampfmaschinen und ihre Balanzierung, Z.Ö.I.A.V., S. 277—281.

enz, Die Massenwirkungen am Kurbelgetriebe und ihre Ausgleichung bei mehrkurbligen Maschinen. Z.V.D.I., S. 998—1003, 1026—1031 (Bemerkung dazu von R. Knoller und Erwiderung von H. Lorenz, S. 1371).

Kohn, Ermittelung des Ungleichförmigkeitsgrades von Dampfmaschinen, Z.Ö.I.A.V., S. 161—163; s. auch Reibung.

ssfläche, Einflusslinien, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Statik.

Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Der Begriff der Elastizität, C.B., S. 68. — A. Föppl und Fr. Engesser, Zum Begriffe der Elastizität, ebenda S. 102—103. — Kirsch, Über die Bestimmung der Elastizität fester Körper, ebenda S. 170—171. — Fr. Engesser, Zum Begriffe der Elastizität, ebenda S. 204.

h, Untersuchungen von Granit in Bezug auf Zug-, Druck-, Biegungs- und Schubfestigkeit, sowie in Hinsicht auf Zug-, Druck- und Biegungselastizität.

Allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen, Z.V.D.I., S. 241—252.

pl, Die Zugfestigkeit des Cements, C.B., S. 6—8. (Bemerkung dazu von K. Dümmler, S. 28, Entgegnung von A. Föppl, S. 43.)

W. Carling, Zur Berechnung der Betonbalken, Z.Ö.I.A.V., S. 163—164. (N trag S. 165—166; Erwiderung von A. Föppl, S. 166; Bemerkung von A. Han S. 191.)
Fr. v. Emperger, Zur Theorie der verstärkten Betonplatte, Z.Ö.I.A.V., S bis 355, 364—367, 402.
R. Latowsky, Die Biegungselastizität bei Körpern von ungleicher Festig Z.V.D.I., S. 941—943.
Bruno Schulz, Beitrag zur Biegungsfestigkeit, C.B., S. 264—265 (Bemer dazu von H. Reissner, ebenda S. 516; Entgegnung von Bruno Schulz, eb S. 528).
M. R. v. Thullie, Über die Berechnung der Monierplatten, Z.Ö.I.A.V., S. 193—
R. F. Mayer, Über die Bedingungen einer gleichförmigen Druckverteilung in Fundamenten, Z.Ö.I.A.V., S. 116—118.
Josef Ant. Spitzer, Druckverteilung in gebrochenen Fundamentflächen, I.A.V., S. 96—97 (Bemerkungen dazu von Melan, S. 129, 187; Entgegnu von Spitzer, S. 152—153, 187).
M. Grübler, Der Spannungszustand in Schleifsteinen und Schmirgelsche Z.V.D.I., S. 860—864.
Hofmann, Die Spannungen in auf Biegung beanspruchten Stein- oder B platten, D.B., S. 638—639.
H., Spannungsverteilung im Mauerwerk, D.B., S. 438.
G. Lang, Spannungsverteilung im Mauerwerk, sowie bei anderen Baustoffen wechselndem Elastizitätsmaß, D.B., S. 58—59.
Joh. Hermanek, Einfluss von Temperaturschwankungen auf Beton-Eisen struktionen, Z.Ö.I.A.V., S. 694—695.
Md. Kinkel, Einflusslinien des gelenklosen Bogens, Schw.B., Bd. 30, S. 142— 151—153, 163—165.
Mehrtens, Summen-Einflusslinien und A-Polygone, C.B., S. 178—179.
Franz Podhajský, Beitrag zur Lehre von den Belastungs-Äquivalenzen, Z A.V., S. 377—381, 393—397.
Fritz v. Emperger, Die Knickfestigkeit in Theorie, Versuch und Praxis, Z A.V., S. 661—664, 677—682, 695—698 (Bemerkungen dazu von L. v. Tetm A. Ostenfeld, Rudolf Bredt, Prof. Melan, A. J. Du Bois, Mansfield, Merri R.F. Mayer, Prof. Brik, S. 708—717, 722—726; Erwiderung von F. v. Empe S. 726—730).
—Z.—, Die Eulersche Knickformel, C.B., S. 440.
C. Bach, Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengung fla Böden, Z.V.D.I., S. 1157—1163, 1191—1197, 1218—1226.
A. Föppl, Versuche über die Elastizität des Erdbodens, C.B., S. 276—278.
Dupuy et Cuënot, Barêmes destinés à faciliter le calculs des ponts métall à une ou plusieurs travées, 2e partie, poutres continues, A.P.Ch. p. 91—270.
Fr. Engesser, Über die Angriffe eiserner Balkenbrücken auf Pfeiler und W lager, C.B., S. 341—345.
—— Über Gitterträger, Schw.B., Bd. 29, S. 24.
L. Geusen, Beitrag zur Berechnung des Zweigelenkbogens unter Einwir wagerechter und schräger Kräfte, Z.Ö.I.A.V., S. 557—561.
A. Meves, Beitrag zur Frage der Querschnittsermittelung kontinuierlicher B balken, Z.V.D.I., S. 166—169.
G. Rogie, Note sur la recherche des efforts maxima développés en un p dans une poutre horizontale à une travée par le passage d'un train, A.P II, p. 313—333.
A. Zschetzsche, Berechnung von Bogenbrücken bei Wirkung seitlicher Kr Z.A.I., S. 242—291.
Ramisch, Ermittelung der Spannkräfte in den Wandgliedern eines ebenen F werkbalkens, C.B., S. 488, 511.
Robert Land, Die Einflussfläche der Spannkraft eines Zwischenstabes für einfaches Fachwerk, C.B., S. 466—468, 490.
M. Westphal, Berechnung der Festigkeit loser und fester Flansche, Z.V. S. 1036—1042.
H., Zur Konstruktion mit Erde hinterfüllter, symmetrischer Brückengewölbe, S. 26—28.

ıs Hohlgewölbe im Brückenbau, D.B., S. 210—211.
Iermanek, Einfluss von Temperaturschwankungen auf Gewölbe, Z.Ö.I.A.V., S. 419—427.
Iermanek, Einfluss geneigter Niveletten auf symmetrische Gewölbe, Z.Ö. I.A.V., S. 565—567.
tay, Note sur le calcul de la poussée des voûtes, A.P.Ch., II, S. 334—341.
lle, Die steife Kettenlinie, Z.V.D.I., S. 855—860.
Vianello, Die Doppelkonsole, Z.V.D.I., S. 1275—1279.
treau, Mémoire sur les profils des barrages en maçonnerie, A.P.Ch., I, p. 90—192.
r, Zur Querschnittberechnung trapezförmiger Stützmauern, C.B., S. 182—183.
S. auch Maßstäbe, Momente, Statik.

Erddruck.

gels, Zur Frage der Richtung des Erddrucks auf Stützmauern, C.B., S. 144—146.
' Francke, Der Erddruck der Stützwände, Z.A.I., S. 338—351.
› Schulz, Beitrag zur Theorie des Erddrucks, Z.A.I., S. 626—643.

Erdgestalt.

oth, Über die Bestimmung der Erdgestalt durch Verbindung von astronomischen und geodätischen Messungen, Z.V., S. 607—614.
Fachwerk, s. Statik.
Fehler, s. Ausgleichungsrechnung.
Festigkeitslehre, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.
Fördermaschinen, s. Dynamik.

Geodäsie.

ger, Zur Theorie rechtwinkliger geodätischer Koordinaten, Z.V., S. 441—453.
t Schreiber, Zur Transformation Soldnerscher Koordinaten, Z.V., S. 321-327.
S. auch Abbildungen, Erdgestalt.

Geschichte der Mathematik, Biographien.

mmer, Altbabylonischer Felderplan, Z.V., S. 681—684.
rdan, Bohnenberger (mit Bild), Z.V., S. 417—431.
)ie Leibnizsche Rechenmaschine, Z.V., S. 289—315.
n Christian Nehls † (mit Bild), C.B., S. 411.
Gewölbe, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Gezeiten.

ıdey, Der Einfluss des Windes und des Luftdruckes auf die Gezeiten, C.B., S. 441—442.

Hebedaumen.

'orm der Hebedaumen, P.J., Bd. 303, S. 202—205.

Hydrodynamik, Hydraulik, Hydrographie.

:in, Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, A.P.Ch, IV, p. 20—70.
.li, Bestimmung der Wassergeschwindigkeit in Druckleitungen, Sch.B., Bd. 30, S. 134—135.
Löwenstein, Wasserleitung mit konstantem Druckverluste, Z.Ö.I.A.V., S. 485 (Erwiderung auf einen Aufsatz von Rob. Bobretzky, S. 436—437).
mund, Die Veränderung der Geschwindigkeiten im Querschnitte eines Stromes, Z.B., S. 303—328, 465—472, 585—610.
ıiges über die Bemessung der Lichtweite von Flussbrücken, D.B., S. 599.
bens, Die Schwankungen des Wasserspiegels in bewegten Schleusentrögen, D.B., S. 165.
bach, Das Gesetz des Schiffswiderstandes, D.B., S. 467—470, 479—482, 504.
ehn, Bemerkungen zu der Berechnung des Schiffswiderstandes, Z.Ö.I.A.V., S. 232—233 (Antwort von Th. Maryniak, S. 384—385, Entgegnung von W. Riehn, S. 464).

E. Heubach, Ein Beitrag zur Wasserstandsvorhersage, D.B., S. 370—374, 4
S. auch Schiffsbau, Tafeln (graphische).
Kettenlinie, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre.
Koordinaten, s. Abbildungen, Geodäsie.
Krempeln, s. Technologie.
Kurbelgetriebe, s. Dynamik.

Kurven.

G. Féderscher, Einführung von Parallelgeleisen in eine bestehende K
Schw.B., Bd. 29, S. 93—94.
S. auch Zeicheninstrumente.
Logarithmen, s. Tafeln (graphische und numerische).
Lokomotiven, s. Stabilität, Wärmetheorie.

Magnetismus.

G. Klingenberg, Längenänderung und Magnetisierung von Eisen und S
V.V.G., S. 124—155.

Mafsstäbe.

R. Land, Über die Maßstäbe bei der zeichnerischen Lösung technischer Aufg
Z.A.I., S. 291—302.

Messinstrumente.

Johs. A. F. Engel, Ein neuer Apparat zur Bestimmung der Unregelmässigk
von Drehbewegungen, P.J., Bd. 303, S. 207—212.
H. Fahlenkamp, Druckwechsel-Diagrammapparat für Kurbelzapfen im Be
befindlicher Maschinen, V.V.G., S. 66—68.
A. Fliegner, Ein neues Momentenplanimeter, Schw.B., Bd. 29, S. 135—138.
merkungen dazu von J. Amsler-Laffon, S. 146—147; Erwiderung
A. Fliegner, S. 147.)
E. Hammer, Neue Kontrollschienen für gewöhnliche Polarplanimeter,
S. 115—116; D.B., S. 434—435.
Gus. C. Henning, Tragbarer Arbeitszeichner, Z.V.D.I., S. 1230—1231.
J. Lüroth, Ein Instrument zur Messung von Potentialdifferenzen, Z.V., S. 15

Momente.

L. Geusen, Zur Berechnung von statischen und Trägheitsmomenten von V
profilen, Z.V.D.I., S. 972—973.
R. Land, Die Säulenmomente als Darstellung der Flächenmomente zweiter
nung und ihre einfache Anwendung in der Mechanik und Festigkeitsl
Z.V.D.I., S. 1246—1252.
Nietverbindungen, s. Reibung.
Nomographie, s. Tafeln, graphische.

Optik.

R. Steinheil, Über die Berechnung zweilinsiger Objektive, Z.I., S. 338—34
Planimeter, s. Messinstrumente.
Polygone, regelmässige, s. Zeicheninstrumente.

Potentialtheorie.

Holzmüller, Mechanisch-technische Plaudereien, Z.V.D.I, S. 218—222, 257—
706—712, 747—752, 1146—1150.
Projektionen, s. Abbildungen.

Proportionierung.

W. R. Corson, The use of practical geometry in designing buildings, B.I, p. 53-
W. Schultz, Der Tempel der Diana Propylaea zu Eleusis. Darlegung der
monie seiner Verhältnisse, des in seinen Abmessungen enthaltenen Zal
systems, der geometrischen Grundlagen seiner Gestaltung und des
Zwecke der Proportionierung eingeschlagenen Verfahrens, A.B., S. 16-

Rechen-Instrumente und -Maschinen.

Arthur Burkhardt, Die Leibnizsche Rechenmaschine, Z.V., S. 392—398.
Sliderule for investors, Eg, vol. 43, p. 175.

esnewsky, Der barometrische Rechenstab (hypsometrisches Lineal), Z.I., S. 335—338, — s. auch Geschichte der Mathematik.

Rechnen, numerisches.

rt Land, Über den Gebrauch der Rechentafel von Dr. H. Zimmermann, C.B., S. 297—298, — s. auch Trigonometrie.

Regulatoren.

. Hartung, M. Tolle, Richard Knoller, Beiträge zur Beurteilung der Centrifugalpendelregulatoren, Z.V.D.I., S. 238—239, 414—416.

Reibung.

ann Brauner, Ein Beitrag zur Beurteilung der zusätzlichen Reibung bei Dampfmaschinen, Z.V.D.I., S. 1340—1343.

Untersuchungen über den Reibungswiderstand von Nietverbindungen, Z.V.D.I., S. 739—747, 768—774.

Schaltung, s. Blockwerke.

Schieberdiagramm.

3rix, Das bizentrische polare Excenterschieberdiagramm, Z.V.D.I., S. 431—434.

Schiffsbau.

en, Konstruktion von Schiffsschrauben, Z.V.D.I., S. 590—591.

dward J. Reed, Advances made in the mathematical theory of Naval Architecture, E., p. 67—68, 80—81, 119, — s. auch Hydrodynamik, Stabilität.

Schneckengetriebe.

ibeck, Versuche mit Schneckengetrieben zur Erlangung der Unterlagen für ihre Berechnung und zur Klarstellung ihres Verhaltens im Betriebe. Zahnform und Eingriffverhältnisse der Getriebe, Z.V.D.I., S. 936—941, 968—972.

Schwingungen.

tter, Die Schwingungen des neuen Kirchturms in Enge, Schw.B., Bd. 29, S. 42—44, 48—52.

Spannungen, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Statik.

Stabilität.

ır Standsicherheits-Untersuchung gewölbter Brücken, D.B., S. 403—404.

ice Lévy, Sur les diverses manières d'appliquer la règle du trapèze au calcul de la stabilité des barrages en maçonneries, A.P.Ch., IV, p. 5—19.

dal, Théorie de la stabilité des locomotives, A.P.Ch., III, p. 271—311.

hromm, Über verschiedene Methoden der Stabilitätsbestimmung von Schiffen, Z.Ö.I.A.V., S. 509—514, 519—525, 534—538.

Statik (insbes. graphische).

Bittner, Einflusslinien für die Spannungen der Gitterstäbe beim Parabelträger, Z.Ö.I.A.V., S. 449—450.

hny, Die inneren Stabkräfte eines belasteten Fachwerkringes, graphisch ermittelt, Schw.B., Bd. 29, S. 142—145.

y, Méthode pour l'analyse des lignes d'influence expérimentales, A.P.Ch., IV, p. 207—213.

ibner, Bemerkungen über räumliches Fachwerk, Z.V.D.I., S. 477—482. (Bemerkungen dazu von R. Kohfahl und Erwiderung von A. Hübner, S. 632—635.)

sch, Entwurf des Seilecks von einem System in einer Ebene wirksamer Kräfte, welches durch drei gegebene Punkte der Ebene geht, C.B., S. 491.

sskothen, Beitrag zur synthetischen Untersuchung der Normal-Spannungen in geraden Stäben, D.B., S. 443—448.

Steigung.

omme, Détermination de la déclivité maximum à adopter pour franchir les grandes hauteurs, A.P.Ch., II, p. 369—376.

Stromlauf, s. Blockwerke.

Stützmauern, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Erddruck.

Tafeln, graphische.

G. Dariès, Application de la Nomographie au calcul des conduites d'eau la formule de M. Maurice Lévy, N.A.C., p. 113—118, Pl. 33.
Rateau, Abaque des consommations théoriques d'une machine à vapeur et loi relative à la vapeur d'eau, A.M., t. 11, p. 242—249.
Anton Tichy, Graphische Logarithmentafeln, Z.Ö.I.A.V., S. 289—290.

Tafeln, numerische.

H. Sossna, Tafelberichtigungen (Fehler in Schuberts 5stelliger Logarithm Z.V., S. 405—406.

Technologie, mechanische.

Hermann Fischer, Die Grösse der Widerstände gegen das Abheben von spänen, Z.V.D.I., S. 504—508.
Alfred Haussner, Die Theorie des Krempelns, P.J., Bd. 305, S. 58—63, 105—109, 132—135, 159—161, 181—184.

Tractoriograph, s. Zeicheninstrumente.
Träger, s. Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Statik.
Transcendente Zahlen, s. Zeicheninstrumente.

Trigonometrie und Polygonometrie.

Puller, Allgemeine analytische Lösung für die Aufgaben der trigonome Punktbestimmung, Z.V., S. 335—342.
H. Sossna, Auflösung der Aufgabe der beiden Punktgruppen mittelst M und numerisch-trigonometrischer Tafel, Z.V., S. 649—661;
s. auch Ausgleichungsrechnung.
Ungleichförmigkeitsgrad, s. Dynamik.

Wärmetheorie.

Ugo Ancona, Das Wärmediagramm der gesättigten Dämpfe und seine Anw auf Heiss- und Kaltdampfmaschinen, Z.V.D.I., S. 447—451, 549—
A. Fliegner, Der Übergang der Wärme zwischen dem Dampf und den Wa der Dampfcylinder, Schw.B., Bd. 29, S. 56—59, 65—68, 74—77, 9
J. Hartmann, Über einen Satz der Thermometrie, Z.I, S. 14—20.
Fritz Krauss, Der Diesel-Motor und der Carnotsche Kreisprozess, Z.V.D.I.
Leitzmann, Berechnung der Verbundlokomotiven und ihres Dampfverb Z.V.D.I., S. 1355—1359, 1392—1396.
H. Lorenz, Kälteerzeugung, Z.V.D.I., S. 47—51, 70—74.
E. Meyer, Die Beurteilung der Kreisprozesse von Wärmekraftmaschinen sonderer Berücksichtigung des Diesel-Motors, Z.V.D.I., S. 1108—1
R. Mollier, Über Wärmedurchgang und die darauf bezüglichen Versuchserg Z.V.D.I., S. 153—162, 197—202
J. Nadal, Théorie mathématique de la machine à vapeur. Action des A.M, p. 297—349.
A. Seemann, Über Heissdampfmaschinen, Z.V.D.I., S. 1402—1410, 143 1464—1467.
Siegert, Neuere Berechnungsweisen von Dampfkesselteilen und Untersu verfahren für Dampfmaschinen, Z.V.D.I., S. 23—26.
A. Wöhler, Die Wirksamkeit der Heizrohre in Lokomotivkesseln, Z. S. 1073—1080.

Wassergeschwindigkeit, Wasserstand, s. Hydrodynamik.
Wurzeln (Quadrat- und Kubik-), s. Rechnen, numerisches

Zeicheninstrumente.

Ljubomir Kleritj, Tractoriograph und Konstruktion der transcendenten „π" und „e", sowie Konstruktion der n-seitigen, dem Kreise eingeschr regelmässigen Polygone, P.J., Bd. 305, S. 234—237, 260—263.
G. Rebiček, Über einen Eikurvenzeichner, Z.J., S. 289—292.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Historisch-litterarische Abteilung

der

itschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaktion

von

Dr. R. Mehmke und **Dr. M. Cantor.**

---

43. Band.

Mit in den Text gedruckten Figuren.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1898.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

Seite

II. Rezensionen.

Geschichte der Mathematik.

Philosophie, Didaktik.

Arithmetik, Analysis, Algebra.

Synthetische, analytische, descriptive Geometrie.

Praktische Geometrie. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Kinematik. Mechanik. Physik.

Historisch-litterarische Abteilung.

Rezensionen.

Bemerkung, die Schreibweise Amper betreffend.

Bei Besprechung meiner „Grundzüge der mathematischen Chemie", g 1894, hat Herr Nebel, ohne den Ursprung der von mir anmenen Schreibweise Amper klarzustellen, so starke Worte gegen sie acht, dass es wohl angezeigt erscheint, den Zusammenhang aufzu-. Schon die Bemerkung des Herrn Nebel, dass „ein deutscher ker" die Kürzung Amper eingeführt habe, kommt in etwas andere chtung, wenn man hinzufügt, dass dieser Physiker der Verfasser des nein verbreiteten „Leitfadens der praktischen Physik" ist, in dessen flage 1884 F. Kohlrausch die Schreibweise mit der nach meiner ng vollkommen zutreffenden Begründung einführt: „Bezeichnungen, e jedem Arbeiter geläufig sein sollen, dürfen selbstverständlich keiner dischen Orthographie unterliegen."

Für mich entscheidend war aber überdies, dass 1893, in der Zeit, da ein Buch schrieb, in der Deutschen Physikalisch-technischen Reichst die Absicht bestand, die Schreibweise Amper allgemein einzuführen. hat sich freilich die Reichsanstalt entschieden, nur das è zu ver-n, und schreibt jetzt Ampere.

Zur Sache selbst wäre wohl nur zu bemerken, dass ein guter Geschmack n centimètre im Munde unserer Schneider genug haben sollte und hen müsste, die deutschen Werkmeister mit nasalen Beanspruchungen rschonen. Auch ist es selbstverständlich und wird durch unser Ver- gegenüber dem metrischen Maß bestätigt, dass ein internationales nicht über die nationale Aussprache und Schreibweise verfügt; es keinem Engländer einfallen, seine Schrift mit Zeichen zu belasten, r seinen Leserkreis unverständlich sind. Endlich ist durch die all-ne Annahme der Schreibweise Volt dargethan, dass es nicht die Ab-war, die nationalen Eigennamen als solche im internationalen Maß-e festzuhalten.

G. Helm.

R. Sturm. **Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.** Bd. 1 bis 3, Leipzig, B. G. Teubner, 1892, 1893, 1896.

Die synthetische Geometrie stellt sich bekanntlich die Aufgabe, die geometrischen Gebilde lediglich aus Raumanschauungen heraus zu behandeln, ohne von algebraischen Hilfsmitteln Gebrauch zu machen. Aber in dieser strengsten und zugleich höchsten Form muss sich unsere Wissenschaft entweder auf die liebevolle Bearbeitung eines verhältnismässig sehr kleinen Gebietes beschränken, oder sie muss aus allen Kräften bemüht sein, den geometrischen Inhalt der Hilfsmittel rein darzustellen, deren die analytische Geometrie sich bedient, vor allen Dingen die Schnittpunkttheoreme rein geometrisch begründen. An der endlichen Erreichung dieses Ziels ist heute wohl nicht mehr zu zweifeln. Aber während man auf allen anderen Gebieten der Mathematik den auf Reinheit der Methode gerichteten Bestrebungen mit lebendigem Anteil folgt, werden dieselben auf dem Gebiet der synthetischen Geometrie mit Gleichgiltigkeit beobachtet, und man bringt denselben selbst in Fachkreisen nur geringes Interesse entgegen. Unter diesen Umständen ist es sehr wohl zu verstehen, dass der Verfasser, ursprünglich ein Anhänger jener strengsten Anschauungen, sich mehr und mehr einer vermittelnden Richtung zugewendet hat, welche von den Hilfsmitteln der abzählenden Geometrie, vor allen dem Korrespondenzprinzip den ausgiebigsten Gebrauch macht. Wird man eine derartige Untersuchungsmethode da anstandslos zulassen, wo es sich weniger um die ersten Grundlagen der Wissenschaft, sondern um die Durchmusterung eines abgegrenzten Gebietes handelt, so ist es doch unberechtigt, solche Hilfsmittel da anzuwenden, wo die synthetische Geometrie sehr wohl Mittel an der Hand hat, die Untersuchung mit ihren eigenen Mitteln streng durchzuführen. Schon bei einem der ersten Kapitel haben wir dies störend empfunden.

Mit grossem Interesse haben wir die klaren Auseinandersetzungen des Verfassers über die Hauptziele der Liniengeometrie gelesen. Er deutet schon jetzt an, dass der aus allen Geraden gebildete Raum kein linearer ist, und erläutert an gut gewählten Beispielen die verschiedenen Gebilde der Liniengeometrie. So wird der Komplex dritten Grades der Geraden eingeführt, die auf den Flächen zweiter Ordnung eines Bündels liegen, die Kongruenz [2,6] der Geraden, welche sich auf Flächen eines Büschels befinden. Alsdann werden die Orte der Geraden besprochen, die sich auf 1 bis 4 Leitlinien stützen, es wird gezeigt, wie die Anzahl $2\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4$ der Geraden, die sich auf vier Kurven der Ordnung $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ stützen, durch gemeinschaftliche Punkte der Kurven vermindert wird. Dies wird an der Anzahl der Geraden erläutert, die eine Fläche dritter Ordnung besitzt.

Nachdem das Chasles'sche Korrespondenzprinzip auf die übliche Art entwickelt wurde, bestimmt der Verfasser die Anzahl $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)+\frac{1}{2}\,n_1\,(n_1-1)$

involutorisch zugeordneten Punktepaare einer Korrespondenz (n, n_1), he auf einem rationalen Träger lagert, und gelangt sodann zu den intorischen Korrespondenzen $[n]$. Auf die Betrachtung der Korrespondenz auf den Kegelschnitt gründet sich eine an Hurwitz und Cayley an- pfende Behandlung des Poncelet schen Schliessungsproblems. Wenn in r Korrespondenz (n, n_1) der Ebene m Paare homologer Punkte auf 2 ›big gewählten Geraden liegen, so giebt es $n + n_1 + m$ sich selbst prechende Punkte, sobald nicht eine sich selbst entsprechende Kurve iegt. Hieraus folgt, dass Ebenen, welche durch einen Punkt E gehen aus jeder von zwei Kongruenzen $[m, n]$ und $[m_1, n_1]$ einen Strahl ent- en, deren Kreuzungspunkt einer Ebene E angehört, einen Kegel von Klasse $nn' + mn' + nm'$ umhüllen, während der Kreuzungspunkt eine ve von der Ordnung $mm' + mn' + nm'$ beschreibt. Diese Geraden- e bewirken unter den Ebenen eines beliebigen Bündels eine Korrespondenz $+ n) (m' + n'), (m + n) (m' + n')]$, deren Koincidenzelemente zum aus den Tangentialebenen des Kegels, die dem Bündel angehören, ehen, andererseits aus den Ebenen, welche gemeinschaftliche Strahlen Kongruenzen projizieren. Auf diese von Schubert entlehnte Art ent- elt der Verfasser die Halphensche Zahl $mm' + nn'$ der Strahlen, he zwei Kongruenzen (m, n) und (m', n') mit einander gemein haben. aus lassen sich die anderen Halphenschen Zahlen grossenteils ableiten. Strahlen eines Komplexes, welche eine beliebige Gerade treffen, bilden Kongruenz $[p, p]$. Da dieselbe mit einer Kongruenz $[m, n]$ $p[m + n]$ hlen gemein hat, so liegen die dem Komplex und der Kongruenz $[m, n]$ hörigen Geraden in einer Regelfläche vom Gerade $p[m + n]$. Nur Ermittelung der $p \cdot q$ einer Regelfläche q^{ter} Ordnung und einem Komplex Ordnung gemeinschaftlichen Strahlen macht eine besondere Betrachtung ;. Das Kapitel schliesst ab mit dem Korrespondenzprinzip für eine $_1)$-deutige Beziehung im Raum.

Für die Behandlung der Regelflächen dritter und vierter Ordnung er- nt uns als der beste Ausgangspunkt die Erzeugung mittelst zweier ktivischer Kegelschnitte. Aus der Betrachtung des Büschels kollinearer ıen, welchen sie bestimmen, würde sich mit Leichtigkeit zeigen lassen, die Ebenen aller Kegelschnitte der Fläche im allgemeinen einen hel dritter Ordnung bilden, es würde sich ferner streng zeigen lassen, jeder Ebene desselben zwei Gerade angehören, deren Kreuzungspunkt Raumkurve dritter Ordnung beschreibt, und man würde zum Schluss Ge- über die involutorische Korrespondenz strenge beweisen können, welche dieser Raumkurve durch die Geraden der Flächen hervorgerufen wird. analoge Art lässt sich die Fläche mit zwei Doppelgeraden und die schiefe Fläche dritter Ordnung behandeln. Der Verfasser hat es selbst vorgezogen ein abzählendes Verfahren einzuschlagen; er geht stets von Korrespondenz aus, welche die Geraden der Fläche auf der Doppel- e hervorrufen und gelangt von diesem Ausgangspunkt aus auf geringem n zu der Aufzählung der möglichen Regelflächen dritter und vierter

Ordnung. Aber trotzdem würden wir die oben skizzierte geometrische Herleitung bei weitem vorziehen.

Die für das Nullsystem grundlegende Betrachtung, dass jeder Punkt des Raumes in der entsprechenden Ebene eines reziprok bezogenen Raumes liegen kann, wird mit grosser Klarheit vorgetragen; zunächst wird die Standtsche Darstellung des Nullsystems mit Hilfe eines unebenen aus Leitstrahlen bestehenden Fünfecks gewählt. Es wird gezeigt, dass von zwei reziproken Tetraedern des Nullsystems jeder in der von Möbius zuerst beobachteten Art dem anderen umschrieben ist und dass jeder Strahl des Nullsystems beide Tetraeder unter gleichem Doppelverhältnis trifft. Der letzteren Forderung genügen auch die Geraden aller durch die acht Ecken möglichen ∞^2 Flächen zweiter Ordnung, insgesamt also, wie es sein muss, die Geraden eines Komplexes vierten Grades. Nachdem schon vorläufig gezeigt ist, dass fünf beliebig gewählte Gerade ein Nullsystem bestimmen, wird der Abschnitt durch Betrachtungen über Nullsysteme im allgemeinen beschlossen. Werden durch das Nullsystem einem Punkte α ihn enthaltende Ebene, einer Ebene β in ihr liegende Punkte angeordnet, so kommt noch eine dritte wichtige Zahl γ in Betracht, die Anzahl der Punkte auf einer beliebigen Geraden, deren Nullebene durch dieselbe hindurchgeht. Ordnet man z. B. jeder Ebene die Punkte zu, in denen sie von den Flächen eines einfach unendlichen Systems mit den Charakteristiken μ, ν, ϱ berührt wird, so ist $\alpha=\mu$, $\beta=\nu$, $\gamma=\varrho$. Ordnet man jedem Punkt die Ebenen zu, welche zwei von ihm ausgehende Strahlen einen Kongruenz $[m, n]$ enthalten, so ist $\alpha=\frac{1}{2}m(m-1)$, $\beta=\frac{1}{2}n(n-1)$. Die dritte Zahl ist die wichtige von Schuhmacher eingeführte Artzahl der Kongruenz, sie zeigt, wie oft zwei Strahlen der Kongruenz zugleich mit einer Geraden in einer Ebene liegen und sich auf derselben schneiden.

Ein linearer Komplex besteht nun, wie der Verfasser aus der allgemeinsten Definition heraus ableitet, entweder aus den Strahlen, die eine Gerade treffen, oder aus den Leitstrahlen eines Nullsystems. Die Bezeichnungen „Gebüsch“ und „Gewinde“, die der Verfasser für den besonderen und den allgemeinen Fall einführt, haben die Billigung der Fachgenossen gefunden. Die Untersuchung wendet sich (60 flg.) zunächst den metrischen Verhältnissen zu. Nach Einführung der Durchmesser und der Axe wird in ungemein klarer Weise begründet, dass man rechts und links gewundene Gewinde zu unterscheiden hat, da die Cuspidalkurven aller im Gewinde enthaltenen abwickelbaren Schraubenflächen entweder sämtlich links oder sämtlich rechts gewunden sind.

Einem beliebigen Strahlbüschel wird durch das Nullsystem des Gewindes ein anderer projektivisch angeordnet, der einen Strahl des Gewindes mit ihm entsprechend gemein hat. Alle Strahlen des Gewindes — hierin besteht die Sylvestersche Erzeugung desselben — treffen zwei entsprechende Gerade dieser Büschel. Will man aus fünf gegebenen Strahlen g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 ein Gewinde herstellen, so braucht man nur, wenn zwei

nen α und ξ g_1 enthalten, g_2, g_3, g_4, g_5 in A_2, A_3, A_4, A_5 und X_2, X_4, X_5 treffen, A und X Punkte von g_1 sind,

$$A\,(X\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5) \barwedge X\,(A\,X_2\,X_3\,X_4\,X_5)$$

nachen. Dieses Projektivitätsproblem hat eine einzige Lösung, wenn man nd α als gegen ansieht (74). In einer beliebigen Korrelation des Raumes ngen die Verbindungslinien der Punkte, welche einander in beiderlei e konjugiert sind, ein Gewinde (75).

Da die Regelfläche der Strahlen einer linearen Kongruenz, welche eine bige Gerade treffen, nach der allgemeinen Koincidenzformel vom zweiten le ist, so kann sie als Erzeugnis zweier kollinearer Ebenenbündel dert werden, deren Zentra auf einem Strahle der Kongruenz willkürlich , die aber diesen Strahl g entsprechend gemein haben. Diese von Realität der beiden Leitstrahlen unabhängige Definition zeigt, dass die re Kongruenz durch vier Strahlen eindeutig festgelegt ist. Das hlensystem zeigt sich dabei sogleich als Träger eines Büschels von ren Komplexen. Die Sylvesterschen Erzeugungen derselben stützen auf die Paare homologer Strahlbüschel jener kollinear bezogenen Ebenenlel, welche durch die Verbindungslinie der Zentra hindurchgehen. ndem das Strahlensystem als Erzeugnis geschart-kollinearer Räume ert ist, ergiebt sich naturgemäss, dass zwei beliebige lineare Komplexe Γ_1 ein lineares Strahlensystem gemein haben, das Erzeugnis der gert-kollinearen Punkträume, die vermöge der Nullsysteme von Γ, Γ_1 auf elben Ebenenraum bezogen sind; indem man andere Punkträume aus Büschel der beiden ersten auf den Ebenenraum bezieht, erhält man linearen Komplexe des Büschels (Γ, Γ_1). Zwei homologe Punkte zweier rtigen Räume liegen unter konstantem Doppelverhältnis gegen die en Punkte, in welchen ihre Verbindungslinie die Leitstrahlen des ahlennetzes" treffen. Wird dieses Doppelverhältnis das harmonische, tehen die linearen Komplexe in Involution, es wird das Nullsystem des n durch das Nullsystem des anderen in sich transformiert.

Eine Abbildung des Strahlennetzes wird einmal durch die Spuren seiner den in einer beliebigen Hilfsebene gegeben. Eine Abbildung auf ein haliges Hyperboloid nimmt ihre einfachste Form an, wenn man die Punktn auf den Leitgeraden oder die Ebenenbüschel um dieselben auf die beiden denscharen projektivisch bezieht und jedem Strahl des Netzes den ittpunkt der zugehörigen Geraden des einschaligen Hyperboloids zu-. Jeder Regelfläche des Strahlennetzes entspricht ein Kegelschnitt Hilfsfläche.

Der Verfasser beschäftigt sich näher mit der Axenfläche des Büschels. Axen aller durch ein Strahlennetz möglichen Gewinde schneiden den otstrahl, welcher auf beiden Leitstrahlen des Netzes senkrecht steht, r rechtem Winkel, durch jeden Punkt gehen zwei Gewinde-Axen; die ne ist daher von der dritten Ordnung, enthält h zweifach, die unendlich Gerade des Strahlensystems aber einfach. Da unter den Ebenenen, welche die Axenpaare projicieren, eines aus zwei Tangentialebenen

des unendlich fernen Kreises besteht, bilden sie eine hyperbolische Involution, deren Doppelebenen aufeinander senkrecht stehen. Da man die Axen als Gerade definieren kann, welche auf den Strahlen einer h enthaltenden Regelschar des Netzes senkrecht stehen, so erkennt man in den Punkten von h, welche von den Doppelebenen herrühren, die Grenzpunkte des h umgebenden unendlich dünnen Strahlenbündels im Kummerschen Sinne und in den Einschnitten von h in die beiden Leitgeraden die nicht notwendig reellen Brennpunkte dieses Bündels. Die Gleichung

$$r = d \cos 2\omega,$$

welche zwischen dem Abstand einer Geraden des Cylindroids von der Mittelebene der beiden Doppelstrahlen und Leitstrahlen, und dem Winkel, den sie mit einer Doppelgeraden bildet, besteht, wird aus der einzweideutigen Beziehung zwischen den Punkten von h und den Ebenen um h, in denen die zugehörigen Axen liegen, abgeleitet. Vielleicht hätte sich das Obige leichter mit Hülfe der orthogonalen hyperbolischen Paraboloide ergeben, welche durch die beiden Leitstrahlen des Netzes hindurchgehen. Der von h verschiedene Scheitelstrahl eines solchen Paraboloids ist, wie bemerkt, eine Axe eines Gewindes. Die obige Formel drückt jedenfalls die bekannte Thatsache aus, dass die Abstände eines Scheitelstrahls von zwei Geraden seiner Schar sich verhalten wie die Tangenten der Winkel, welche er mit ihnen bestimmt. Aus der Betrachtung der Strahlen des Netzes, welche einen unendlich kleinen Kreis der Hauptebene treffen, der um ihren Schnittpunkt mit h beschrieben ist, gewinnt Sturm den Kummerschen Ausdruck für das Dichtigkeitsmaß des h umgebenden unendlich dünnen Strahlenbündels.

Im folgenden Abschnitt (126 flg.) wird das lineare System zweiter Stufe, das Netz aus Gewinden mit Hilfe der Regelschar G konstruiert, welche die drei konstituierenden Gewinde Γ_1, Γ_2, Γ_3 mit einander gemein haben. Entsprechen in den Nullsystemen von Γ_1, Γ_2, Γ_3 einem beliebig gegebenen Strahlbüschel (α, A) die anderen (β_1, B_1), (β_2, B_2), (β_3, B_3), so ordnet die kollineare Beziehung zwischen A, B_1, B_2, B_3 und α, β_1, β_2, β_3 jeder Ebene β des letzteren Bündels einen in ihr liegenden Punkt B zu und eine auf (A, α) und (B, β) gegründete Sylvestersche Erzeugung erzeugt ein viertes Gewinde des Netzes, wenn man zu zwei Strahlen von (A, α) diejenigen Strahlen von (B, β) als homolog wählt, welche dieselben Strahlen der Regelschar G treffen. Hieraus kann abgeleitet werden, dass die Nullpunkte beliebiger Ebenen hinsichtlich der Gewinde des Netzes kollineare Felder beschreiben. Die Abbildung des Netzes auf die Ebene ist hiermit gewonnen.

Das Gewinde-Gebüsch kann als die Gesamtheit derjenigen Gewinde aufgefasst werden, welche zwei verschiedene Gerade mit einander gemein haben, woraus die Sylvesterschen Erzeugungen der einzelnen Gewinde leicht abzuleiten sind. Die Polaren beliebiger Geraden bilden eindeutig bezogene Gewinde, mittelst deren später das Gewinde-Gebüsch auf den Raum

bildet werden kann. Das Gewebe von Gewinden hingegen wird als Ort Netze aufgefasst, die zwei feste Gewinde mit einem anderen in einem beweglichen verbinden. Die Gesamtheit aller Gewinde erweist sich als ein linearer Raum, in dem, der Reyeschen Anschauung gemäss, jeder linearen Teil-Mannigfaltigkeit eine ergänzende Mannigfaltigkeit rt, deren sämtliche Gewinde mit ihren eigenen in Involution liegen. muss gestehen, dass ich im Gegensatz zu Sturm ein Verfahren zur nition der linearen Mannigfaltigkeiten für besser gehalten hätte, dem auf die gemeinschaftlichen Elemente der konstituierenden Ge- le keine Rücksicht genommen wird. Ich meine, es ist zweckmässiger, erst den Begriff des Bündels kollinearer Räume zu verschaffen, den allerdings in der vollsten Allgemeinheit am leichtesten durch das zip des Projizierens und Schneidens in einem Raume höherer Dimen- ableitet. (Man braucht einen Raum elfter Dimension, den man etwa durch ein Kurvennetz dieser Stufe versinnbildlichen kann.) drei Punkträume, welche durch das Nullsystem auf denselben Ebenen- bezogen sind, ergeben nun einen Bündel von Punkträumen, deren durch ein Nullsystem auf den Ebenenraum bezogen ist, und ein inde des Netzes ergiebt. Hier treten nun die kollinearen Felder, he das Netz abbilden, in Evidenz. Die Gesetze, welche das Bündel eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe charakterisieren, treten in ter Allgemeinheit zu Tage und man kann nun lediglich mit Hilfe des hel-Bildens zu den linearen Mannigfaltigkeiten höherer Stufe aufsteigen. früheren Besprechungen (von Loria und Schönflies) der beiden n Bände des Werkes wird der Verfasser in anderem Zusammenhange Betrachtungen im Raume höherer Dimension hingewiesen. Er nimmt uf in der Vorrede des dritten Bandes Bezug; aus pädagogischen sichten ziehe er es vor, das anschauliche liniengeometrische Gebilde Raume von drei Dimensionen und nicht das mehrdimensionale Gebilde, dem es durch Projektion entstanden ist, zu betrachten. Er drückt dahin aus, dass er nach wie vor seinen Weg, schon wegen der zahl- en Einzelergebnisse, zu dem er führe, für den richtigen halten müsse. In- en wird schon im ersten Bande ein Kapitel zur Übung in der Geometrie des ren Raumes eingeschaltet. Es wird das Erzeugnis zweier projektivischer hel von Gewinden — ein Komplex zweiten Grades mit zwei Doppel- den, das Erzeugnis dreier kollinearer Bündel — ein Komplex dritten les —, endlich das Erzeugnis dreier projektivischer Büschel — eine gruenz dritten Grades — betrachtet. Nach Betrachtungen über ortho- le Gewinde, deren Axen in Bezug auf eine absolute Kurve oder Fläche rreziprok sind, wendet sich der Verfasser zu den Gruppen von 3 bis 6 inden, die in Involution stehen, und zu den zugehörigen geschlossenen pen von Transformationen. Diese besteht z. B. für drei Gewinde aus Identität, den drei definierenden Nullsystemen, den gescharten Involu- en, welche die drei Schnitt-Strahlennetze darstellen, endlich dem Polar- em der Fläche, welche die allen drei Gewinden gemeinsame Regelschar

trägt. Die einem beliebigen Punkte zugeordneten sechs Elemente sind die Bestimmungsstücke eines Tetraeders.

Die Abbildung des Gebüsches von Regelflächen, die zwei Gerade u, v enthalten, in den Punktraum führt zunächst zu einer einzweideutigen Abbildung des letzteren auf ein Gewinde, indem jedem Punkte die beiden Geraden korrespondieren, welche die entsprechende Fläche aus dem Gewinde herausschneidet. Ist u eine Gerade des Gewindes, so führt dies zu der del Pezzo'schen Begründung der eindeutigen Noetherschen Abbildung mit einem singulären Kegelschnitt im Punktraum. Diese Konstruktion begründet der Verfasser sehr anschaulich, indem er zunächst eine kollineare Beziehung zweier Ebenen herstellt, in der zwei im Nullsystem des Gewindes einander zugeordnete und folglich zur Sylvesterschen Erzeugung desselben geeignete Strahlbüschel einander entsprechen. Bezieht man nun diese Felder auf zwei nicht konzentrische Strahlbündel derart, dass den beiden Sylvesterschen Strahlbüscheln derselbe Ebenenbüschel entspricht, so gehört zu jedem Strahl des Gewindes ein Punkt; die Punkte des singulären Kegelschnittes k^2 gehören den Punkten der gemeinschaftlichen Geraden der beiden Sylvesterschen Strahlbüschel zu. Jedem Strahlbüschel des Gewindes entspricht eine den fundamentalen Kegelschnitt treffende Gerade, mithin einem Netz eine den singulären Kegelschnitt enthaltende Oberfläche zweiter Ordnung. Die Abbildung aller Strahlen auf einen linearen Raum vierter Dimension wird in Anlehnung an Loria gegeben. Bei der Abbildung aller Gewinde auf die Kegelschnitte einer Ebene erhält man in jedem Kegelschnittbüschel zwei Individuen, denen Gebüsche entsprechen; die Mannigfaltigkeit der Geraden wird mithin auf ein quadratisches Kegelschnittsystem vierter Stufe bezogen. Es wird der interessante Spezialfall Aschieri's dargelegt, in welchem den Geraden die Kegelschnitte entsprechen, welche unendlich viele einem festen Kegelschnitt umschriebene Dreiecke enthalten. Nach Besprechung der Kollineationen und Korrelationen, welche ein Gewinde in sich selbst überführen, wendet sich der Verfasser schliesslich der Besprechung des durch eine Raumkurve dritter Ordnung gegebenen Gewindes zu.

In dem Schlussabschnitt des ersten Bandes bespricht nun der Verfasser ausführlich den tetraedealen oder Reyeschen Komplex zweiten Grades. Natürlich nimmt die Betrachtung ihren Ausgangspunkt von dem Standtschen Satz, nachdem die Würfe, welche ein Tetraeder an einer Geraden bestimmt, einander gleich sind, aus dem schon Standt gefolgert hat, dass alle von einem Punkt ausgehenden, bez. in einer Ebene liegenden Geraden, an denen ein Tetraeder Würfe von gegebenem Doppelverhältnis bestimmt, einem Kegel bez. einem Büschel zweiten Grades angehören. In genauer Anlehnung an Reye werden die singulären Bündel und Felder des Komplexes, die in ihr enthaltenen Sehnenkongruenzen und Regelschaaren behandelt. Aus der näheren Betrachtung der singulären Punkte und Ebenen des Komplexes ergiebt sich die Reyesche Erzeugung mittels der Strahlbüschel, deren Scheitel einer Ebene angehören und welche die Strahlen eines kollinear

genen Bündels projizieren; es folgt die implicite von Reye, ausdrücklich ch von Hirst gegebene Erzeugung mittelst zweier projektivischer hlbüschel, endlich wird genauer besprochen die Reyesche Erzeugung h ein Büschel kollinearer Ebenen- und Punkträume.

Von besonderen Reyeschen Komplexen wird zunächst der Axenkomplex rsucht. Zu Grunde gelegt wird seine allgemeinste Definition als Ort Strahlenpaare, die hinsichtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung konjugiert und einen rechten Winkel mit einander bestimmen. Ein Hinweis uf, dass der Komplex sich zugleich aus den Normalen aller konfokalen flächen zweiter Ordnung zusammensetzt, wäre im Hinblick auf die nen Untersuchungen von Binet, Ampère, Chasles, in denen die rie des Axenkomplexes grossenteils vorgebildet ist, erwünscht gewesen. ern haben wir unter den besonderen Reyeschen Komplexen, welche der asser betrachtet, diejenigen vermisst, welche zwei kongruente Figuren beliebiger Lage erzeugen. Bereits 1831 hat Chasles ausgesprochen, alle durch einen Punkt laufenden Strahlen des Komplexes — Verungslinien homologer Punkte — einen Kegel zweiten Grades bilden, dass n den einen oder anderen Raum gehörigen Punkte dieser Strahlen eine nkurve dritter Ordnung bilden, dass die in einer Ebene liegenden hlen einen Kegelschnitt umhüllen etc. Den Abschluss des ersten Bandes t die Abbildung des tetraedralen Komplexes in den Punktraum und die achtung der durch zwei kollineare Flächen zweiter Ordnung erzeugten gruenz, welche die Normalenkongruenz der Oberfläche zweiter Ordnung ktivisch verallgemeinert.

Bereits in den ersten Entwickelungen des zweiten Bandes zeigt sich grosse Bedeutung der von Schuhmacher eingeführten dritten Zahl r Kongruenz $[m, n]$, der Anzahl der Geradenpaare, welche mit einer benen Geraden in einer Ebene liegen und sich auf derselben kreuzen. Zahl r geht sofort in die mit einer Kongruenz verknüpften Anzahlen Es erzeugen z. B. die Nullebenen der Punkte einer Geraden l einen us $[l]$ der Klasse $\frac{1}{2} m (m - 1) + r$, die Nullpunkte, deren Ebenen eine de enthalten, liegen auf einer Kurve (l) der Ordnung $\frac{1}{2} n (n - 1) + r$. Ort (P) der Punkte, deren Nullebenen einen gegebenen Punkt P alten, ist von der Ordnung $\frac{1}{2} m (m - 1) + r$. Die Ebenen, deren punkt einer gegebenen Ebene ε angehört, umhüllen eine Fläche (ε) der Klasse $\frac{1}{2} n (n - 1) + r$. Auf die Brennfläche der Kongruenz (m, n) die Betrachtung der Regelfläche $(m + n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die eine de l treffenden Geraden ausfüllen, die l m-fach enthält. Auch wenn l in Gerade der Kongruenz übergeht, bleibt die Ordnung der Fläche die-. Das ist nur dadurch möglich, dass zweimal die beschreibende Gerade mit l vereinigt hat. Dies führt im allgemeinen auf die Brennfläche F) aus Punkten, von denen zusammenfallende Kongruenzstrahlen aus-n und auf eine zweite Fläche $\Phi(\varphi)$, die von den Ebenen umhüllt wird,

in denen solche unendlich nahe Geraden liegen. Die Identität beider Flächen und das Verhalten der beiden Brennpunkte und Brennebenen eines Strahls wird auf die übliche Art nachgewiesen. Dieser Entwickelung bei weitem vorzuziehen ist die andere, welche einen unendlich dünnen Teil der Kongruenz als die Umgebung des Hauptstrahls eines Strahlennetzes erkennt. Ordnung und Klasse der Brennfläche werden auf

$$m_1 = 2n(m-1) - 2r,\ n_1 = 2m(n-1) - 2r$$

bestimmt, so dass die Kleinsche Formel

$$m_1 - n_1 = 2(m-n)$$

sich bestätigt. Wenn die Kongruenz zwei singuläre Kurven besitzt oder speziell aus den Sehnen einer Raumkurve besteht, so spricht man ihr gewöhnlich eine Brennfläche ab. Sturm will diese Annahme nicht gelten lassen, sondern hält die abwickelbare Fläche, welche die beide Kurven berührenden Ebenen einhüllen, für die Punkt-Brennfläche $F(\Phi)$, während allerdings die Fläche $F(\varphi)$ ausartet und zwar in die Gesamtheit der die eine oder andere Kurve berührenden Ebenen.

Die Strahlenkongruenzen erster Ordnung werden im zweiten Abschnitt genau nach den von Kummer und Cremona vorgezeichneten Gesichtspunkten behandelt. Zu der Sehnenkongruenz einer Raumkurve dritter Ordnung und der Kongruenz der Strahlen, welche eine Kurve n^{ter} Ordnung und eine $(n-1)$-fache Sekante derselben zu gleicher Zeit treffen, gesellt der Verfasser noch eine dritte Kongruenz erster Ordnung. Bezieht man nämlich eine Ebeneninvolution projektivisch auf eine ihrer Axe angehörige Punktreihe, so sendet jeder Punkt der Axe n in den Ebenen der zugehörigen Gruppe liegende Strahlbüschel aus und die Gesamtheit derselben ist eine Kongruenz $[1, n]$. Der nächste und wichtigste Abschnitt des Bandes ist der gemeinsamen Betrachtung aller Komplexe $[2, n]$ ohne singuläre Linien gewidmet. Die Fläche (P) ist von der Ordnung $n-1$; da ein Komplexstrahl g nur die $n-1$ Einschnitte in die übrigen in (Pg) liegenden Kongruenzstrahlen mit ihr gemein hat; hieraus folgt, da $m = 2$ ist, dass $r = n - 2$ ist. Die Brennfläche ist deshalb von der vierten Ordnung und der $2n^{\text{ten}}$ Klasse. Die singulären Punkte der Kongruenz sind Doppelpunkte der Brennfläche. Ganz allgemein ist $m - \gamma$ die Klasse des Kegels, welcher in einem singulären Punkt S_h sich der Brennfläche anschliesst, wenn ausserhalb des Kegels (S_h) noch γ Kongruenzstrahlen durch (S_h) hindurchgehen (295). In unserem Fall ist $m - \gamma = 2$ und es geht also, was für die Folge wichtig wird, durch keinen singulären Punkt ein ausserhalb des Kegels (S_h) liegender Kongruenzstrahl. Dass singuläre Punkte von höherer als der sechsten Ordnung nicht möglich sind, folgt daraus, dass ein Kegel (S_h) die Brennfläche in einer Kurve $2h^{\text{ter}}$ Ordnung berührt, welche den Brennpunkt h-fach bereithält; ihre h Tangenten in S_h müssen unter den 6 vierfachen Tangenten der Brennfläche in ihrem Doppelpunkt S_h sich befinden. Für die Ermittelung der Anzahlen a_h der singulären Punkte S_h gewinnt Sturm (314 flg.) die drei Formeln:

$$1)\quad \sum a_h h = 4(n+2)(314), \qquad 2)\quad \sum a_h h^2 = 4n(n+2),$$
$$3)\quad \sum a_h h^3 = (n+2)^2(n-1).$$

Die beiden letzten Formeln werden aus der Betrachtung der Schnitt-
pe der einer Geraden zugehörigen Kurve (l), mit Φ und aus der Natur
Schnittpunktsystems dreier Regelflächen $(l), (l'), (l'')$ gewonnen, also
ch wie bei Kummer; die erste Formel aber entspringt aus der Er-
ung der Verwandtschaft aut Φ, in der je zwei zusammengehörige Brenn-
te einander entsprechen und in der einem ebenen Schnitt eine Kurve
$+ 1)^{\text{ter}}$ Ordnung entspricht. Die Schnittkurven der Polarfläche eines
tes P und seiner (P) entsprechen einander. Da die singulären Punkte
Kongruenz die einzigen singulären Punkte der Verwandtschaft sind, so
bt sich aus der Vergleichung der beiden Gradzahlen der Schnitt-
en die Gleichung [1]. Der fundamentale Kummersche Satz, dass
Konfiguration $[2, n]$ $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Doppelstrahlen besitzt, wird aus
Betrachtung der Flächen (P) gewonnen; da drei Punkte in der ein-
. (P) liegen, welche zu dem Schnittpunkt ihrer drei Nullebenen gehört, so
n sie ein lineares System. Ausser der Kurve (l), welche zu PP' ge-
haben die Flächen (P), (P') eine allen (P) gemeinsame Kurve der
ung $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ gemeinschaftlich. Diese Kurve muss notwendig
Punkten mit unbestimmter Nullebene bestehen, also aus Doppel-
len mit unbestimmter Nullebene für jeden ihrer Punkte. Durch jeden
lären Punkt S_h muss, da er auf der zwei (P) gemeinschaftlichen Kurve
$h-1)$-fach liegt, diese Zahl von Doppelstrahlen hindurchgehen,
ne Doppelstrahlen des Kegels (S_h) sind, der deshalb rational ist. Bei
n Doppelstrahl d besteht die Regelfläche $[d]$ nur aus den Kegeln zweier
lärer Punkte, die auf a liegen und deren Ordnungszahlen die Summe
2 besitzen. Jeder S_{i+2} sendet $\frac{1}{2}i(i+1)$ Doppelstrahlen aus und be-
: ebenso viele S_{n-i}, jeder S_{n-i} sendet aber $\frac{1}{2}(n-i-1)(n-i-2)$
pelstrahlen aus, deren jeder noch einen S_{i+2} trägt. Es muss also,
eder

$$(i+2 \gtrless n-i)$$
$$\frac{1}{2}i(i+1)\,\frac{1}{2}(n-i-1)(n-i-2) \leqq \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$
$$(i+2 = n-i)$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}i(i+1)\left(\frac{1}{2}i(i+1)+1\right) \leqq \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

da nach der obigen Betrachtung die linke Seite die geringste Zahl
Doppelstrahlen ist, die auftreten. Dies ergiebt die Möglichkeiten: Es
ausser den S_1 und S_2 ein S_{n-1} $\left(n-1>2\right)$ und $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$
läre Punkte S_3 vorhanden oder es giebt ausser den S_1 und S_2 nur
läre Punkte von der Ordnung $\frac{1}{2}n+1$, und es ist $n = 4$ oder 6.

Berechnet man nun aus den obigen Formeln α_1 und α_2 und bedenkt, dass $n-1 \leq 6$ ist, so erhält man zunächst 6 Konfigurationen von der ersten Art

$$(2, 2), (2, 3), (2, 4)\ (2, 5)\ (2, 6)_I\ (2, 7)$$

indem bei den drei ersten ein beliebiger der 16, 5, 2 Punkte S_1, S_2, S_3 als S_{n-i} gekennzeichnet werden kann. Die Konfiguration (2, 4) tritt noch einmal als solche zweiter Art auf und es bleibt nur die eine Konfiguration $(2, 6)_{II}$ mit 4 vierfachen Punkten und 8 Doppelpunkten übrig. Die beiden Bezeichnungen erster und zweiter Art bei $(2, 6)_I$ und $(2, 6)_{II}$ sind die umgekehrten wie bei Kummer. Hinsichtlich der Verteilung der singulären Punkte auf die singulären Kegel ist schon vorangegangen, dass eine singuläre Ebene fünf, ein Kegel zweiten Grades acht singuläre Punkte enthält. Die Gleichungen für die $\alpha_h^{(i)}$ (Anzahl der singulären Punkte h^{ten} Grades auf einem (S_i) einschliesslich der Spitze, wenn $h = i$) werden einerseits mit Hülfe des Schnittpunktsystems zwischen (S_i), der (P) von S_i und Φ gewonnen, in dem nur zwei nicht singuläre Punkte vorkommen. Zweitens wird das Schnittpunktsystem einer Kurve (l) mit dem Kegel (S_i) in Betracht gezogen. Die so gewonnenen Formeln genügen, um die 7 Kongruenzen nach Art der singulären Punkte und der Gruppierung der singulären Punkte auf den einzelnen Kegeln festzulegen (324).

Die Gesamt-Kongruenz aller Doppeltangenten von Φ ist eine [12, 28], so dass nach Abzug der gegebenen Kongruenz und ihrer singulären Ebenen eine konfokale Restkongruenz verbleibt, deren Entstehungsweise angegeben wird. Diese konfokalen Kongruenzen werden da, wo dies angeht, nach der Methode von Hirst mit Hilfe der Regelscharen hergestellt, welche die gegebene Kongruenz durchziehen. Von der Fläche (l) lösen sich, wenn l zwei singuläre Punkte enthält, die beiden Kegel derselben ab. Eine sorgfältige Untersuchung zeigt, dass die Doppelkurve der Restfläche, bestehend aus der Doppelgeraden l und einem Bestandteil der l zugehörigen Kongruenzkurve von so hohem Grade ist, dass ein weiteres Zerfallen der Restfläche eintritt, dann wenigstens, wenn die Gerade l nicht ein Komplexstrahl, die beiden singulären Punkte unverbunden sind. Diese Betrachtung führt bei der $(2, 6)_{II}$ zu Paaren von Regelflächen, welche die Verbindungslinien zweier unverbundener S_2 enthalten. Die acht S_2 zerlegen sich in zwei Gruppen von vier unter sich unverbundenen Punkten, die vier Kegel der Punkte einer Gruppe haben die anderen vier Punkte S_2 und die vier S_4 gemeinsam. Jede Gruppe führt also auf sechs Paare von Regelscharen. Da jede dieser Regelscharen eine Mantellinie aus jedem Kegel (S_2) aufnimmt, der einen Punkt der anderen Gruppe zur Spitze hat, so projicieren alle ihre Geraden die vier Punkte S_4 unter demselben Doppelverhältnis; diese Flächen und Kegel und mit ihnen $(2, 6)_{II}$ gehören also einem tetraedralen Komplex an, dessen Fundamentaltetraeder aus den vier Punkten S_4 besteht. Aus der Gruppe, welche die S_4 mit den anderen vier Punkten S_2 bilden, entsteht derselbe tetraedrale Komplex; $(2, 6)_{II}$ liegt ausserdem vollständig in den Komplexen dritten Grades aus den Geraden der Oberflächen zweiter Ordnung, welche die eine oder andere Gruppe associierter Punkte enthalten. Dies führt auf zwei Scharen von

lflächen, die in $(2, 6)_{II}$ enthalten sind. Bei allen anderen Kom-
en mit Ausnahme von (2, 7) existiert ein S_{n-1}, der in der Ebene eines
egt. Von der Kongruenz-Regelfläche eines in (S_1) liegenden und von
$_1$ ausgehenden Strahls lösen sich die beiden Kegel (S_1) und (S_{n-1}) ab,
es bleibt noch eine Regelfläche übrig, die S_{n-1}, sicher aber auch S_1
ält, weil die Gerade den in (S_1) liegenden Kegelschnitt von Φ noch
al, ausser in S_{n-1} schneidet. Durch jeden S_2 ausserhalb $[S_{n-1}]$, durch
S_1, der nicht mit S_{n-1} und S_1 verbunden ist, und durch alle S_3 geht
in Strahl der Regelschar. Dies ergiebt eine Regelschar, die durch
n acht assoziierte Grundpunkte hindurchgeht und $1 + \frac{1}{2}(5-n)(6-n)$
entialebenen, die Ebenen der singulären S_1 in der Gruppe besitzt,
$n > 2$ ist; im Falle $n = 2$ kommt noch eine achte Tangentialebene
alb hinzu, weil (S_{n-1}) in einen (S_1) übergeht. Jede der erwähnten
entialebenen enthält noch eine zweite veränderliche Gerade der Regel-
e; diese dreht sich um ein S_{n-1}, welches in der Gruppe der asso-
en Punkte enthalten ist. Auf diese Weise kommt man bei

$$(2, 6)_I\ (2, 5),\ (2, 4)\ (2, 3)$$

1, 2, 3, 5 Gruppen assoziierter Punkte, die aus singulären Punkten be-
n. Jedoch nur bei $(2, 6)_I$ ist auf diese Weise die Gesamtzahl der
ichen Gruppen erschöpft; bei (2, 5), (2, 4), (2, 3) giebt es 3, 6, 15, bei
2) sogar 30 derartige Gruppen. Die Strahlbüschel um S_{n-1} und die
$_1$, welche die Trägerfläche der Regelschar in die Ebenen von S_1 und
inschneidet, sind projektivisch zu einander. Aus diesem Grunde sind
), (2, 3), (2, 4), bei welchen die Anzahl der Paare S_1, S_{n-1}; S'_1, $S'_{n-1}, \ldots$
er als 1 ist, Bestandteile von einem oder mehreren tetraedralen Kom-
die mit Hilfe zweier von diesen Strahlbüscheln erzeugt werden können.
) erweist sich als Ort der Strahlen, die homologe Strahlen dreier
ktivischen Büschel treffen, die jedoch so liegen müssen, dass an einer
e drei homologe Strahlen zusammenlaufen. Gelangt dieser Punkt in
Ebene der drei Zentra, oder haben zwei Strahlbüschel einen Strahl
rechend gemein, so entsteht ein (2, 2). Diese Kongruenz erweist sich
als Schnitt eines Gewindes mit einem tetraedralen Komplex. (2, 5)
sich auf ähnliche Art, wie $(2, 6)_{II}$ als Bestandteil eines tetraedralen
plexes nachweisen. $(2, 6)_I$ und (2, 7) hingegen können einem solchen
plex nicht angehören, weil die singulären Punkte von höherem als
zweiten Grade nur in den Ecken des Fundamentaltetraeders liegen
en, also ihre Zahl nicht grösser als 4 sein kann. Die Trägerfläche
Regelschar der Kongruenz berührt Φ in einer Kurve vierter Ordnung
r Art, auch die Geraden ihrer Leitschar sind Doppeltangenten
Φ und bilden eine zweite Kongruenz, deren Brennfläche Φ ist. Jedoch
bei (2, 3) und (2, 2) ist auf diese Art die Restkongruenz völlig er-
ft, bei (2, 7) bis (2, 4) bleibt noch eine Restkongruenz zu betrachten.
allen Konfigurationen erster Art giebt es so viele Systeme von Regel-
en dritter Ordnung als S_{n-1} vorliegen; die Kongruenzfläche einer

durch S_{n-1} hindurchgehenden Geraden zerfällt in (S_{n-1}) und eine solche Regelfläche. Die einfachen Leitgeraden dieser Flächen bestehen aus Doppeltangenten von Φ und gehören also einer nur gegebenen konfokalen Kongruenz an; dies giebt bei (2, 7) $(2, 6)_I$ (2, 5) (2, 4) die fehlende Restkongruenz. Bei $(2, 6)_{II}$ hat jede in seinem tetraedralen Komplex enthaltene Sehnenkongruenz erster Ordnung eine Regelfläche vierter Ordnung mit der Fläche gemeinsam; ∞^2 von diesen Flächen besitzen eine einfache Leitgerade, aus denen sich die Restkongruenz zusammensetzt. Auf andere Weise hat, wie beiläufig erwähnt werde, Laguerre die konfokalen Kongruenzen der $(2, 6)_{II}$ aufgefunden. Bleiben wir mit Laguerre beim Fall der Normalenkongruenz stehen, so setzt sich die Kongruenz aller Doppeltangenten der Krümmungsmittelpunktfläche zusammen einmal aus den Normalen der Flächen, sodann aus den Geraden, deren Normalie (Ort der Fusspunkte der von ihren Punkten aus auf die Fläche gefällten Lote) zerfällt. Enthält die Normalie eine Gerade der einen oder anderen Schar, so erhält man die beiden auf die erste Art hergestellten konfokalen Kongruenzen; zerfällt dieselbe in zwei Kegelschnitte, so erhält man die Restkongruenz zehnter Ordnung. Um die von einem Punkt ausgehenden Strahlen derselben zu erhalten, braucht man nur die Fusspunkte der sechs von ihm an gefällten Lote zu drei und drei durch Ebenen zu verbinden. Dem in einer solchen Ebene liegenden Kegelschnitte des Axenkomplexes sind unendlich viele der Oberfläche eingeschriebene Dreiecke umschrieben. Die Normalen der Fläche in den Ecken eines solchen Dreiecks laufen in einem Punkt zusammen, der eine der von P ausgehenden Geraden beschreibt.

Zum Schluss dieses Hauptabschnittes werden eindeutige Abbildungen der Kongruenzen untersucht. Dieselbe ist eindeutig auf die von den verschiedenen S_{n-1} ausgehenden Ebenenbündel und die in den einzelnen (S_1) liegenden Punktfelder bezogen. Gleichartige von diesen Gebilden sind durch Cremonasche Verwandtschaften, die näher untersucht werden, verknüpft.

Bei der speziellen Behandlung der einzelnen Kongruenzen ist, wie es sich gebührt, der (2, 2) der breiteste Raum gelassen. Bezeichnet man mit 1 einen der 16 singulären Punkte, mit 2, 3, 4, 5, 6 die in seiner Ebene liegenden singulären Punkte, so kann man jede andere Ebene durch die beiden Punkte kennzeichnen, welche sie mit der ersten Ebene gemein hat. In jeder Ebene ist der zugehörige Punkt unzweideutig gegeben. Es sind z. B. die durch den Punkt [23] hindurchgehenden Ebenen (12), (23), (31), (45), (56), (64). Auf Grund dieser Bezeichnung wird eine genaue Untersuchung der Kummerschen Konfiguration ermöglicht. Am wichtigsten ist die Aufstellung der fünf Paare von Gruppen assoziierter Punkte, die aus paarweise verbundenen singulären Punkten bestehen. Zwei verbundene Punkte bilden eine solche Gruppe mit den sechs Punkten, die von ihren beiden Ebenen ausgeschlossen sind, die ergänzende Gruppe besteht aus den acht Punkten in ihren Ebenen, es zeigt sich, dass bei der oben beschriebenen Operation je zwei solche Gruppen auf dieselbe konfokale Kongruenz führen und zwar tauschen je zwei verbundene der 16 Knotenpunkte ihre Ebenen gegen

ıder aus. So gelingt es (382) die Tabelle aufzustellen, aus welcher n jeder der sechs konfokalen Kongruenzen einem Punkte zugeordnete .e ermittelt werden kann. Indem man auch je zwei dieser neuen gruenzen zusammenstellt, kommt man im ganzen auf 15 Paare asso-ier Gruppen, von denen jede den Übergang von einer zur anderen gruenz vermittelt. Auf Grund dieser Tabelle ist leicht zu erkennen, die sechs Gewinde, denen diese Kongruenzen angehören, paarweise in lution stehen. Bereits bei der Untersuchung der Weberschen Fünf-, die aus der Kongruenz angehörigen Verbindungslinien von singulären kten bestehen, tritt eine Analogie der Konfiguration zu der Fläche er Ordnung in die Erscheinung. Diese tritt in Evidenz mit Hilfe der erwähnten Abbildung des Strahlengewindes in den Punktraum; hierbei pricht der (2, 2) eine Fläche vierter Ordnung, welche den singulären lschnitt k^2 doppelt enthält; die fünf Scharen verknüpfter Regelscharen n sich in die fünf Doppelscharen von Kegelschnitten ab, welche Tangentialebenen der Kummerschen Kegel ausschneiden etc. Cremona seinerzeit aus einer analogen Betrachtung die konfokalen Konfigurationen (2, 2) abgeleitet. Er bezog dieselben auf die fünf Mannigfaltig-n doppelt berührender Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch fundamentalen Kegelschnitt hindurchgehen. Auch er hatte, wie es Sturm thut, die Fläche vierter Ordnung auf eine Hilfsfläche dritter ung, die $k_1{}^2$ enthält, abgebildet. Teilt man die Flächen vierter Ordnung den Realitätsverhältnissen ihrer Geraden in Arten ein, so ergiebt sich prechend eine Einteilung der Konfigurationen 2, 2 nach der Realität Knotenpunkte; entsprechend den fünf wesentlich verschiedenen Arten Flächen dritter Ordnung ergeben sich fünf verschiedene Gattungen (2, 2), zu denen als letzte die ganz imaginäre Konfiguration und mit imaginärer Brennfläche hinzutreten. Der Nachweis, dass die peltangenten einer Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten echs getrennten Konfigurationen angeordnet sind, knüpft an den weis der Paare assoziierter Gruppen an, in welche die 16 Knoten-te zerlegt werden können. Aus einer solchen $[N]_8$ erhält man ein em die Fläche überziehender Raumkurven vierter Ordnung, längs ı sie von Oberflächen zweiter Ordnung berührt wird. Verbindet einen Punkt einer solchen Kurve mit den beiden anderen, welche Tangentialebene von Φ auf ihr ausschneidet, so erhält man zwei Er-ende der berührenden Fläche, die zu verschiedenen Scharen gehören. kann eine bestimmte dieser Scharen durch die Forderung heraus-ı, dass ihr durch einen festen Punkt von $(N)_8$ gehender Strahl in einer mmten der beiden durch ihn gehenden Ebenen von $(N)_8$ liegen soll so die völlige Trennung der sechs von einem Punkt von Φ ausgehen-Doppeltangenten vornehmen. Ausser den $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ notwendigen pelstrahlen kann eine Kongruenz, wie bereits Kummer bemerkt hat, ıannte mögliche Doppelstrahlen besitzen. Dies tritt ein, wenn die

Kummersche Fläche Doppelgerade besitzt. Der Untersuchung dieser Fälle — die Zahl der Doppelgeraden schwankt zwischen 1 und 4 — ist der letzte Teil des Abschnittes über die Kongruenzen (2, 2) gewidmet.

Die Kongruenz (2, 3) stellt sich als gemeinsames Glied von 10 tetraedralen Komplexen heraus, die 6 konfokalen Konfigurationen gehen mit Hilfe von 15 Gruppen $(N)_8$ assoziierter Punkte in einander über. Der Nachweis, dass eine Fläche vierter Ordnung mit 15 Knotenpunkten die Brennfläche von 6 Konfigurationen (2, 3) ist, wird geliefert und zum Schluss die Erzeugungsweise erläutert, von der Stahl in seiner Bearbeitung der Kongruenz (3, 2) ausging.

Die Kongruenz (2, 4) besitzt drei Gruppen assoziierter Punkte, zu ihrer Brennfläche gehören vier gleichartige Konfigurationen. Von den verschiedenen Erzeugungsweisen der (2, 4) ist die einfachste die mit Hilfe zweier quadratisch bezogenen Felder, aus ihr heraus werden die hauptsächlichsten Eigenschaften der Kongruenz nochmals entwickelt.

Auch (2, 5), $(2, 6)_I$, (2, 7) erfahren eine kurze Behandlung in dem oben angedeuteten Sinn. Auf Grund der Rohn'schen Untersuchungen zeigt sich, dass nicht jede Oberfläche vierter Ordnung mit 13, 12, 11 Knotenpunkten in der oben betrachteten Art zerfallende Konfigurationen besitzt. Für die dualen Formen dieser Komplexe werden die Caporali'schen Erzeugungen gegeben: ein Gebüsch von Kegelschnitten einer Ebene ist kollinear auf den Ebenenraum bezogen. Jeder Punkt gehört allen Kegelschnitten eines Netzes an und wird mit dem Zentrum des zugehörigen Ebenenbündels verbunden. Ein interessantes Beispiel von (7, 2) bilden die Asymptoten aller durch fünf Punkte möglichen Raumkurven dritter Ordnung.

$(2, 6)_{II}$ erfährt eine ausführlichere Behandlung und verdient dieselbe schon deshalb, weil alle Konfigurationen geringerer Klassenzahl als besondere Fälle von ihr zu betrachten sind. Beim Übergang von einer gegebenen Konfiguration $(2, 6)_{II}$ zu einer konfokalen behält die eine Gruppe S_2 ihren Grad und Kegel, die andere Gruppe tauscht die Rolle mit den S_4. Hieraus sieht man, dass auch die S_2 eine Gruppe assoziierter Gruppen bilden, deren Geradenkomplex die beiden konfokalen Konfigurationen angehören. Aus den allgemeinen Entwickelungen ist die Stahl'sche Entstehungsweise der $(2, 6)_{II}$ evident. Sie wird von einer Regelschar beschrieben, wenn der Träger derselben in einem Bündel verbleibt und an einem der Grundpunkte die von ihm ausgehende Gerade der Regelschar einen Kegel beschreibt, welcher vier der acht Grundpunkte enthält. Auf Grund der Thatsache, dass die Konfiguration einem Tetraederkomplex angehört, kann man die $(2, 6)_{II}$ als Ort der Strahlen auffassen, die homologe Geraden dreier projektivischer Regelscharen treffen. Doch müssen in vier der acht Schnittpunkte homologe Tripel zusammenstossen. Nachdem noch die kinematische Bedeutung von $(2,6)_{II}$ hervorgehoben ist — ein Stab, der mit festen Punkten auf drei Ebenen gleitet, beschreibt eine $(2, 6)_{II}$ — wird das Auftreten „möglicher“ Doppelstrahlen bei den Konfigurationen (2, 5) bis (2, 7) untersucht.

Von den drei verschiedenen Gattungen der Konfigurationen $(2, n)$ mit ären Linien erledigen sich die beiden ersten sehr leicht. Die einzige nkongruenz ist die $(2, 6)$, auf welche die Raumkurve vierter Ordnung Art führt. Sind zwei singuläre Linien vorhanden, so hat man l den Fall zweier Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen Punkten, zwei-en Fall, dass die eine singuläre Kurve eine Gerade ist, welche die andere)rdnung in $(n-2)$ Punkten trifft. Hierzu könnte man selbstver-ich Kongruenzen treten lassen, die aus einer $(2, n)$-Korrespondenz den Ebenen eines Büschels und den Punkten seiner Axe entstehen.)er schwierigste Fall ist der, wo nur eine singuläre Linie vorliegt. e man die Brennfläche von vornherein geben, so könnte der Tangential-aus einem Punkt der singulären Linie stets zerfallen und nur dieser Bestandteile der Kongruenz angehören. Deshalb wählt der Ver-die folgende Untersuchungsform: Gegeben ist eine Kurve, von jedem derselben gehen ein Kegel h^{ten} Grades und t einzelne Gerade einer ruenz aus, dieselben stützen sich weder auf eine zweite Kurve noch ein s Mal auf die gegebene. Dann ist entweder (A) die singuläre Linie Jerade oder sie ist keine Gerade, und man hat die Fälle (B) $h=1$, (C) $h=2$, $t=0$. Die Gattung (A) besteht aus den Tangenten aller schnitte, die bei einer Fläche n^{ter} Ordnung mit $(n-2)$-facher Geraden zweimal treffen. Bei den Gattungen (B) und (C) werden die Schu-erschen Erweiterungen zu Kummers Resultaten genau aufgeführt. ıllgemeine Fall von (B) entsteht, wenn man eine unikursale Raum-so auf einen Kegel projektivisch bezieht, dass jeder Punkt in der örigen Tangentialebene des Kegels liegt, und die Strahlbüschel zu-enfasst, die jeder Punkt in die zugehörige Tangentialebene sendet. pezieller Fall ist der, dass die Raumkurve auf dem Kegel selbst liegt ie Spitze $(n-2)$-fach enthält. In diese Klasse gehören die von Kummer kten Fälle. Von der dritten Gattung besteht eine Art aus den nten eines Kegels, die von den Punkten einer (ebenen) Kurve μ^{ter} Ord-ausgehen, welche die Spitze $(\mu-1)$-fach enthält, eine zweite und aus Kegeln zweiten Grades, welche von einem Kegelschnitt oder Raumkurve dritter Ordnung ausstrahlen, und speziell zu ihr gelegene 'unkte projizieren.

)er dritte Band des Werkes beginnt mit der Untersuchung der Kom-iche, welche einer Geraden l hinsichtlich eines Komplexes zweiten s Γ^2 zugeordnet ist. Die Kegel, welche von Punkten von l ausgehen, len, die Kegelschnitte, welche in den Ebenen von l liegen, beschreiben Fläche, welche l zur Doppelgeraden hat, 8 Doppelpunkte und 8 in schnitten berührende Ebenen besitzt. Diese 16 Elemente lassen sich ier Arten zu zwei Möbiusschen Tetraedern anordnen und ergeben zu-en mit der Geraden l und ihrer Polare l' die vier Kleinschen in ıtion stehenden Gewinde von l. Der Verfasser verwendet zur Unter-ıg wesentlich die $(2, 2)$-Korrespondenz, in welcher den Punkten von l enthaltenden Tangentialebenen der von ihnen ausgehenden Komplex-

kegel entsprechen. Wir gestehen, dass wir diese Entwickelung lieber allein aus der konsequenten Ausnutzung des Begriffes der singulären Ebene und des singulären Punktes geführt sähen. Da der Komplexkegel eines Punktes notwendig zerfallen muss, wenn drei seiner Strahlen in einer Ebene liegen, folgt sofort, dass alle Schnittpunkte dreier zu einer Geraden gehörenden Komplexkegel singuläre Punkte sind und deshalb auch allen anderen Komplexkegeln von l angehören und paarweise in vier von l ausgehenden Ebenen liegen. Die Verbindungsebene dreier solcher Punkte gehört notwendig zu einem Ebenenpaar, das von einem Punkte von l ausstrahlt, muss deshalb noch einen vierten der acht Punkte enthalten etc. Auf natürlichste Weise würde man so erkennen, dass l vier singuläre Punkte enthält und vier singuläre Ebenen aussendet, der fundamentale Satz, dass beide Gruppen projektivisch sind, würde natürlicher, als es beim Verfasser geschieht, auf Standts Tetraedersatz zurückgeführt sein. Für die synthetische Untersuchung der Fläche würde sich ferner eine Handhabe daraus ergeben, dass die Kegel — als Flächen zweiter Ordnung, die einem Netz angehören und eine Gerade berühren — einen Büschel zweiter Ordnung bilden. Man würde die von den vierpunktig berührenden Kegelschnitten einer Kurve vierter Ordnung wohlbekannten Entwickelungen auf die Raumkurven vierter Ordnung erster Art der Fläche übertragen, in denen sie von den Kegeln berührt wird.

Die Fläche der singulären Punkte ist zunächst von der der singulären Ebene begrifflich verschieden. Da den Schnittpunkten einer Geraden mit der ersten Fläche die Tangentialebenen an die zweite Fläche projektivisch zugeordnet sind, so ist jede Tangente der einen auch eine Tangente der anderen Fläche (522); es folgt die Identität beider. Es wird auf die übliche Art bewiesen, dass eine singuläre Tangente s der Φ sowohl die beiden Zentra der Strahlbüschel ausschneidet, welche der Komplex in der Berührungsebene der Tangente besitzt, als auch die beiden Ebenen an die Fläche sendet, in denen die Strahlbüschel des Berührungspunktes liegen. Φ ist die eine Brennfläche der Kongruenz aus den s, der andere Brennpunkt trennt mit dem Berührungspunkte eines singulären Strahles dessen Schnittpunkte harmonisch.

Dass die Komplexfläche eine Kummersche Fläche ist, wird abzählend aus der Betrachtung des Charakters der Komplexkurven abgeleitet (529 ff.) Zu jedem Komplex zweiten Grades sind deshalb sechs Gewinde konsingulär, welche zu den quadratischen Kongruenzen der Kummerschen Fläche gehören. Ordnet man je die zu demselben quadratischen Komplex gehörigen Doppeltangenten zweier Punkte von Φ einander zu, so entstehen projektivische Strahlengruppen. Hat man eine Tangente beliebig ausgewählt, so ist ihr durch diese Projektivität eine zweite in einer beliebigen Tangentialebene zugeordnet. Jede so entstehende Kongruenz S besteht aus den singulären Strahlen eines Komplexes vom zweiten Grade. Der Verfasser benutzt zum Beweise des ersten Teils die Korrespondenzen (2, 2), welche eine der sechs konfokalen quadratischen Kongruenzen zwischen den Punkten und Ebenen einer Geraden l hervorruft. Die Verzweigungspunkte der Punktreihe sind die

nittpunkte A, A', A'', A''' mit Φ. Die Doppelpunkte B, B', B'', B''' werden den Geraden ausgeschnitten, welche die Kongruenz in die Tangentialien $\beta, \beta', \beta'', \beta'''$ von l einschneidet. Es sei nun so bezeichnet, dass

$$A\,A'\,A''A''' \barwedge \beta\,\beta'\,\beta''\,\beta''',$$

folglich auch

$$A\,A'\,A''A''' \barwedge B\,B'\,B''\,B'''$$

Wenn man nun die Korrespondenz sich an zwei Tangenten einer Kurve ter Klasse versinnbildlicht, so sind nach dem dualen Fall eines röterschen Satzes

$$A\,A', \quad A''\,A''', \quad B\,B', \quad B''\,B'''$$

re einer Involution. Auch je zwei andere Tangenten, welche von derselben sechs konfokalen Kongruenzen in β und β' liegen, schneiden ein Paar dieser h $A\,A'$, $A''A'''$ schon bestimmten Involution aus. Den Nachweis, dass jede uläre Kongruenz auf einen quadratischen Komplex führt, hätten wir auslicher gewünscht. In die Reihe der konsingulären Komplexe gehören die doppelt gedachten Gewinde $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ der sechs konfokalen gruenzen. Die Kongruenz S erweist sich schon jetzt als Schnitt (unendnaher) konsingulärer quadratischer Komplexe.

Die Gesamtheit der konsingulären Gebilde erweist sich als ein quadraies Gebilde, insofern die in zwei beliebigen Ebenen liegenden Komplexlschnitte projektivisch bezogene Büschel zweiter Ordnung beschreiben, in n die bezüglichen Geradenpaare der sechs konfokalen Kongruenzen homologe lde sind. Sehr befriedigend wird man die Herleitung dieses Stahlschen es nicht finden können. Der Beweis wird darin erblickt, dass die elschnittreihe die erste Charakteristik 2 besitzt. Es folgt nun die Unterung der Polar-Verhältnisse auf Grund der Plückerschen Definitionen. Überleitung auf die Anschauungen, welche der zweite Teil des Bandes gen wird, folgt eine Untersuchung der Involutionen vom Geschlecht 1, he auf einer Regelfläche vierter Ordnung mit zwei windschiefen Geraden Geradenpaaren gebildet werden können. Solche Involutionen sind paarweise unden in der Art, dass jedes Paar der einen mit jedem Paar der anderen iner Regelschar gehört. Jede der vier Doppelgeraden der einen er; also mit jeder der vier Doppelgeraden der anderen Berührungste von Doppeltangenten der Fläche. Da jedes derartige Geradenpaar reziprok in Bezug auf eine von vier Flächen zweiter Ordnung ist, die weise in Involution liegen, so zerfällt die Kongruenz der Doppelenten in vier getrennte Kongruenzen. Die vier in einem Punkte beenden Doppeltangenten und die Erzeugende des Punktes bilden einen sich t projektivischen Wurf, so dass die Fläche später als Singularitätene einer Mannigfaltigkeit von Komplexen zweiten Grades mit zwei Doppellen hervortritt.

Die Regelfläche vierter Ordnung mit zwei Doppelstrahlen, die ein ılennetz mit einer Γ^2 gemein hat, zerfällt, wenn das Strahlennetz zwei ılbüschel von Γ^2 enthält, in diese und eine Regelschar, oder in vier Strahl-

büschel, je nachdem die ersteren Strahlbüschel einen Strahl gemein haben sich schneiden — oder nicht. Zwei beliebige Gerade der Leitschar ein Regelschar von Γ^2 können als Leitstrahlen eines sie enthaltenden Netzes au gefasst werden. Seine mit Γ^2 gemeinschaftliche Fläche besteht aus zw Regelscharen, welche zwei Gerade gemein haben oder sich zweimal schneide Man erhält aus einer Regelschar auf diese Weise ∞^2 ihr verbunde Regelscharen, ein sogenanntes Feld. Nimmt man zu allen diesen Reg scharen die verbundenen Regelscharen, so erhält man das Gebüsch v Regelscharen, das die ursprüngliche Regelschar enthält, eine Mannigfalti keit, von der je zwei Glieder durch zwei Operationen der obigen Art v bunden sind. Die Mittelglieder dieser Ketten bilden ein zweites derartig Gebüsch. Diese „verbundenen" Gebüsche stehen in der Beziehung, da ungleichartige Regelscharen als Endglieder einer Kette von zwei, v sechs, ... nach einander verbundenen Regelscharen angesehen werden könn gleichartige aber als Endglieder einer Kette von drei, fünf, ... derartig Regelscharen betrachtet werden können. Es lässt sich eben jede Kette v $2n+1$ oder $2n$ solcher Regelscharen auf eine solche von drei oder v Gliedern zurückführen. Greift man eine Regelschar des einen Gebüsches u eine ihr nicht direkt verbundene Regelschar des zweiten ihr verbunden Gebüsches beliebig heraus, so kann jede Regelschar des ersten Gebüsch mit der ersten Regelschar durch ein Netz, mit der zweiten durch e Gewinde verbunden werden; diese Bündel von Netzen und Gewinden tret in reziproke Beziehung und erzeugen, da die Regelscharen eines Gebüsch bereits die gesamte Γ^2 erschöpfen, diese vollständig. Wir gestehen, u gewundert zu haben, dass der Verfasser diese fundamentale von Schur e wickelte Erzeugung des Komplexes zweiten Grades so weit zurückgeschob hat. Vielleicht wäre es am Platze gewesen, diese fundamentale Eigensch an die Spitze seiner Darstellung zu stellen. Auch scheint uns, dass d Verfasser hier etwas nachdrücklicher auf die Arbeit von Schur hätte h weisen können, wie überhaupt an einzelnen Stellen ein genaueres Eingeh auf die — an sich mit grosser Vollständigkeit angeführte — ausgedehn Litteratur erwünscht gewesen wäre. Ein Regelschar-Gebüsch ist eine line Mannigfaltigkeit dritter Stufe, und reziprok auf das verbundene Gebüs bezogen, indem jeder Regelschar des einen das verbundene Feld des ander Gebüsches entspricht und auch Paare einfach unendlicher Reihen von d Art existieren, dass jede Regelschar des einen mit jeder Regelschar des ander verbunden ist. Die Leitstrahlen sämtlicher einem Gebüsch angehöriger Reg scharen erhält man bereits, wenn man nur ein Feld des Gebüsches in Betrac zieht; diese Leitstrahlen bilden mithin einen Komplex und zwar, wie eb falls Schur erwiesen hat, einen konsingulären Komplex. Die Gradzahl (wird durch Abzählung erschlossen; dass der Komplex mit dem ersten k singulär ist, kann mit Hilfe der in zwei Strahlbüschel zerfallenden Reg scharen des Feldes nachgewiesen werden.

Die Gewinde, welche die Leitscharen irgend zweier Regelschar zweier verbundenen Gebüsche verbinden, bilden eine quadratische Mann

ltigkeit vierter Stufe. Alle diese Mannigfaltigkeiten bilden ein Büschel, essen Basis aus den ∞^3 auf die Strahlen des Komplexes Γ^2 sich stützenden ebüschen besteht. Eine quadratische Kongruenz C^2 enthält fünf Paare vernüpfter Reihen von Regelscharen; hierauf lässt sich der Nachweis gründen, ass durch sie ein Büschel von Komplexen Γ^2 sich hindurchlegen lässt. Die etrachtung aller in einer Γ^2 enthaltenen C^2 ergiebt, dass ihre Brennflächen die ngularitätenflächen berühren, und zwar eine jede in der Kurve aus den Punktuadrupeln, in denen die Regelflächen irgend einer der Reihen von C^2 Φ behren; die vier zugehörigen Strahlen der Regelschar sind die in ihr entltenen singulären Strahlen von Γ^2, das heisst ihr, dem unendlich nahen onsingulären Komplex und der Regelschar gemeinsam. Hieran schliesst ch die Betrachtung der „konsingulären“ Kongruenzen, welche durch ein undamentalgewinde aus einer Reihe F (Γ^2) konsingulärer Komplexe ausschnitten werden.

Man kann als Grundelement das Dupel, die Zusammenstellung zweier liebiger Strahlen eines Komplexes Γ^2 wählen; von einem Dupel d_1 werden ∞^3 andere getragen, bilden mit ihm den vollen Durchschnitt einer Regelhar mit Γ^2; die Gesamtheit der Dupel, welche von diesen ∞^3 Dupeln tragen werden, bildet eine ∞^5-fache Mannigfaltigkeit, der auch die ∞^3-che angehört, in der je zwei Glieder mit ∞^3 anderen durch zwei Regelchen verbunden werden können. Die Gewindebüschel, deren Strahlentze die Grunddupel eines solchen Systems $\mathfrak{S}_5$ zu Leitstrahlen haben, gehören nem der quadratischen Systeme $S^2{}_4$ vierter Stufe an, die durch Γ^2 ndurchgehen. Als Ort der Dupel, welche von einem Dupel getragen erden, kann man Γ^2 durch zwei korrelative Gebüsche von Gewinden zeugen, die von zwei Dupeln derselben $\mathfrak{S}_5$ ausstrahlen. Hieran schliesst ch unmittelbar die von Schur gegebene Erzeugung einer C^2 durch ein ündel von Regelflächen und ein reziprok bezogenes Netz von Strahlentzen. Man kann Γ^2 auch definieren als den Ort der Strahlen, welche die runddupel eines Gewinde-Gebüsches S_4 mit den Gewinden eines korrelativen gemein haben. In zwei korrelativen Gewinderäumen S_5, S_5' giebt es ∞^3 ewebe, die einen Grundstrahl besitzen, welcher zugleich dem entsprechenn Gewinde angehört; der Ort dieser Strahlen ist wiederum ein Γ^2. Auch einer quadratischen Kongruenz C^2 und auf einer Regelfläche mit zwei oppelgeraden giebt es Dupelsysteme. Sie können daher (659) als Basis nes Büschels von $S_3{}^2$ bez. $S_2{}^2$ angesehen werden. Der Satz, dass durch nen quadratischen Komplex ein Büschel quadratischer Systeme vierter mension von Gewinden hindurchgeht, ist bekanntlich deshalb von so deutender Wichtigkeit, weil er das geometrische Äquivalent für die Thatche bildet, dass die Gleichung eines quadratischen Komplexes ∞ veriedene Formen zulässt. Es wird deshalb in einer Reihe von Kapiteln e Betrachtungsweise des linearen Raumes fünfter Dimension auf $S_4{}^2$ anwendet. Die Aufstellung seines Polarsystems führt sofort zu den Sencupeln onjugierter“ Gewinde. Es zeigt sich, dass die sechs fundamentalen Gende von Γ^2 das für alle $S_4{}^2$ durch Γ^2 gemeinsame Sentupel konjugierter

Gewinde bilden. Die Strahlen, deren sämtliche Polargewinde Gebüsche sind, bilden einen Komplex zweiten Grades; dieser Nebenkomplex geht durch sämtliche singulären Strahlen des Komplexes hindurch.

Nach Untersuchung der linearen Mannigfaltigkeiten, die auf einer S_4^2 möglich sind, und genauerer Untersuchung der quadratischen Systeme S_3^2 und S_2^2 setzt der Verfasser eine Abbildung des Komplexes in den Punktraum auseinander. Diese beruht auf Abbildung der von einem Dupel getragenen Dupel mittels der vermittelnden Regelflächen. Diese Abbildung geht in eine eindeutige über, wenn man die beiden Ausgangsstrahlen aus einem Strahlbüschel des Komplexes entnimmt. Alsdann zerfällt jede Regelfläche in zwei — diesen und einen anderen ihn schneidenden — Strahlbüschel, und es kann jeder Strahl des Komplexes eindeutig auf das ihn enthaltende Strahlbüschel, das sein Zentrum in der Ebene des ersten Strahlbüschels hat, bezogen werden. Die Abbildung dieses speziellen Gebüsches von einschaligen Hyperboloiden ergiebt die eindeutige von Caporali entdeckte Abbildung, die genauer studiert wird.

Die Einteilung der Komplexe in acht Gattungen beruht auf der Untersuchung der Polarsentupel einer S_4^2 und lehnt sich an analytische Untersuchungen Reye's an. Genau wie die Oberfläche zweiter Ordnung unseres Raumes, zeigt S_4^2 zu allen Polarsentupeln das gleiche Verhalten, das durch eine der sechs Bezeichnungen

$$(A\,B\,C\,D\,E\,F);$$
$$(A\,B\,C\,D\,E,\,F);$$
$$(A\,B\,C\,D,\,E\,F);$$
$$(A\,B\,C,\,D\,E\,F)$$

gekennzeichnet werden kann. Je zwei durch das Komma getrennte Gewinde bestimmen Büschel, die zwei reelle Gewinde mit S_4^2 gemein haben, zwei nicht getrennte aber ein Büschel, welches kein Gewinde von S_4^2 enthält. Die vier Formen von S_4^2 sind die reell-imaginäre, die elliptische, welche keine reellen Netze und Büschel von Gewinden enthält, die elliptisch-hyperbolische, welche reelle Büschel, aber keine Netze von Gewinden enthält, endlich die hyperbolische Form, welche reelle Büschel und Netze von Gewinden enthält.

Der Komplex führte nun auf ein Büschel von S_4^2; das allen gemeinsames Polarsentupel besteht aus den sechs Fundamentalgewinden. Wie nun bei einer geradlinigen Fläche ein Polartetraeder entweder ganz reell oder ganz imaginär ist, bei einer nicht geradlinigen Fläche aber entweder vier Ecken reell oder zwei reell, zwei imaginär sind, so sind, wenn alle sechs Gewinde imaginär sind, sämtliche S_4^2 des Büschels hyperbolisch. Dies giebt die erste Gattung (hyperbolischer) quadratischer Komplexe. Sind zwei Fundamentalgewinde reell, so hat man zwei aus hyperbolischen und elliptisch-hyperbolischen S_4^2 bestehende Abteilungen des Büschels von S_4^2, die zweite Gattung (elliptisch-hyperbolischer) Komplexe. Sind vier Fundamentalgewinde reell, so enthält das Büschel entweder nur hyperbolische und

tisch-hyperbolische Individuen (dies giebt die dritte Gattung), oder es men auch elliptische S_4^2 vor, es entsteht so ein elliptischer Komplex vierte Gattung). Der letzte Fall, dass alle sechs Fundamentalgewinde sind, führt auf vier Gattungen von Komplexen, von denen zwei tisch, eine elliptisch-hyperbolisch, eine reell-imaginär sind (Z. 26 flg). elliptischer, elliptisch-hyperbolischer, hyperbolischer Komplex ent- stets reelle Strahlen. Nachdem dieser Weg weiter verfolgt ist, nimmt Verfasser Gelegenheit (Z. 236 flg.), die quadratischen Kongruenzen auf iche Weise zu behandeln, wobei sich mancherlei Gelegenheit zu Er ungen des zweiten Bandes bietet. Es wird sodann die Mannig- gkeit der konsingulären Komplexe hinsichtlich der in ihnen vertretenen ungen durchmustert.

Nach einem Abschnitt über den Battaglinischen oder harmonischen plex, auf dessen Strahlen zwei Oberflächen zweiter Ordnung sich har- sch trennende Punktgruppen ausschneiden und der das Tetraedroid singulären Fläche hat, geht der Verfasser auf die Komplexe mit pelstrahlen genauer ein. Ein Doppelstrahl ist zugleich eine Doppel- le der Singularitätenfläche. Dieselbe artet in die Brennfläche einer gruenz C^2 mit möglichem Doppelstrahl aus, oder, was dasselbe ist, ie Komplexfläche einer zunächst allgemein gelegenen Geraden d hin- lich eines quadratischen Komplexes Γ_0^2. Die Tangentenbüschel in einzelnen Punkten der Brennfläche senden auch nach der Geraden d ologe Strahlen, der zugehörige konsinguläre Komplex besteht aus dem elt gerechneten Gebüsch, in den auch zwei der fundamentalen Gewinde eartet sind. Der Komplex kann durch die Bezeichnung [21 111] ge- zeichnet werden, welche ausdrückt, dass sich zwei Fundamental- nde vereinigt haben. Der Zweck der ganzen Entwickelung ist eben, Weierstraßsche Theorie der Elementarteiler für diesen Spezial- mit geometrischen Mitteln auszudeuten. Die Singularitätenflächen Φ Komplexe mit nicht windschiefen Doppelgeraden können nun sämtlich Komplexflächen einer Geraden d hinsichtlich eines allgemeinen Kom- s Γ_0^2 gewonnen werden. Gelangt z. B. d in Γ_0^2 hinein, so arten Fundamentalgewinde in das Gebüsch (d) aus und man erhält 1], wird d ein beliebiger singulärer Strahl des Komplexes, so ent- [4 11]. Einem singulären Strahl zweiter Ordnung, der dreipunktig rt, korrespondiert [5 1], wenn endlich der singuläre Strahl vier- tig berührt, so erhält man [6], alsdann ist aber d, dessen Gebüsch liche Fundamentalgewinde aufgezehrt hat, ternäre Doppelgerade. Wenn e gewöhnliche Tangente der singulären Fläche ist, so erhält die plexfläche zwei sich schneidende Doppelgeraden, d und den singulären l d_1 des Punktes. Der Komplex trägt dann die Bezeichnung [2 2 11]. n d_1 oder d dreipunktig berührt, so entsteht [3 2 1], wenn beide unktig berühren [3 3]. Zerfällt nun die Komplexfläche in eine Fläche er Ordnung mit vier Knotenpunkten und ihre dreifach berührende Ebene in eine Fläche dritter Klasse mit vier Doppelebenen und den

Kreuzungspunkt ihrer Doppelgeraden, so gehört zu ihr als Singularitätenfläche ein Komplex mit drei in einer Ebene liegenden oder sich schneidenden Doppelgeraden. Diese beiden Fälle [2, 2, 2]' und [2 2 2]'' treten ein, wenn die Gerade d in eine stationäre Ebene der Fläche von Γ_2^0 hineingelangt, bez. durch einen singulären Punkt derselben hindurchgeht; wenn d in diesem Strahlen-Feld oder -Bündel besondere Lagen annimmt, so entstehen Komplexe [4, 2]' und [6]' und ihnen dual [4, 2]'' und [6]''. [2, 2, 2'] besitzt folgende anschauliche Entstehung. Auf jeder Geraden der dreifach berührenden Ebene einer Fläche dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten bestimme man den Punkt, der gegen ihre Einschnitte in die drei Geraden der Fläche unter einem bestimmten Doppelverhältnis liegt, und verbinde ihn mit dem Berührungspunkt der einzigen von ihm an die Fläche gehenden Tangentialebene, man erhält dann einen singulären Strahl des Komplexes. Die anschauliche Entstehung der Komplexe führt auf leichte Bestimmungen ihrer Mannigfaltigkeit und auf Abbildungen derselben in den Punktraum. Eine ähnlich anschauliche Herstellung der Komplexe mit windschiefen Doppelstrahlen existiert nicht; bereits bei der einfachsten Form mit zwei gewöhnlichen Doppelstrahlen berühren die singulären Geraden eine Regelfläche mit den Doppelstrahlen d, d'. Das Gewindebüschel d, d' besteht nur aus fundamentalen Gewinden; welcher Thatbestand durch die Bezeichnung [(11)1111] des Komplexes angedeutet wird. Existiert eine Doppelerzeugende, so fallen zwei von den vier Doppeltangenten-Kongruenzen in sein Gebüsch hinein; ein zugehöriger Komplex ist demzufolge mit [(11)211] zu bezeichnen. Die singulären Geraden des Komplexes [(11)31] berühren die Komplexfläche einer Geraden d_1 hinsichtlich eines Komplexes mit zwei Doppelgeraden d und d', wobei d und d' von d_1 getroffen werden. Der erste Fall, in dem die singuläre Fläche in zwei Regelflächen zerfällt, und ein windschiefes Vierseit aus Doppelstrahlen besteht, ist mit [(11)(11)11] zu bezeichnen. Aus dem wechselnden gegenseitigen Verhalten dieser beiden Flächen gegen einander resultierten zahlreiche Einzelfälle, die eine eingehende Untersuchung erfahren.

Da indessen der Umfang dieses Referates schon weit über die gewöhnlich inne gehaltenen Grenzen hinausgewachsen ist, müssen wir uns damit begnügen, auf diesen letzten Teil des Werkes nachdrücklichst hinzuweisen. In manchen Einzelheiten ergeben sich, wie die Tabelle in (855) zeigt, Abweichungen von Weilers Aufzählungen. Die letzten Nummern dieser Tabelle enthalten die Komplexe mit unendlich vielen Doppelstrahlen, die in einer Regelschar angeordnet liegen. Den Abschluss des ganzen Werkes bildet die Behandlung der Battaglinischen Komplexe mit Doppelstrahlen.

Beim Abschluss des Referates muss ich noch den auffälligen Umstand erklären, dass die Besprechung der beiden ersten Bände, die mir bereits vor mehreren Jahren übertragen wurde, erst jetzt erfolgt. Infolge dringender Abhaltungen war ich genötigt, die Besprechung immer wieder zu verschieben, bis ich mich entschloss, dieselbe bis zur Vollendung des ganzen Werkes zu vertagen.

Ernst Kötter.

Zahl und das Unendlichkleine. Von Dr. Karl Goebel in Soest. Leipzig 1896. Bei G. Fock. 47 Seiten in 8°.

Der Herr Verfasser verrät Kenntnis der Geschichte der Philosophie, doch als Mathematiker zu den Dilettanten zu rechnen. Die Leistungen rings in seinen „Neuen Grundmitteln und Erfindungen zur Analysis, ra etc." scheinen dem Verfasser „zu den interessantesten Spekulationen eueren Mathematik" zu gehören. Bei der Nennung der Irrational- n bleiben die hier eigentlich in Betracht kommenden Fragen nach Existenz und Definitionsweise dieser Zahlen dem Verfasser gänzlich un- nt. Die bezügliche Auffassung des Verfassers beurteile man nach Angabe, dass, wie die Brüche „die Zwischenräume oder Differenzen hen den ganzen Zahlen kleiner machen, so die Irrationalzahlen rum die Zwischenräume zwischen den Gliedern der Zahlenreihe ver- etc." Die durch $\sqrt{-1}$ angedeutete Operation schliesst einen Wider- h ein, und hierin sieht der Verfasser einen Beweis für die Nicht- nz der negativen Zahlen; denn „sonst könnte die aus dem Begriff Zahl folgende Operation bei der Anwendung auf sie keinen Wider- h ergeben." Dass der Versuch gemacht wird, den Begriff des Un- hkleinen historisch zu verfolgen, ist an sich gut; nur hätte der Herr sser seine Anschauungen in dieser Hinsicht vorab durch Studium zuverlässigen Buches über Differentialrechnung auf eine klare Basis n sollen. Der Lernende ist vor dem in Rede stehenden Buche nach- lichst zu warnen. Für den Kundigen ist diese Warnung überflüssig.

Robert Fricke.

---

i elementi della teoria dei numeri. Per U. Scarpis, professore nel R. liceo in Verona. Milano 1897. Bei U. Hoepli. VIII und 152 Seiten.

Das vorliegende Büchelchen reiht sich als neuestes Glied den zahl- n von der Verlagshandlung U. Hoepli veranstalteten Elementar- rn in Taschenformat an. Die Elemente der Theorie der Zahlen unter hluss der Theorie der quadratischen Formen kommen diesmal zur Be- ung, und die Darstellung ist von Herrn U. Scarpis in übersicht- und ansprechender Weise geleistet worden. In den fünf Haupt- eln des Buches sind der Reihe nach die Eigenschaften der Teiler und chen einer Zahl, die Kongruenzen im allgemeinen, die vollständigen ysteme nach einem Modul, die binomischen Kongruenzen und die atischen Reste behandelt. Die Besprechung der Kreisteilungsgleichungen pitel VI beschränkt sich fast ausschliesslich auf die Betrachtung der iele $n = 5$ und $n = 17$, und entsprechend ist das siebente Kapitel, inteilung des Kreises in n gleiche Teile betreffend, seinem Umfang bemessen. Diese Beschränkung dürfte aber eher ein Vorzug als ein teil des Buches sein.

Übrigens muss das Zitat, welches der Herr Verfasser auf Seite 114 seines Buches zufügt, und welches eine 1893 in den Annali di matematica erschienene Arbeit von Zignago betrifft, lebhaftes Bedauern erwecken. Herr Zignago glaubt a. a. O. einen elementaren Beweis des zuerst von Dirichlet bewiesenen Satzes zu geben, dass in jeder arithmetischen Reihe, in welcher Anfangsglied und Differenz relativ prim sind, unendlich viele Primzahlen enthalten sind. Die von Zignago angestellten Betrachtungen erwecken auch durchaus die Hoffnung, dass auf dem von ihm eingeschlagenen Wege der Beweis des fraglichen Theorems gelingen möchte. Indess ist auf der sechsten Seite der Zignagoschen Publikation der Übergang von der dritten und vierten Gleichung daselbst zur fünften und sechsten fehlerhaft, und alle hieraus weiter gezogenen Folgerungen sind hinfällig. Die Angabe von Herrn Scarpis, dass Herr Zignago „in einer höchst geistreichen und elementaren Weise das berühmte Theorem von Dirichlet bewiesen habe, welches der Kraft eines Gauss und Legendre widerstanden habe", entspricht demnach leider augenblicklich den Thatsachen nicht; und es ist zu bedauern, dass Herrn Scarpis dieser Umstand entging. Einen Teil der Schuld trägt allerdings Herr Zignago selber, welcher, obschon er gleich nach Erscheinen seiner Arbeit in den Annali brieflich auf die Beweislücke aufmerksam gemacht wurde, eine Ausfüllung der Lücke oder Zurückziehung der Arbeit in der gleichen Zeitschrift unterlassen hat.

Robert Fricke.

Lehrbuch der Algebra. Von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg. In zwei Bänden. Zweiter Band. Braunschweig 1896. Vieweg. XIV und 794 Seiten.

In verhältnismässig sehr kurzer Zeit hat Herr Weber dem im vorletzten Bande dieser Zeitschrift S. 179 flg. besprochenen ersten Bande seines Lehrbuches der Algebra den zweiten Band folgen lassen. Das Werk wird damit zunächst vollständig; doch nimmt der Herr Verfasser eine Fortsetzung, welche namentlich die Anwendungen der Algebra im Gebiete der elliptischen Funktionen betreffen soll, für später in Aussicht.

Der zweite Band schliesst sich durchaus an den ersten an, und beide sind somit geeignet, den Lernenden von den Elementen an in die schwierigeren Teile der modernen Algebra einzuführen. Dabei dürfte die besondere Bedeutung des zweiten Bandes darin bestehen, dass es Herrn Weber mit glücklichem Erfolge gelungen ist, selbst solche Errungenschaften der Algebra, welche der neuesten Entwickelungsperiode derselben angehören, zu einem wohlgegliederten Ganzen zu vereinigen.

Es ist so vor allem erreicht, dass der in der modernen Mathematik eine so grosse Rolle spielende Gruppenbegriff nach seiner in der Algebra zur Geltung kommenden Seite eine umfassende Darstellung gewonnen hat. Dadurch ist Ersatz geschaffen für das seit 1870 nicht wieder aufgelegte

von Camille Jordan; und es ist ganz selbstverständlich, dass eine
lerrn Webers Feder fliessende Darstellung sowohl nach Seiten der
kten und allgemeinen Ideenbildung wie auch in den Anwendungen
rithmetik, Algebra und Geometrie den höchsten, eben jetzt erreichten
punkt der Entwickelung repräsentiert.

Gruppentheoretischen Untersuchungen sind drei unter den vier Büchern
weiten Bandes gewidmet. Das vierte Buch führt den Titel „Alge-
he Zahlen“ und wird gleichfalls ein besonderes Interesse erwecken.
Weber hat es nämlich in diesem Teile seines Werkes unternommen,
rithmetische Behandlung der algebraischen Körper zu schaffen, welche
Theorien von Dedekind und Kronecker in gleicher Weise gerecht
indem sie den Zusammenhang zwischen diesen Theorien herstellt.

Um den Lesern der Zeitschrift ein etwas genaueres Bild vom Inhalt
orliegenden Werkes zu geben, muss es genügen, die hauptsächlichen
n einzelnen Kapiteln behandelten Probleme zu bezeichnen.

Als die wichtigsten Abschnitte des ersten Buches mit dem Titel
ppen“ sind der zweite, dritte und vierte anzusehen. Der Begriff der
utativen oder Abelschen Gruppe, das ist einer solchen Gruppe,
sämtliche Elemente mit einander permutabel sind, ist hier nach seiner
tischen Seite, wie sodann weiter in seinen Anwendungen auf die
eilungstheorie verfolgt. Dieses Gebiet behandelte Herr Weber schon
in wichtigen Abhandlungen, deren interessantestes Ergebnis der
s des von Kronecker aufgestellten Satzes war, dass alle dem ratio-
Zahlenkörper angehörenden Abelschen Gleichungen Kreisteilungs-
ungen sind. Im ersten Buche kommt dieser Satz übrigens nur erst
ie kubischen und biquadratischen Abelschen Gleichungen mit ratio-
Koeffizienten zum Beweise. Der Grund für die Einfachheit dieser
liegt in dem Umstande, dass sowohl bei den ganzen komplexen Zahlen
ritten, wie bei denen aus vierten Einheitswurzeln für die Primfaktoren-
ung dieselben einfachen Gesetze gelten, wie bei den rationalen ganzen
n.

Die allgemeine Theorie der Abelschen Gruppen gründet sich auf
egriff der „Basis“ einer einzelnen Gruppe. Eine solche Basis besteht
ewissen ν Operationen $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ der Gruppe, in welchen jede
tion der Gruppe in der Gestalt $A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} \ldots \cdot A_\nu^{\alpha_\nu}$ darstellbar ist. Dabei
man, um die ganze Gruppe zu gewinnen, und jede Operation nur
l, die ν Exponenten α_k volle Restsysteme nach gewissen ν Moduln a_k
aufen lassen.

Die genauere Untersuchung der verschiedenen für eine und dieselbe
e möglichen Basen zeigt, dass die in den zugehörigen Moduln a_k vor-
enden höchsten Primzahlpotenzen bei Fortgang zu einer anderen Basis
r auftreten, und dass sie demnach als „Invarianten“ der Gruppe be-
et werden können. Hierüber hinaus ist der Begriff des „Gruppen-
kters“ grundlegend. Man hat darunter, wenn n der Grad (die Ord-
der Gruppe ist, ein auf n Weisen wählbares System von n Einheits-

wurzeln zu verstehen, welche sich bei Multiplikation gerade so verhalten, wie die Operationen der Gruppe bei Kombination.

Auf der so gewonnenen Grundlage erwächst die Behandlung der Frage nach den Teilern (Untergruppen) einer Abelschen Gruppe. Eine spezielle Entwickelung ergiebt sich für die Teiler vom Grade 2, welche aus den sogenannten „zweiseitigen" Elementen (Operationen der Periode 2) entspringen. Diese führen vermöge der Gruppencharaktere auf eine Einteilung aller Elemente der Gruppe in „Geschlechter". Für die (Abelsche) Gruppe der Komposition der quadratischen Formen führt dieser allgemeine Ansatz auf die von Gauss eingeführten Geschlechter der quadratischen Formen zurück.

Auf Grund der Theorie der Abelschen Gruppen lässt sich nun diejenige der „Kreisteilungskörper" bei weitem tiefer durchbilden als es in Band I möglich war. Der Begriff des Kreisteilungskörpers ist dabei so zu fassen, dass darunter irgend ein Körper endlichen Grades verstanden ist, dessen sämtliche Zahlen rationale Funktionen von Einheitswurzeln sind.

Es zeigt sich, dass bereits alle Kreisteilungskörper gewonnen werden, wenn man für die einzelnen Grade der Einheitswurzeln die zu den betreffenden „Kreisteilungsperioden" (Gauss) gehörenden Körper aufstellt. Die Untersuchung gipfelt in der Aufstellung eines Algorithmus, um für eine gegebene Gruppe alle zugehörigen Kreisteilungskörper, und jeden nur einmal darzustellen. Die Spezialausführungen betreffen die kubischen und biquadratischen Kreisteilungskörper und hieran schliesst sich der schon oben erwähnte Beweis des Theorems über Abelsche Gleichungen dritten und vierten Grades mit rationalen Koeffizienten.

Der erste und letzte Abschnitt des ersten Buches ist allgemeinen gruppentheoretischen Betrachtungen gewidmet. Dort mussten überhaupt erst die Grunddefinitionen der Gruppentheorie in allgemeinster Gestalt gegeben werden (nachdem in Band I nur von Permutationsgruppen gehandelt wurde). Hier finden die Sylowschen und verwandte Sätze ihren Platz, und es wird über die neueren Untersuchungen von Hölder, Cole u. a. berichtet, welche als ein Hauptziel verfolgen, die gesamten einfachen und zumal nicht-metacyklischen Gruppen niederer Grade (Ordnungen) aufzufinden und zu charakterisieren.

Das zweite Buch ist den endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen von n Veränderlichen gewidmet. Und zwar behandelt unter den vier Abschnitten dieses Buches der erste die grundlegenden Sätze dieses Gegenstandes, soweit dieselben für die engeren Zwecke der Algebra von Wichtigkeit sind. Die drei folgenden Abschnitte sind besonderen hierher gehörenden Gruppengattungen gewidmet.

Im ersten Abschnitt sind zwei Gesichtspunkte als besonders wichtig zu bezeichnen. Als „Invariante" einer Substitutionsgruppe von n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ wird eine solche Form $F(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet, welche unverändert bleibt, wenn man auf $x_1, \ldots, x_n$ irgend eine Substitution der Gruppe ausübt. Hier gilt dann das wichtige von Hilbert bewiesene Theorem,

sich die gesamten Invarianten einer Gruppe in einer endlichen An- unter ihnen als ganze rationale Funktionen darstellen lassen. Es ist besondere Zierde des fraglichen Abschnitts, dass Herr Weber den ertschen Beweis im einzelnen durchführt. Der zweite Hauptgesichtspunkt bschnitts besteht in der Besprechung einer von Klein herrührenden Er- rung des algebraischen Grundproblems. Diese Erweiterung besteht in der hrung der sogenannten „Formenprobleme": Man soll aus den gegebenen en der Gruppeninvarianten die zugehörigen Wertsysteme der Variabeln ., x_n berechnen. Hier ordnet sich die Auflösung der allgemeinen ıung n^{ten} Grades als besonderer Fall ein. Die zugehörige Gruppe be- aus den $n!$ Permutationen von $x_1, \ldots, x_n$, welche sich ja als Sub- ionen der x_i auffassen lassen; die Invarianten sind die symmetrischen tionen von $x_1, \ldots, x_n$. Insofern hier eine Gruppe in n Variabeln ., x_n zu Grunde liegt, hat man es mit einem Formenproblem n^{ter} „Di- on" zu thun. Die Auflösung einer „reinen" Gleichung irgend eines s kommt entsprechend auf ein Formenproblem erster Dimension zurück; ıandelt es sich nämlich um eine „unäre" aus einer Substitution $x' = \varepsilon x$ zeugenden Gruppe. Die Aufgabe ist nun immer, den Auflösungs- ss einer Gleichung auf die Lösung eines oder mehrerer Formenprobleme nöglichst niedriger Dimension zurückzuführen. Bei den Gleichungen en, dritten und vierten Grades reicht man mit Formenproblemen · Dimension. Die Auflösung der Gleichung fünften Grades ist auf weidimensionales Formenproblem reduzibel; und es ist neuestens durch an gefunden, dass sich die Auflösung der Gleichung sechsten Grades n Formenproblem dritter Dimension zurückführen lässt. Doch konnte Weber diese letztere Entdeckung wegen des vorgerückten Druckes mehr aufnehmen.

Der siebente Abschnitt hat als Hauptziel die Aufzählung aller end- Gruppen binärer Substitutionen, was auf die cyklischen Gruppen, iedergruppen und die Gruppen des Tetraeders, Oktaeders und Ikosa- führt. Das Prinzip der Aufzählung dieser Gruppen besteht bei allen nten Ableitungen in der Lösung einer gewissen diophantischen Gleich- Doch kann man zu dieser diophantischen Gleichung auf mehreren n gelangen, welche teils geometrische, teils funktionentheoretische, algebraische Argumente benutzen. Dem Charakter des ganzen Werkes rechend leitet Herr Weber die fragliche diophantische Gleichung aus raischen Überlegungen ab.

Nun folgt in einem besonderen Abschnitt eine ausführlichere Theorie ndlichen Gruppen binärer Substitutionen. Das Ziel ist, die Gruppen öglichst einfacher Gestalt wirklich herzustellen und die zugehörigen Systeme der Invarianten (die Grundformen) kennen zu lernen.

Der neunte Abschnitt ist Untersuchungen über diejenigen einfachen pen des Grades $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ gewidmet, welche in der Transformation Ordnung der elliptischen Funktionen auftreten. Hierbei ist p als

Primzahl gedacht; und man kann die einzelne Gruppe als Gruppe aller inkongruenten Substitutionen:

$$x' \equiv \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \pmod p$$

deuten. Eine systematische Aufzählung aller in diesen Gruppen enthaltenen Teiler (welche Gierster zuerst ausführte) strebt der Herr Verfasser nicht an. Eine kurze Spezialausführung ist nur der bei $p = 7$ eintretenden Gruppe des Grades 168 gewidmet. Die nähere Besprechung der mit dieser Gruppe zusammenhängenden ternären Entwickelungen wird später gegeben.

Das dritte Buch enthält in sechs Abschnitten „Anwendungen der Gruppentheorie." Der erste, für sich stehende, Abschnitt giebt einen durch die zwischendurch gewonnenen gruppentheoretischen Ergebnisse basierten Ausbau der schon in Band I behandelten Theorie der metacyklischen Gleichungen.

Darüber hinaus sind es zwei grosse Untersuchungsrichtungen, welche hier zur Sprache kommen.

Einmal entstammt der analytischen Geometrie eine Reihe interessanter algebraischer Probleme, von denen Herr Weber zwei mit grosser Ausführlichkeit behandelt: das Problem der Bestimmung der neun Wendepunkte einer ebenen Kurve dritter Ordnung und dasjenige der Bestimmung der 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung. Die Darstellung behandelt auch die geometrische und invariantentheoretische Seite der Probleme elementar und ausführlich, sodass auch nach dieser Seite hin keine speziellen Vorkenntnisse erforderlich sind.

Fürs zweite finden hier die algebraischen Schöpfungen Kleins über die Zurückführung der Lösung einer Gleichung auf die Lösung von Formenproblemen ausführliche Berücksichtigung. Die Behandlung der Gleichung fünften Grades wird auf das binäre Ikosaederproblem reduziert. Diese Behandlung hängt direkt mit der Frage nach der Transformierbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf eine Gleichungsform mit nur einem Parameter zusammen; nach einem von Kronecker ausgesprochenen und von Klein bewiesenen Satze ist diese Transformation bei alleinigem Gebrauch von natürlichen Irrationalitäten (im Gebiete rationaler Resolventen) nicht ausführbar, sondern nur erst nach Adjunktion einer gewissen accessorischen Irrationalität. Die beiden letzten Abschnitte des dritten Buches sind der schon im vorigen Buche studierten Gruppe des Grades 168 gewidmet. Dieselbe wird hier in ihrer Gestalt als Gruppe von 168 ternären Kollineationen untersucht, und es werden diejenigen Gleichungen siebenten Grades diskutiert, welche entweder direkt oder nach Auflösung einer gewissen biquadratischen Gleichung auf das Formenproblem jener ternären Gruppe reduzibel sind.

Das vierte Buch, welches die voraufgehenden erheblich an Umfang übertrifft, behandelt die moderne Theorie der algebraischen Zahlen, wie schon oben kurz angedeutet ist. Es ist das besonders Wertvolle dieses Buches, dass der Herr Verfasser hier eine möglichst allseitige Darstellung

den Fundamenten der fraglichen Theorie entwirft. Die Idealtheorie durch ihren Begründer, R. Dedekind, selbst in einer Darstellung be-elt, welche zumal in der neuesten Auflage durch Schärfe und Form-ndung die gerechte Bewunderung aller wirklichen Leser erwirbt. Da-n aber steht Kronecker, welcher von Beginn seiner mathematischen chungen an der Durchbildung einer eigenartigen Theorie der algebrai-n Zahlen gearbeitet hat, die zwar künstlicher als die Idealtheorie iert, aber für viele fasslicher ist. Hierüber hinaus kommen in neuester die Entwickelungen von Minkowski hinzu, welche bei zahlreichen amentalen Fragen, so der Bestimmung der Klassenanzahlen, der Theorie Einheiten, den Sätzen über den Zahlwert der Diskriminanten, ihren erordentlichen Wert gezeigt haben. Man muss Herrn Weber Dank en, dass er in alle diese verschiedenen Richtungen Einblick gewährt, dass die Einheitlichkeit seiner Darstellung irgend darunter litte.

In der Fundierung der Theorie folgt der Herr Verfasser den An-uungen Kroneckers. Der Begriff der zu einem algebraischen Körper renden „Funktionale" (die Benennung ist nach einem Vorschlage von n Dedekind gewählt) steht im Mittelpunkt. Ein solches Funktional eine rationale Funktion beliebig vieler unbestimmter Grössen $x, y, z \ldots$ mit Koeffizienten, die im zu Grunde liegenden Körper enthalten sind. etzterer der rationale Körper, so spricht man von einem „rationalen" ktional. Ein solches kann als Produkt eines positiven rationalen Bruches eines Quotienten zweier ganzen ganzzahligen „primitiven" Funktionen $x, y, \ldots$ dargestellt werden. Jener vortretende rationale Bruch heisst absolute Betrag des Funktionals, und, ist derselbe ganzzahlig, so nennt auch das Funktional „ganz". Die Übertragung dieser Benennungen die Funktionale eines beliebigen Körpers vollzieht sich auf Grund des tandes, dass jedes Funktional Wurzel einer Gleichung:

$$t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \cdots + A_m = 0$$

deren Koeffizienten rationale Funktionale sind. Jenes Funktional heisst nn „ganz", wenn die rationalen Funktionale $A_1, \ldots, A_m$ sämtlich ganz Die Zahlen des zu Grunde liegenden Körpers gelten als Funktionale, denen die Unbestimmten $x, y, \ldots$ nur im nullten Grade vorkommen.

Auf dieser Grundlage erheben sich nun diejenigen Entwickelungen, he von der Anwendung der vier Grundrechnungsarten auf Funktionale ihren. Es ergeben sich die „Einheiten" unter den Funktionalen, die ziierten Funktionale, die Primfunktionale, der Satz von der eindeutigen egbarkeit in Primfunktionale, falls assoziierte Funktionale als nicht chieden gelten, etc. Möge unter den zahlreichen hier entspringenden en noch der eine genannt sein, dass jedes ganze Funktional assoziiert mit einem Funktional der Gestalt $(\alpha x + \beta y)$, wo α und β ganze en sind.

Bei der Weiterentwickelung tritt nun die Idealtheorie mehr in den lergrund. Es wird bewiesen, dass alle durch ein vorgelegtes ganzes

Funktional teilbaren ganzen Zahlen des zu Grunde liegenden Körpers ein Ideal im Sinne von Dedekind bilden, und dass solcherweise einem System assoziierter ganzer Funktionale ein Ideale eindeutig umkehrbar entspricht. Nach einer eben gemachten Angabe reicht man zur Gewinnung aller Ideale mit Funktionalen der Gestalt $(\alpha x + \beta y)$. Nimmt man eine einzelne ganze Zahl als Funktional, so gelangt man zu einem Hauptideale. Während also Dedekind die idealen Teiler Kummers durch reale Gebilde dadurch ersetzt, dass er allgemein eine reale oder ideale Zahl durch das Gesamtsystem der durch sie teilbaren realen Zahlen ersetzt, treten bei Kronecker die idealen Teiler direkt in realer Gestalt, nämlich als Funktionale, in die Erscheinung. Es handelt sich also bei Kronecker um eine sachgemässe Erweiterung des Körpers derart, dass im erweiterten Gebiete wieder die elementaren Gesetze der Teilbarkeit gelten.

Es folgen nunmehr zahlreiche Entwickelungen, die aus den Elementen der Dedekindschen Theorie bekannt sind, über Basen und Diskriminanten, über volle Restsysteme und Kongruenzen nach festen Moduln, über die Äquivalenz der Ideale, die Endlichkeit der Anzahl der Idealklassen etc.

Der folgende Abschnitt gewährt einen sehr interessanten Einblick in die Minkowskischen Methoden zur Bestimmung der Minima positiver quadratischer Formen von n Variabeln. Von den wichtigen Anwendungen, welche Minkowski von dieser Bestimmung gemacht hat, wird insoweit gehandelt, dass die Endlichkeit der Anzahl der Idealklassen von hieraus in neuer Weise dargelegt wird, sowie dass der schon früher vermutete, aber erst von Minkowski bewiesene Satz: „Es giebt ausser dem rationalen Körper keinen Körper von der Grundzahl ± 1“ gewonnen wird. Hieran sind Sätze über die Zerlegung der natürlichen Primzahlen in algebraischen Körpern, sowie über die Diskriminanten geschlossen.

In einem besonderen Abschnitt sind neuere Entwickelungen von Dedekind und Hilbert behandelt, in denen bereits von einem Körper höheren Grades ausgegangen wird und dadurch ein noch umfassenderer Körper definiert wird, dass eine Gleichung mit Koeffizienten jenes ersteren Körpers zu Grunde gelegt wird.

Die Anwendungen behandeln die beiden klassischen Beispiele der quadratischen Körper und der Kreisteilungskörper, wobei namentlich die letzteren ausführliche Berücksichtigung finden. Es ist dies um so erfreulicher, als Dedekind in der „allgemeinen Zahlentheorie“ den Kreisteilungskörpern nur wenig Raum widmen konnte. Hier hat nun Herr Weber auch alle Mittel beisammen, um seinen Beweis des Satzes, dass alle rationalen Abelschen Gleichungen Kreisteilungsgleichungen sind, zu entwickeln. Zwei besondere Abschnitte sind den Dirichletschen Methoden zur Bestimmung der Anzahl der Idealklassen in einem gegebenen Körper gewidmet. Der erste unter diesen Abschnitten ist allgemeinen Ansätzen gewidmet, und es musste zu diesem Ende eine Darstellung der bewunderungswürdigen Dirichletschen Einheitentheorie vorausgesandt werden. Diese Entwickelungen gelten für beliebige algebraische Körper, während

im folgenden Abschnitte die spezielle Durchführung für Kreisteilungskörper gegeben wird.

Der letzte Abschnitt, welcher für sich steht, hat das Ziel zu zeigen, dass über die algebraischen Zahlen hinaus noch sogenannte transcendente Zahlen existieren. Dieser Existenzbeweis wird zunächst auf Grund des Begriffs der abzählbaren Menge geliefert. Die Gesamtheit der algebraischen Zahlen ist abzählbar, ein Zahlenkontinuum jedoch auf keine Weise, sodass letzteres jedenfalls unendlich viele nicht-algebraische Zahlen enthält. Es folgt ein Referat über die Transcendenz von e und π, ein Gegenstand, der namentlich durch Hermites, Lindemanns und Hilberts glänzende Leistungen längst die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat.

Einige Ergänzungen zu Band I beschliessen das Werk.

Möchte es dem Herrn Verfasser gelingen, die geplante Fortsetzung seiner Untersuchungen zu einem ebenso glücklichen Abschluss zu bringen; und möchte dabei Kroneckers Vermutung, dass alle Abelschen Gleichungen quadratischer Zahlenkörper „Gleichungen der komplexen Multiplikation“ sind, zu einer wirklichen Erkenntnis werden.

Robert Fricke.

Vorlesungen über Algebra. Von Dr. Eugen Netto, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen. In zwei Bänden. Erster Band. Leipzig, B. G. Teubner, 1896. X und 388 Seiten.

Ungefähr zu gleicher Zeit mit dem zweiten Bande des Weberschen Lehrbuchs der Algebra hat Herr Netto einen ersten Band seines gleichfalls gross angelegten Algebrawerkes erscheinen lassen. Der Herr Verfasser hat in einer Voranzeige seines Werkes auf Herrn Webers Buch Bezug genommen; und man kann ihm nur durchaus zustimmen, dass beide Werke sehr wohl neben einander bestehen können, indem sie sich in verschiedener Hinsicht sehr glücklich ergänzen. Es entspricht dies den verschiedenartigen Tendenzen der beiden Herren Verfasser, die sich beide seit langer Zeit als Algebraforscher eines ausgezeichneten Namens erfreuen.

Der Unterschied beider Werke zeigt sich vornehmlich in der Stellung, welche sie zu den Nachbargebieten einnehmen. Es ist in dieser Hinsicht nicht von besonderem Belang, welche Vorkenntnisse von dem Leser verlangt werden. Herr Netto fordert vom Leser die Beherrschung der Grundlagen der Determinantentheorie und der elementaren Algebra, während Herr Weber möglichst alle zur Verwendung kommenden Begriffe ab ovo entwickelt. Weit wichtiger ist die Frage der Stellungnahme gegenüber dem Gruppenbegriff, den geometrischen Methoden und Anwendungen und der modernen Zahlentheorie. Die Stellung des Weberschen Werkes ist aus der vorangehenden Besprechung in dieser Hinsicht deutlich. In Anbetracht der Gruppentheorie und Geometrie ist Herr Netto der Kroneckerschen Tradition getreu. Ob der Ausschluss des Gruppenbegriffs nicht für die Be-

handlung der Galoisschen Theorie eine Erschwerung der Darstellung bedeutet, muss erst der zweite Band zeigen. Im übrigen hat Herrn Nettos Standpunkt, wie jeder konsequent durchgeführte und widerspruchsfreie Standpunkt, seine Berechtigung und sein Gutes. In arithmetischer Hinsicht ist ja selbstverständlich, dass alle diejenigen arithmetischen Momente, welche den Fundamenten der Algebra als solchen anhaften, nicht eliminiert werden können, vielmehr (wieder in Übereinstimmung mit Kronecker) besonders bevorzugt werden. Dagegen schliesst Herr Netto jedes Eingehen auf die Arithmetik im engeren Sinne, d. i. auf die Zahlentheorie aus; und wo eine Anleihe von den Elementen der Zahlentheorie nötig wird, wie z. B. bei den Kreisteilungsgleichungen, da werden die betreffenden Begriffe schnell nebenher entwickelt oder als bekannt angesehen. Während demnach Herrn Webers Buch namentlich in seinen letzten Teilen die weitestgehenden zahlentheoretischen Interessen befriedigte, beschränkt sich Herr Netto allein auf die Vertiefung des rein Algebraischen.

Was die Form der Darstellung der beiden in Rede stehenden Werke angeht, so fühlt man sich versucht, die Titel derselben mit einander auszutauschen. Herrn Webers Darstellung hat mehr den Charakter von Vorlesungen; ein und derselbe Gegenstand wird gelegentlich mehrfach und an entlegenen Stellen von verschiedenen Seiten beleuchtet (als Beispiel diene die Theorie der Gleichungen fünften Grades). Demgegenüber hat Herrn Nettos Art der Darstellung weit mehr den Charakter eines Lehrbuches. Enger gefasste Disposition und erschöpfende Behandlung der einzelnen zur Sprache kommenden Probleme sogleich an Ort und Stellen sind hier die Regel; dabei kommt auch die formale analytische Seite der einzelnen Gegenstände mit solcher ausführlichen Genauigkeit zur Geltung, wie es mehr in Lehrbüchern als in Vorlesungen geeignet erscheint.

Im ersten Bande giebt Herr Netto kein abgeschlossenes Ganze. Der Schluss des Bandes durchschneidet den Abschnitt über die algebraische Auflösung der Gleichungen, ein Gegenstand, der in der Hauptsache erst durch den zweiten Band zur Erledigung gebracht werden soll. Gerade dieser Teil des zweiten Bandes verspricht besonders interessant zu werden und dem ganzen Werke die Signatur aufzudrücken. Im ersten Bande kommen nur erst die algebraische Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades, sowie die Theorie der Kreisteilungsgleichungen zur Behandlung. Der letzteren Theorie sind drei Vorlesungen gewidmet. Die Gliederung ist so gewählt, dass in der ersten unter diesen Vorlesungen eine elementare Theorie der Einheitswurzeln gegeben wird, dass die zweite im wesentlichen Gauss' Theorie der Kreisteilungsgleichungen liefert, während die dritte Jacobis Anwendung Lagrangescher Methoden auf diejenigen Gleichungen darstellt, durch welche Perioden geringerer Gliederanzahl an solche höherer Gliederzahl gebunden sind.

Vom voraufgehenden Teile des vorliegenden Werkes steht die erste Vorlesung für sich. Der Mehrzahl der Leser dürften übrigens Definition und Rechnungsregeln der komplexen Zahlen ohne weiteres geläufig sein.

Anderseits sind die Entwickelungen über die aus zwei bez. drei Fundamentaleinheiten zusammengesetzten Zahlen an sich ja allerdings sehr interessant, kommen aber weiterhin kaum in Betracht.

Unter den folgenden Vorlesungen (2 bis 25) steht nur die fünfte für sich. Sie trägt einen durchaus arithmetischen Charakter und handelt von der Reduzibilität und Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen im natürlichen Rationalitätsbereich. Auf Grund des bekannten Gaussschen Satzes über Zerlegung ganzer ganzzahliger Funktionen hat man sich auf die Aufsuchung von Faktoren zu beschränken, die wiederum ganz und ganzzahlig sind.

Für die Aufsuchung solcher Faktoren wird die Methode von Kronecker entwickelt, welche letzterer in seinen „Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen“ giebt. Weiter finden in dieser Vorlesung spezielle Theoreme von Eisenstein und Königsberger über irreduzible Funktionen ausführliche Berücksichtigung. Von diesen Theoremen wird später bei den Kreisteilungsgleichungen Gebrauch gemacht.

Die noch übrigen unter den 25 ersten Vorlesungen sind algebraischen Entwickelungen gewidmet. Dieselben gruppieren sich um folgende Hauptgesichtspunkte: Fundamentaltheorem nebst Anwendungen auf Zerlegung und Interpolation (Vorl. 2 bis 4), Kettenbruch- und Reihenentwickelungen rationaler Funktionen (Vorl. 6 bis 8), Theorie der symmetrischen Funktionen (Vorl. 9 bis 11), Beziehungen zur Invariantentheorie (Vorl. 12 bis 15), Theoreme über Anzahl der Wurzeln einer Gleichung innerhalb beschränkter Intervalle (Vorl. 16 bis 21), Methoden zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln (Vorl. 22 bis 25).

Alle diese Gegenstände werden in durchsichtiger Disposition und mit grosser Genauigkeit im einzelnen behandelt. Folgende kurze Andeutungen mögen zur näheren Orientierung ausreichen.

Beim Fundamentaltheorem über die Wurzelexistenz kommen neben Gauss erstem Beweise namentlich die bezüglichen Entwickelungen Cauchys zur Geltung, und zwar sowohl diejenigen von 1821, welche den Beweis der Existenz einer Wurzel zum Ziele haben, sowie auch die späteren Methoden Cauchys zur Bestimmung der Anzahl der Wurzeln in einem vorgeschriebenen Bereiche der Ebene der komplexen Variabeln. An die Linearfaktorenzerlegung der ganzen Funktionen schliesst sich die Ableitung der Lagrangeschen Interpolationsformel, welche ihrerseits die Quelle für die Eulerschen Identitäten und die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen wird. Auch die Übertragung der durch die Lagrangesche Interpolationsformel für ganze Funktionen geleistete Aufgabe auf rationale Funktionen, wie sie durch Cauchy gelöst und späterhin durch Jacobi eingehend studiert wurde, kommt hier zur Behandlung.

Der Euklidsche Algorithmus zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Funktionen nebst den wichtigen hieraus entspringenden Anwendungen auf Bestimmung mehrfacher Wurzeln etc. kommt demnächst zur Darstellung. In den beiden folgenden Vorlesungen wird das

Problem des grössten gemeinsamen Faktors zweier Funktionen f_1 und f der Grade n_1 und $n\,(> n_1)$ sehr weit in die rechnerischen Einzelheiten verfolgt. Das Problem, zwei ganze Funktionen $\Psi(z)$ und $\Phi(z)$ zu finden, welche mit $f_1(z)$ und $f(z)$ die Gleichung

$$f_1 \cdot \Psi - f \cdot \Phi = F$$

so erfüllen, dass die Summe der Grade von Ψ und F kleiner als n ist, wird bereits durch den Algorithmus von Euklid gelöst. Hier handelt es sich darum, das Bildungsgesetz der Funktionen Ψ und Φ eingehender in Erfahrung zu bringen. Zu diesem Ende wird die Entwickelung von $\frac{f_1(z)}{f(z)}$ nach absteigenden Potenzen von z benutzt, welche, ins Unendliche fortgesetzt, eine sogenannte rekurrierende Reihe vorstellt; es besteht nämlich für die Entwickelungskoeffizienten eine $(n+1)$-gliedrige Rekursionsformel. Diese Reihe ist immer dann konvergent, wenn $|z|$ den absoluten Wert der grössten Wurzel der Gleichung:

$$f(z) = 0$$

übertrifft.

Bei Behandlung der symmetrischen Funktionen dürfte bemerkenswert sein, dass der Satz von der Darstellung aller ganzen symmetrischen Funktionen in den n elementaren nicht nur auf dem von Gauss herrührenden Wege bewiesen wird, sondern dass auch der von Cauchy gelieferte Beweis, an welchen Kronecker weitere Folgerungen knüpfte, besprochen wird. Im Anschluss an die Theorie der symmetrischen Funktionen wird nun gleich die Bildung rationaler Resolventen besprochen, sowie der allgemeine Ansatz der Tschirnhausen-Transformation, wobei im speziellen die Transformation der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf eine Gleichung mit zwei Parametern geleistet wird. In einer besonderen Vorlesung wird von den wertvollen Folgerungen gesprochen, welche man bei der praktischen Verwendung der symmetrischen Funktionen aus dem Umstande ziehen kann, dass dieselben partiellen Differentialgleichungen genügen.

Die Resultante zweier Gleichungen $f = 0$ und $g = 0$ der Gerade n und $m \geq n$ wird zunächst in der gewöhnlichen Form einer Determinante $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades gegeben; und die Untersuchung wird so weit fortgesetzt, dass die Bedingung für die Existenz eines gemeinsamen Teilers ϱ^{ten} Grades von f und g angegeben wird. Die gleiche Untersuchung wird alsdann für den Fall ausgeführt, dass die Resultante in der von Bézout angegebenen Gestalt als Determinante m^{ten} Grades angesetzt wird. Eingehendere Entwickelungen über die Bildungsgesetze der Resultante nebst einer Anwendung auf das Fundamentaltheorem der Algebra füllen eine besondere Vorlesung. Eine weitere Vorlesung über Diskriminanten, sowie eine solche über quadratische Formen, wobei Sylvesters Trägheitsgesetz in den Mittelpunkt der Betrachtung rückt, schliessen den mit der Invariantentheorie verwandten Abschnitt des Buches.

In einer Reihe von Vorlesungen werden demnächst die zahlreichen Theoreme behandelt, welche die Abschätzung der Anzahl der Wurzeln

erhalb begrenzter Intervalle zum Gegenstande haben. Alle diese Theoreme, che einen klassischen Schatz der Gleichungstheorie vorstellen, finden en Höhepunkt in der Theorie der Sturmschen Funktionenketten. ch Hermites Behandlung der gleichen Gegenstände auf Grund der orie der quadratischen Formen wird von Herrn Netto ausführlich gestellt.

Vier Vorlesungen, welche von der näherungsweisen Berechnung der rzeln einer Gleichung handeln, schliessen sich würdig den voraufenden an. Die Newtonsche Näherungsmethode steht hier natürlich an; doch wird auch hier der Gegenstand bis in seine neuesten Fortungen verfolgt. Die mehrfache Wiederholung einer und derselben ration (zum Zwecke der Annäherung an eine Wurzel) führt zum Bef der Iteration, dem eine besondere Vorlesung gewidmet wird. Spezielle ücksichtigung findet die Iteration einer linearen Funktion. Zweierlei ersuchungen von Lagrange kommen hier noch zur Darstellung. Die e betrifft die Gleichung der Quadrate der Wurzeldifferenzen einer geenen Gleichung; Ziel dieser Entwickelungen ist, die komplexen Wurzeln r Gleichung durch Aufsuchung der reellen Wurzeln einer anderen ichung zu gewinnen. Die zweite Untersuchung bezweckt eine Anerungsrechnung für reelle Wurzeln einer Gleichung durch gewisse tenbruchentwickelungen. Doch steht diese Methode der Newtonen nach.

Es folgen nun die Vorlesungen über die algebraische Auflösung der chungen, über welche oben schon berichtet wurde, und welche ihre tsetzung im zweiten Bande finden sollen.

Als weiteren Hauptgegenstand des zweiten Bandes nimmt Herr Netto Eliminationstheorie in Aussicht.

ROBERT FRICKE.

Bibliographie

vom 25. November 1897 bis 13. Januar 1898.

Periodische Schriften.

Veröffentlichungen des königlichen astronomischen Recheninstituts zu Berlin. Nr. 6. BAUSCHINGER, J., Genäherte Opposition-Ephemeriden von 45 kleinen Planeten für 1898, Januar bis August. Berlin, Dümmler. M. 1. 20.

Abhandlungen der kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. 71. Bd. Nr. 4. SATKE, LADISLAUS, Über den Zusammenhang der Temperatur aufeinander folgender Monate und Jahreszeiten. Leipzig, Engelmann. M. 4.

—— 72. Bd. Nr. 1. HAUSSNER, ROB., Tafeln für das Goldbachsche Gesetz. Ebenda. M 15.

Sitzungsberichte, Münchner. Mathematische Klasse. 1897. 2. Heft München, Franz. M. 1. 20.

Sitzungsberichte, Wiener. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 1. Abt. 106. Bd. 4.—7. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 5. 40.

Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben von G. und E. WIEDEMANN. Neue Folge. 63. Bd. 1897 (Festschrift für GUST. WIEDEMANN zum 50jährigen Doktorjubiläum). Leipzig, Barth. M. 5.

Publikationen der Sternwarte des eidgenössischen Polytechnikums zu Zürich. Herausgegeben von A. WOLFER. 1. Bd. Beobachtungen der Sonnenoberfläche in den Jahren 1887—1889. Zürich, Schulthess. M. 12.

Veröffentlichungen der königlichen Sternwarte zu Bonn. Herausgegeben von FRIEDR. KÜSTNER. Nr. 2. Untersuchungen über die Eigenbewegung von 335 Sternen. Bonn, Cohen. M. 7.

Zeitschrift für Luftschiffahrt und Physik der Atmosphäre. Inhalts-Verzeichnis der Jahrgänge XI—XV (1892—1896). Berlin, Mayer & Müller. M. —. 60.

Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 64. Bd. Wien, Gerolds Sohn. geb. M. 70.

:hregister der Abhandlungen und Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1846—1895. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.50.

lender, astronomischer, für 1898. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien ($16^0 20' 22''\cdot 3 = 1^h 5^m 21^s\cdot 49$ östlicher Länge von Greenwich, $48^0 13' 55''\cdot 4$ nördlicher Breite). Herausgegeben von der kaiserl. königl. Sternwarte. Wien, Gerolds Sohn. kart. 2.40.

Geschichte der Mathematik und Physik.

GGENDORFFS Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 3. Bd. 12. und 13. Lieferung. Leipzig, Barth. à M. 3.

Reine Mathematik.

HLER, G., Ebene Geometrie (Sammlung Göschen). 2. Auflage. Leipzig, Göschen. M. —. 80.

ION, MAX, Analytische Geometrie der Ebene (Sammlung Göschen). Leipzig, Göschen. M. —. 80.

ICKE, ROB., Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. Dritter (Schluss-) Teil. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 1.

EYER, A., Aufgabensammlung. 1375.—1386. Heft. Stuttgart, Maier. à M. —. 25.

THE, RUD., Untersuchungen über die Theorie der isothermen Flächen. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.

Angewandte Mathematik.

JENSTEIN, R., Die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht. 4. Auflage. Stuttgart, Bergsträsser. M. 3. 50.

— Die graphische Statik. 4. Auflage. Ebenda. M. 5.

OSSE, W., Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung. Leipzig, Quandt & Händel. M. 5. 20.

EIN, HERM. J., Astronomische Abende. Leipzig, E. H. Mayer. M. 5. 50.

ISSBACH, JUL., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. Dritter Teil. Die Mechanik der Zwischen- und Arbeitsmaschinen. 2. Auflage. Bearbeitet von GUSTAV HERRMANN. Dritte Abteilung. Die Maschinen zur Formänderung. 14.—16. Lieferung. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 9.

ENNER, LEO, Spaziergänge durch das Himmelszelt. Leipzig, Mayer. M. 5. 50.

ndwörterbuch der Astronomie. 10. und 11. Lieferung. Breslau, Trewendt. à M. 3. 60.

LEUSCHNER, ARMIN OTTO, Beiträge zur Kometenbahnbestimmung. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.40

Physik und Meteorologie.

GRAHAM, WILL. P., Über den Verlauf des Potentialgradienten in Geisslerschen Röhren. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.60

LOMMEL, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. Leipzig, Barth. geb. M. 7.20

GLAZEBROOK, R. T., Das Licht. Grundriss der Optik für Studierende und Schüler. Deutsch von E. ZERMELO. Berlin, Calvary & Co. geb. M. 3.60

KORN, ARTH., Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. 2. Auflage. Zweiter Teil. Zweiter Abschnitt (Schluss). Berlin, Dümmler. M. 1.50

RIGGENBACH, ALB., Ergebnisse 7jähriger Niederschlags-Registrierungen in Basel. Karlsruhe, Braun. M. 1.50

RUDOLPH, H., Die Konstitution der Materie und der Zusammenhang zwischen ponderabler und imponderabler Materie. Berlin, Friedländer & Sohn. M. 1

FALB, RUD., Neue Wetterprognosen und Kalender der kritischen Tage für 1898, Januar bis Juni. Berlin, Steinitz. M. 1

ABRAHAM, MAX, Die elektrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter, behandelt nach der Maxwellschen Theorie. Dissertation. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.50

Tafel I.

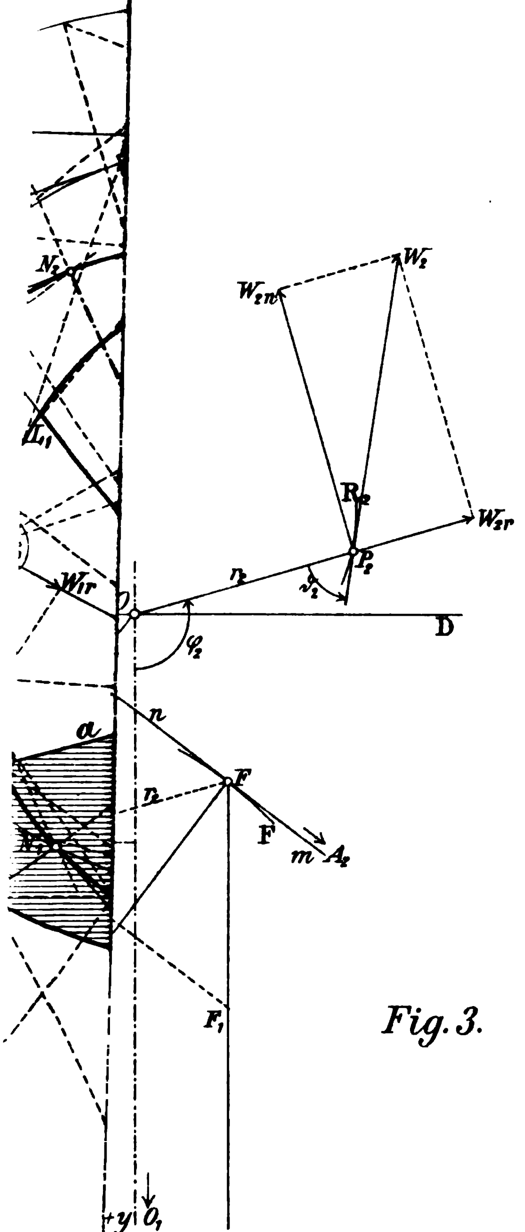
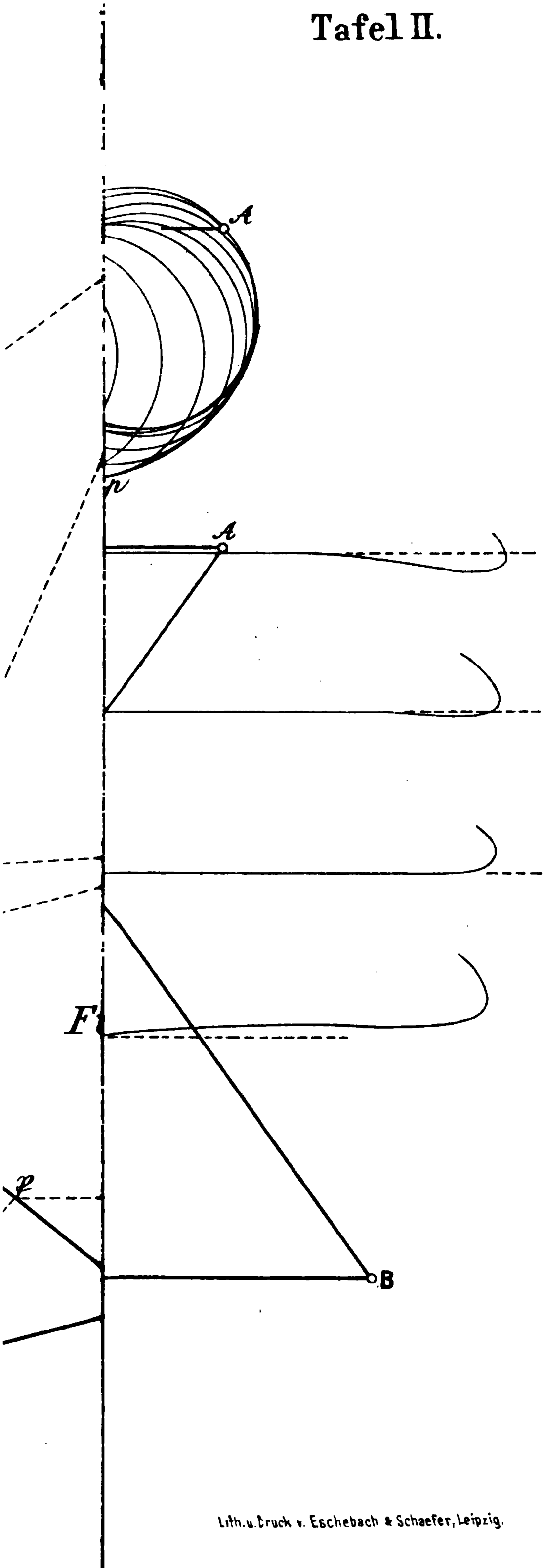


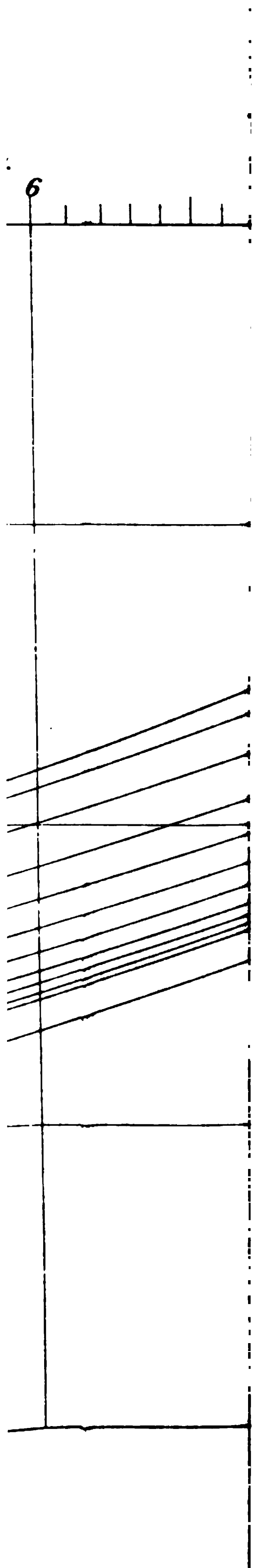
Fig. 3.

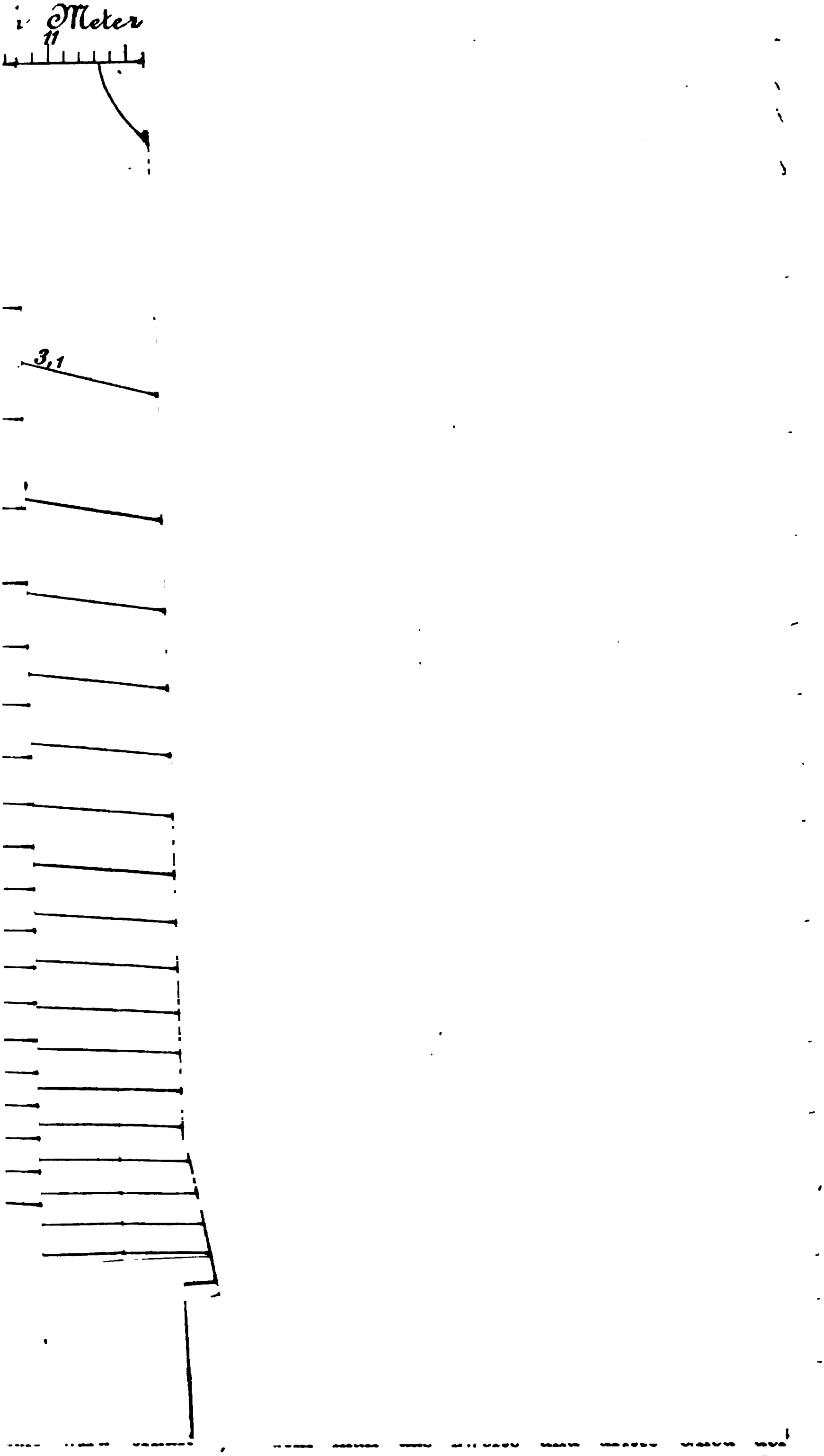
Lith. u Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Tafel II.



Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.


6


Meter
11
3,1

Historisch-litterarische Abteilung.

Fermats Observatio zum Satze des Nikomachus.

Von

Prof. G. Wertheim.

Bekanntlich hat Bachet zu Diophants Schrift über Polygonalzahlen einen Anhang in zwei Büchern geschrieben. Der Satz 27 des zweiten Buches giebt die dem Nikomachus zugeschriebene Zerfällung der Kubikzahlen in aufeinander folgende ungerade Zahlen:

$$1 = 1^3, \quad 3 + 5 = 2^3, \quad 7 + 9 + 11 = 3^3, \ldots$$

Die auf diesen Satz bezügliche Observatio von Petrus Fermat war bis in die neueste Zeit nicht verstanden worden, so dass man den Text für verstümmelt hielt. Erst Tannery hat die wahre Bedeutung gefunden und S. 341 des ersten Bandes seiner Ausgabe der Werke Fermats mitgeteilt.

Der Satz lautet bei Bachet:

Unitas primum cubum; duo sequentes impares conjuncti, secundum cubum; tres sequentes tertium cubum; quatuor succedentes, quartum, semperque uno plures sequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares constituunt.

Fermat hatte dazu bemerkt:

Hanc propositionem ita constituo magis universalem. Unitas primam columnam in quacunque polygonorum progressione constituit; duo sequentes numeri, mulctati primo triangulo toties sumpto quot sunt anguli polygoni quaternario mulctati, secundam columnam; tres sequentes, mulctati secundo triangulo toties sumpto quot sunt anguli polygoni quaternario mulctati, tertiam columnam, et sic eodem in infinitum progressu.

Also in freier Übersetzung:

„Dieser Satz lässt sich in folgender Weise verallgemeinern. Für jede Reihe von Polygonalzahlen in die erste Säule gleich 1. Die zweite Säule wird erhalten, indem man das zweite und dritte Glied der

arithmetischen Reihe, aus welcher die betrachteten Polygonalzahlen entstehen, addiert und von der Summe das Produkt aus der ersten Dreieckszahl in die um 4 verminderte Anzahl der Ecken subtrahiert. Addiert man weiter die drei folgenden Glieder (das 4., 5. und 6.) der arithmetischen Reihe und vermindert die Summe um das Produkt aus der zweiten Dreieckszahl in die um vier verminderte Anzahl der Ecken, so erhält man die dritte Säule, u. s. w. ins Unendliche."

Der Satz war nicht verstanden worden, weil man nicht wusste, was der Ausdruck columna in diesem Zusammenhang bedeutete, und das hat Tannery l. c. erklärt. Fermat versteht unter columna das Produkt aus n in die n^{te} Polygonalzahl, sodass also die Säulen der Viereckzahlen mit den Kubikzahlen identisch sind. Tannery irrt nur darin, dass er meint, Fermat habe den in Rede stehenden Ausdruck selbst gebildet („Cette expression technique, qu'il semble avoir forgée lui-même, est généralement restée incomprise"). Franciscus Maurolycus schon hat ihn benutzt und in seinem Werke Arithmeticorum libri duo (Venedig 1575) eine ganze Reihe von Sätzen über Säulen von Polygonalzahlen hergeleitet.

Rezensionen.

Higher mathematics. A text-book for classical and engineering colleges. Edited by Mansfield Merriman and Robert S. Woodward New-York 1896. XI und 576 Seiten.

In diesem Buche ist durch die beiden Herausgeber eine Sammlung von Monographieen über einzelne Teile der höheren Mathematik dargeboten; und zwar sind elf verschiedene Gegenstände von ebenso vielen verschiedenen Autoren behandelt. Die Gegenstände der einzelnen Monographieen und die Autoren sind die folgenden: 1. Auflösung der Gleichungen von M. Merriman (Lehigh University), 2. Determinanten von L. G. Weld (University of Jowa), 3. Projektive Geometrie von G. B. Halsted (University of Texas), 4. Hyperbolische Funktionen von J. Mac Mahon (Cornell University), 5. Kugelfunktionen, Besselsche und Lamésche Funktionen von W. E. Byerly (Harvard University), 6. Funktionen einer komplexen Variabelen von T. S. Fiske (Columbia University), 7. Differentialgleichungen von W. W. Johnson (Naval Academy), 8. Grassmanns Ausdehnungslehre von E. W. Hyde (University of Cincinnati), 9. Vektorenanalysis und Quaternionen von A. Macfarlane (Lehigh University), 10. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie von R. S. Woodward (Columbia University), 11. Geschichte der modernen Mathematik von D. E. Smith (Normal School of Michigan).

Bei den in Deutschland bestehenden Verhältnissen kann das vorliegende Buch für Studierende der Mathematik kaum in Betracht kommen; dieselben werden bei der Mehrzahl der behandelten Gegenstände zu ausführlicheren Spezialwerken greifen. Dagegen hat die Idee, welche die beiden Herren Herausgeber mit ihrem Werke verwirklichten, im Interesse der Studierenden an technischen Hochschulen viel Bestechendes. Es giebt zahlreiche Gebiete der höheren Mathematik, welche innerhalb der mathematischen Physik, Mechanik und Technik eine Rolle spielen, und welche gleichwohl nicht in den regelmässigen und obligatorischen Kursus der höheren Mathematik an den technischen Hochschulen hineingezogen werden können. In dieser Hinsicht begabteren Studierenden durch ein sachgemässes Buch zu Hilfe kommen, erscheint in der That sehr verdienstlich.

Nur würde die von den Herren Herausgebern getroffene Auswahl des Stoffes (welche natürlich in erster Linie dem amerikanischen Bedürfnis dienen soll) diesseits in mehreren Hinsichten nicht recht passen. Und andererseits hätte sich wohl auch die Anordnung des Stoffes nach sachgemässen Prinzipien gestalten lassen.

In ersterer Beziehung ist zu bemerken, dass ein verhältnismässig stark ausgedehntes Kapitel über hyperbolische Funktionen nicht beifällig aufgenommen werden dürfte. Dieselben bieten theoretisch über die Exponential- und die trigonometrischen Funktionen hinaus nichts neues von Belang, und für die Praxis werden Tafeln für die hyperbolischen Funktionen durch die Logarithmentafeln einigermaßen ersetzt.

Dass ein besonderes Kapitel der Grassmannschen Ausdehnungslehre gewidmet ist, wird man im Interesse der allgemeinen Anerkennung Grassmanns als sehr erfreulich ansehen. Doch dürfte die Ausdehnungslehre bei der grossen Abstraktion ihrer Grunddefinitionen und bei der Zeit und Mühe, welche man aufwenden muss, um mit Grassmannschen Methoden selbstständig und erfolgreich operieren zu können, für technische Unterrichtszwecke kaum in Betracht zu ziehen sein.

Demgegenüber ist es entschieden ein Fehler, dass dem Buche kein Kapitel über elliptische Funktionen eingefügt ist, zumal im übrigen die Funktionentheorie nicht schlecht wegkommt. Infolge einer Bemerkung in der Vorrede haben die Herausgeber diese Unvollständigkeit ihrer Sammlung selber empfunden.

Eine ausführliche Inhaltsangabe der einzelnen Abhandlungen ist hier wohl kaum am Platze. Doch muss bemerkt werden, dass sich die erste Abhandlung im Vergleich zu manchen der weiter folgenden recht dürftig ausnimmt. Der Verfasser hat hier freilich auch nur eine Ergänzung der in den „text-books“ üblichen Darstellung der Algebra geben wollen. Die Folge ist, dass die Fundamentalsätze nur nebenher genannt werden, und dass die Mehrzahl der Entwickelungen nur in historischer und aphoristischer Form gegeben wird. Der modernen Gleichungstheorie scheint der Verfasser im wesentlichen fremd gegenüber zu stehen.

Betreffs der funktionentheoretischen Kapitel sei erwähnt, dass sich Herr Byerly als guter Kenner der älteren Theorie der Kugel-, Laméschen und Besselschen Funktionen erweist, und dass Herr Fiske in seiner Abhandlung über Funktionen einer komplexen Variabeln im wesentlichen die Cauchysche Theorie zur Geltung bringt. Im übrigen ist nur durchaus anzuerkennen, dass diese Kapitel in Ansehung ihres geringen Umfanges eine sehr vielseitige Behandlung ihrer Gegenstände darbieten; und dasselbe gilt auch von den übrigen hier nicht besonders genannten Abhandlungen der Sammlung.

Robert Fricke.

Theorie der Abelschen Funktionen. Von Dr. Hermann Stahl, Professor der Mathematik in Tübingen. Leipzig, B. G. Teubner, 1896. X und 354 Seiten.

Die neueren deutschen Bücher über Abelsche Funktionen betreffen meist spezielle Gebiete aus der Theorie dieser Funktionen. Eine allgemeine Behandlung dieser Theorie in Form eines Lehrbuches ist neuerdings von verschiedenen Seiten geplant und nunmehr durch Herrn Stahl wirklich zur Durchführung gebracht.

Bei dem Stande der bisherigen Lehrbücher über Abelsche Funktionen ist es zweifellos, dass Herr Stahl eine seit längerem bestehende Lücke ausgefüllt hat. Das bekannte Buch von C. Neumann ist mehr für das einführende Studium bestimmt und berücksichtigt auch die algebraische Seite der Theorie nur in sehr geringem Grade. Das Buch von Clebsch und Gordan, welches seinerzeit auf der Höhe der Wissenschaft stand, ist ausschliesslich auf kurventheoretisch-algebraische Vorstellungen basiert und lässt die allgemeinen funktionentheoretischen Begriffsbestimmungen Riemanns ausser Betracht. Zudem hat gerade auch die algebraische Seite der Theorie der Abelschen Funktionen nach Erscheinen des Clebsch-Gordanschen Buches vor allem durch Brill und Noether erhebliche Fortschritte gemacht. Wer demnach in einem Lehrbuche dem heutigen Stande der Theorie der Abelschen Funktionen gerecht werden will, muss vor allem den Schöpfungen Riemanns und den Forschungen der Algebraiker gleichmässig genügen, und dies ist durch Herrn Stahl in der That geschehen.

Allerdings ist zu bedauern, dass in den Grundlagen der Theorie der Riemannschen Fläche erst die zweite Stelle angewiesen ist, insofern überall von der Angabe einer algebraischen Relation $f(x, y) = 0$ ausgegangen wird. Die Folge ist, dass die Riemannschen Existenztheoreme, welche für gewisse Teile der modernen Funktionentheorie höchst wichtig sind, ausserhalb der Betrachtung bleiben. Im übrigen aber kann man nur sagen, dass das vorliegende Buch die Errungenschaften der Riemannschen Theorie der Abelschen Funktionen durchaus zur Geltung bringt, und es wird besonders interessieren, dass der Herr Verfasser zwei von Herrn Prym ausgearbeitete (ungedruckte) Vorlesungen Riemanns über elliptische und

Abelsche Funktionen aus dem Sommer 1861 und dem Winter 1861/62 hat benutzen können.

Die Anordnung des ganzen Stoffes und die Darstellung erscheinen sehr übersichtlich. Das ganze Buch zerfällt in zwei Teile: 1. Die algebraischen Funktionen und die Abelschen Integrale (die von Herrn Stahl gebrauchte Überschrift „Die rationalen Funktionen“ könnte doch leicht zu irrtümlicher Auffassung Anlass geben); 2. Das Jacobische Umkehrproblem. Beide Male werden in ganz kurze Einleitungen die bei den elliptischen Funktionen vorliegenden Verhältnisse skizziert, so dass die allgemeine Theorie als konsequente Verallgemeinerung aller einzelnen im elliptischen Falle auftretenden Gesichtspunkte erscheint.

Ein tieferes Eingehen auf Spezialuntersuchungen, wie z. B. auf die Fälle $p = 2$ und $p = 3$ vermeidet Herr Stahl durchaus. Es ist in dieser Hinsicht für das vorliegende Buch charakteristisch, dass der hyperelliptische Spezialfall in demselben keine besondere Berücksichtigung findet.

Um nunmehr auf die Einzelheiten des Inhaltes etwas näher einzugehen, so ist im ersten Abschnitt der Ausgangspunkt von einer algebraischen Gleichung $F(x, y) = 0$ gewählt, welche in y auf den n^{ten} Grad ansteigt. Die genaue Untersuchung der n Zweige der Funktion y von x führt auf die Einführung der Riemannschen n-blättrigen Verzweigungsfläche. Die Untersuchungen von Lüroth und Clebsch über die Normalformen der Riemannschen Flächen werden dargestellt. Selbstverständlich wird ausführlich von der Zerschneidung gehandelt, die Arten der Potenzreihenentwickelungen von y in der Umgebung einzelner Stellen der Fläche werden besprochen etc.

Der zweite Abschnitt wendet sich zunächst stark von Riemann ab, und hier ist offenbar der Einfluss Brills auf den Verfasser ein bedeutender gewesen. Wäre im ersten Abschnitt der Begriff der Riemannschen Fläche das Primäre gewesen, so würde der natürliche Zugang zum Riemann-Rochschen Satz, dem Brill-Noetherschen Reziprozitätssatze etc. derjenige über die Theorie der Integrale erster und zweiter Gattung sein. Dieser Entwickelungsgang hätte der ursprünglichen Riemannschen Wendung unmittelbarer entsprochen. Zugleich wäre der Charakter der „Invarianz“ der Darstellung mehr gewahrt geblieben. Die konsequente Fortbildung des im ersten Abschnitt eingenommenen Standpunktes lässt dagegen den Herrn Verfasser auch in Abschnitt II an die Angabe einer Relation $F(x, y) = 0$ knüpfen. Hierdurch wird ein mehr entwickeltes algebraisches Bild der Theorie gewonnen; und dabei sind es im wesentlichen Brill-Noethersche Gedanken, welche die Darstellung beherrschen. Die Theorie der algebraischen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche kleidet sich in die Lehre vom Schnitt einer Grundkurve $F(x, y) = 0$ mit anderen Kurven. Die bekannten Fundamentalsätze Noethers, der Begriff der Punktgruppe auf der Grundkurve, der Restsatz etc. beherrschen die Entwickelung. Der Anschluss an Brill und Noether ist ein so enger, dass auch Herr Stahl den Brill-Noetherschen Reziprozitätssatz als Riemann-Rochschen Satz bezeichnet (wie in der

ursprünglichen Darstellung der Herren Brill und Noether), während man sonst gewöhnlich den Satz über die Anzahl linear-unabhängiger Funktionen mit gegebenen Unstetigkeitspunkten als Riemann-Rochschen Satz bezeichnet.

Im dritten Abschnitt wird eine ausführliche Theorie der Abelschen Integrale der drei Gattungen geliefert. Hier tritt dann wieder die Riemannsche Fläche als Fundament der Betrachtung in ihr Recht, welche ja vermöge ihrer kanonischen Querschnittsysteme den übersichtlichsten Zugang zu der Lehre von den Integralperioden bietet. Es findet in diesem Abschnitt gleich auch eine ausführliche Darstellung des Abelschen Theorems ihren Platz.

Im folgenden Abschnitt, welcher die eindeutige Transformation behandelt, wird der Ausgangspunkt wieder von einer Grundkurve gewählt. Der Satz von der Erhaltung der Zahl p bei eindeutiger Transformation erfordert für diesen Standpunkt ausführliche Diskussion, während er bei der eindeutigen und konformen Beziehung zweier Riemannschen Flächen auf einander direkter ersichtlich ist. Weiter werden die $(3p-3)$ Moduln einer „Klasse" algebraischer Funktionen mit $p>1$ besprochen, und im zweiten Teile des Abschnitts wendet sich die Betrachtung der im Raume von $(p-1)$ Dimensionen gelegenen Normalkurve der Funktionen Φ zu, wobei auch die Noetherschen Sätze über die Anzahl linear-unabhängiger Flächen gegebenen Grades durch die Normalkurve abgeleitet werden.

Der zweite Teil des Werkes, welcher gleichfalls in vier Abschnitte zerfällt, ist vornehmlich der Theorie der ϑ-Funktionen von p Variabeln gewidmet. Die Einführung dieser Funktionen wird durch Formulierung und nähere Diskussion des Jacobischen Umkehrproblems motiviert. Die ϑ-Funktionen treten demnach nicht so unvermittelt wie in Riemanns Abhandlung auf, und zugleich meidet die Entwickelung den weiten durch Weierstrass eingeschlagenen Weg über die Integrale der dritten Gattung.

Im fünften Abschnitt findet man nun die zahlreichen Grundeigenschaften der ϑ-Funktionen m^{ter} Ordnung, speziell derjenigen erster Ordnung entwickelt, wobei für die letzteren die zweiteiligen Charakteristiken, die Einteilung in gerade und ungerade Funktionen etc. besprochen werden. Indem die Argumente der ϑ-Funktionen sodann mit p Integralen erster Gattung, das System der ϑ-Moduln aber mit dem System der zugehörigen Perioden identifiziert werden, sind die so ausgestalteten ϑ-Funktionen in ihrem Verhalten auf der zerschnittenen Riemannschen Fläche zu untersuchen. Hier spielen dann vor allem die bekannten Sätze über das Verschwinden der ϑ-Funktionen die fundamentale Rolle.

In den beiden folgenden Abschnitten wird nun das Fazit des ganzen Buches gezogen, indem die transcendenten Mittel der ϑ-Funktionen mit den algebraischen Entwickelungen des ersten Teiles in Beziehung gesetzt werden, um solchergestalt die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems und die Darstellung der algebraischen Funktionen der Fläche durch ϑ-Quotienten zu gewinnen. Die transcendent definierten p Nullpunkte einer

ϑ-Funktion erster Ordnung mit zweiteiliger Charakteristik liefern nun in algebraischer Formulierung die Berührungspunkte einer sogenannten Berührungskurve, welche überall da, wo sie die Grundkurve schneidet, dieselbe sogleich berührt. Der Quotient der linken Seiten zweier, derartige Berührungskurven darstellenden Gleichungen ist eine algebraische Funktion auf der Fläche, deren Quadratwurzel unverzweigt, aber nicht mehr eindeutig ist. Man gewinnt so die einfachsten, auf der Fläche existierenden „Wurzelfunktionen", welche das algebraische Gegenbild der ϑ-Quotienten erster Ordnung mit zweiteiligen Charakteristiken vorstellen. Diese Wurzelfunktionen mögen durch $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ bezeichnet sein, wo μ ein Symbol für die zugehörige zweigliedrige Charakteristik ist. Die algebraische Definitionsweise von $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ bringt es dann mit sich, dass erst die Quotienten zweier solcher Ausdrücke $\sqrt{\psi_\mu(x)}$, $\sqrt{\psi_\nu(x)}$ auf der Fläche unverzweigt sind. Bildet man die ϑ-Funktionen für solche Argumente, welche selbst mehrgliederige Integralsummen sind, so sind die Quotienten solcher ϑ algebraisch als symmetrische Funktionen der Integralgrenzen darstellbar, wobei stets ein Produkt von Wurzelfunktionen als Faktor in der Darstellung des ϑ-Quotienten auftritt. Dieser Ansatz wird für die $(p+1)$-gliederigen Integralsummen durchgeführt, wo die Wurzelfunktionen $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ zur Geltung kommen, sowie dann weiter für $(2p-2)$-gliederige Integralsummen, wo gewisse aus den Riemannschen Φ-Funktionen zu bildende Wurzelfunktionen $\sqrt{\varphi_\mu(x)}$ zu verwenden sind. Zur Lösung des Umkehrproblems werden p Formeln der ersteren Art [d. i. solche mit $(p+1)$-gliederigen Summen] verwendet, welche nunmehr gestatten, dem Umkehrproblem gemäss die p oberen Integralgrenzen in den p Integralsummen des Jacobischen Ansatzes aus den Werten dieser p Summen zu berechnen. Die explizite Durchführung dieser Auflösung des Umkehrproblems erfordert die genauere algebraische Untersuchung der Wurzelfunktionen $\sqrt{\psi_\mu(x)}$, sowie die nähere Berechnung der in den gedachten p Gleichungen enthaltenen transcendenten Elemente, nämlich der ϑ-Funktionen. Im siebenten Abschnitt werden die Relationen zwischen ϑ-Funktionen mehrgliederiger Integralsummen und algebraischen Funktionen in der allgemeinsten Gestalt in Untersuchung gezogen. Die Wurzelfunktionen mit höheren Exponenten, die Darstellung der algebraischen Funktionen durch die Primfunktion etc. kommen hier zur Darstellung. Hier folgen denn auch die Grundsätze der eigentlichen Abelschen Funktionen, d. i. der rationalen symmetrischen Funktionen der p oberen Integralgrenzen x_i in Abhängigkeit von den Summen

$$U_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_i}^{x_i} du_h$$

betrachtet. Es übertragen sich vor allem die Sätze über Addition, Multiplikation und Division der elliptischen Funktionen auf die so gedachten Funktionen $Al(U_1, \ldots U_p)$.

Im letzten, für sich stehenden Abschnitte sind die Ansätze der linearen Transformation entwickelt. Hier, wie überall, darf man es als einen Vorzug des Buches bezeichnen, dass es sich niemals in Einzelentwickelungen verliert, sondern auf die klare Hervorhebung der Hauptgesichtspunkte den wesentlichen Nachdruck legt.

Robert Fricke.

Conférences sur les mathématiques faites au congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago par Félix Klein, recuillies par le professeur Alex. Ziwet, traduites par M. L. Laugel. Paris 1898. A. Hermann. 8⁰, 128 S.

Über die Entstehung und den Inhalt des Evanston Colloquiums hat bereits Herr Fricke an dieser Stelle (Jahrgang 1895, S. 41—43) berichtet und die Bedeutung dieses Buches auch für deutsche Leser hervorgehoben; handelt es sich doch in ihm um die Darlegung der Grundgedanken und Hauptgesichtspunkte der modernen Mathematik. Die vorliegende französische Übersetzung wird daher nicht nur in Frankreich mit Freude begrüsst werden, sie wird auch vielen deutschen Mathematikern willkommen sein, die sich mit der englischen Sprache nicht befreundet haben. Herrn Laugel, dem wir schon eine Reihe vortrefflicher Übertragungen deutscher Abhandlungen verdanken, hat sich aber nicht mit der Rolle eines Übersetzers begnügt, er giebt vielmehr auf den letzten 17 Seiten bibliographische Noten, in denen die Entwickelungen des Textes weiter geführt werden und die um so wertvoller sind, als bei ihrer Abfassung Herr Klein selbst mitgewirkt hat.

Wir würden uns freuen, wenn diese Übersetzung auch in Deutschland recht weite Verbreitung fände, und Herr Laugel dadurch ermutigt würde, die von ihm geplante französische Übersetzung der Werke Riemanns wirklich erscheinen zu lassen.

Paul Stäckel.

Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von Gustaf Eneström. Stockholm. Generalregister für Band I bis X. 1887—1896.

Den Inhalt der Eneströmschen Bibliotheca mathematica pflegen wir regelmässig in unserem Abhandlungsregister mitzuteilen. Wenn wir des Generalregisters für die zehn ersten Bände besonders gedenken, so geschieht es, weil Herr Eneström in demselben die Photographien nahezu aller seiner Mitarbeiter, begleitet von kurzen, aber zuverlässigen biographischen Angaben, zum Abdrucke gebracht hat. Wir freuten uns ungemein in dieser Weise die persönliche Bekanntschaft von engeren Fachgenossen teils machen, teils erneuern zu können.

Cantor.

Die Geschichte der Rechenkunst vom Altertume bis zum XVIII. Jahrhundert von Franz Villicus, kaiserl. Rate, emer. k. k. Professor,

Direktor der Gremial-Handelsfachschule der Wiener Kaufmannschaft, Besitzer des Anerkennungs-Diplomes der Wiener Weltausstellung vom Jahre 1873. Mit Illustrationen, Zahlzeichen, Zahlensystemen und Rechenmethoden der alten Kulturvölker und altamerikanischer Völkerstämme, nebst einer tabellarischen Darstellung von Zahlwörtern des Zehnersystemes aus 72 Sprachen. Dritte vermehrte Auflage. Wien 1897. Carl Gerolds Sohn. VIII, 114 S.

Im Vorworte macht uns der Herr Verfasser mit 10 lobenden Besprechungen der früheren Auflagen bekannt und zieht aus diesem Beifalle die Folgerung, es habe kein Anlass vorgelegen, die neue Auflage im Inhalte wesentlich zu verändern. Hinzugekommen ist hauptsächlich ein Anhang, der die sogenannten chaldaeischen Zahlzeichen des Noviomagus schildert und Varianten der indisch-arabischen Zahlzeichen mitteilt. Wer von der Geschichte der Rechenkunst noch nichts weiss, wird aus der Schrift des Herrn Villicus manches lernen können; wer andere umfassendere Untersuchungen gelesen hat, wird nicht selten mit einiger Verwunderung finden, dass mit Vorliebe auf ältere Werke zurückgegriffen ist, wo doch neuere Bücher vorhanden waren, die jene älteren Ergebnisse teils ergänzen, teils richtig stellen.

Cantor.

Troisième centenaire de la naissance de Descartes. Numéro de la Revue de metaphysique et de morale spécialement consaré à Descartes. Paris, Juillet 1896. Armand Colin et Co. 200 p.

René Descartes ist am 31. März 1596 geboren. Es war ein glücklicher Gedanke der durch Herrn Xavier Léon vertretenen Leitung der *Revue de métaphysique et de morale* die 300. Wiederkehr dieses Jahrestags durch ein Heft zu feiern, welches ausschliesslich durch Aufsätze über Descartes gebildet wäre. Dreizehn Verfasser haben Beiträge geliefert, und 200 Seiten stark liegt das Erinnerungsheft vor uns. Ebensowohl der Zweck unserer eigenen Zeitschrift als die Begrenzung unserer Berechtigung zur Urteilsfällung verwehren uns ein Eingehen auf alle Beiträge, wie sie uns anderseits ein Verweilen bei einigen wenigen derselben gebieten, bei den Aufsätzen von Herrn P. Tannery, von Herrn D. J. Korteweg, von Herrn Ch. Adam.

Descartes physicien ist der Titel des Aufsatzes, in welchem Herr P. Tannery die Frage aufwirft, ob Descartes befähigt war, in der Physik eine hervorragende Rolle zu spielen? Descartes Zwecke zuerst erwägend findet der Verfasser, dass sie überall philosophische waren, dass mathematische, dass physikalische Untersuchungen für Descartes nur Mittel waren, seine allgemeine Methode zu prüfen, und dass es fast Zufall genannt werden könnte, dass dabei Ergebnisse von einer Bedeutung sich offenbarten, welche für sich den wissenschaftlichen Lebenszweck jedes anderen als Descartes hätten bilden können. Den mathematischen Leistungen diesen hohen Wert beizulegen, war nichts Neues. Herr Tannery begegnet sich in ihrer

Anerkennung mit allen, welche mit Geschichte der Mathematik sich beschäftigen, von denen keiner zweifelt, dass Descartes, hätte er auf Mathematik sich beschränkt, sie noch unendlich weiter gefördert haben würde, als er es schon that. Weniger Übereinstimmung herrscht darüber, ob Descartes sich auch die Physik mit Erfolg als eigentliche Fachwissenschaft gewählt haben würde? Herr Tannery behauptet es und findet, dass die Dioptrik Descartes das erste Beispiel mathematischer Behandlung eines von der Mechanik verschiedenen Abschnittes der Physik darstelle, was allein schon einen grossen Fortschritt bedeute; er findet, dass die Fehler, welche der Descartesschen Physik vorgeworfen werden, darin ihren Ursprung haben, dass er nicht einzelnen Wahrheiten nachging, sondern ein System aufbaute. Herr Tannery hätte vielleicht hinzufügen dürfen, dass Descartes in diesem Systeme die Fernkräfte verschmähte, ein Vorzug, der manche Irrtümer aufhebt.

Herr D. J. Korteweg schrieb Descartes et les manuscrits de Snellius d'après quelques documents nouveaux. Die alte Frage, ob das Brechungsgesetz zuerst von Snellius und dann unabhängig von diesem abermals von Descartes entdeckt wurde, oder ob Descartes sich eines geistigen Diebstahls an Snellius, dessen handschriftliche Aufzeichnung er kannte, schuldig machte, wird zu Gunsten der ersten Annahme entschieden. In der That ist aus Briefen von Descartes der Nachweis geführt, dass dieser 1729 in Besitz des Brechungsgesetzes war, und aus einem durch Herrn Korteweg in Asterdam entdeckten Brief von Golius an Constantin Huygens den Vater vom 1. November 1632 ist mit grosser Wahrscheinlichkeit zu folgern, dass Descartes erst nach diesem letzteren Datum mit dem Erstlingsrechte des Snellius bekannt wurde.

Herr Ch. Adam endlich berichtet unter Correspondance de Descartes, autographes et copies manuscrites über die Briefe von Descartes, welche sich handschriftlich erhalten haben und zeigt an einigen auffallenden Beispielen, wie solche Briefe sich gegenseitig zur Bestätigung dienen, insbesondere wie aus dem bekannten Datum eines Briefes das vergessene Datum eines anderen Briefes annähernd, wenn nicht sogar genau, bestimmt werden kann.

Cantor.

Christian Wolffs Verhältnis zu Leibniz. Habilitationsschrift von Walther Arnsperger, Dr. phil. Weimar 1897 bei Emil Felber. 72 S.

Der Verfasser der uns vorliegenden Abhandlung ist Philosoph, und so musste ihm wesentlich daran liegen ins Reine zu bringen, ob Wolffs Philosophie wirklich nur, wie man vielfach gemeint hat, eine Verwässerung Leibnizscher Gedanken war, oder ob man sie als eine Fortbildung derselben betrachten muss. Herr Arnsperger entscheidet sich für die letztere Auffassung. Wir selbst haben ja ganz andere Interessen bei Leibniz wie bei Wolff im Auge. Uns ist Leibniz der geniale Erfinder der Differentialrechnung, Wolff der Verfasser breitspuriger Lehrbücher und der in vielen

Zweigen sich zurechtsetzende Berichterstatter der Acta Eruditorum. Aber auch die mathematische Thätigkeit Wolffs erscheint in neuer und zweckmässiger Beleuchtung, wenn die Beziehungen zu Leibniz klar werden, und so ist schon nach dieser Richtung Herrn Arnspergers Untersuchung für die Geschichte der Mathematik fruchtbar zu machen. Die Mitarbeit an der Leipziger Zeitschrift vollends war meistens eine mathematische und deshalb haben wir allen Grund, Mitteilungen über die Entstehung des Mitarbeiterverhältnisses, wie sie zum Teil aus noch ungedruckten Briefen in Hannover uns werden, dankbar zu begrüssen.

Cantor.

Niklaus Blauner, der erste Professor der Mathematik an der bernischen Akademie. Von Professor Dr. J. H. Graf. (Separatabzug aus der Sammlung bernischer Biographien.) Bern 1897. Buchdruckerei K. J. Wyss. 23 S.

Niklaus Blauner wird vermutlich der grossen Mehrzahl unserer Leser ein durchaus unbekannter Name sein. Auch wir lernten ihn erst aus Herrn Grafs Biographie kennen, und vielleicht kennt Herr Graf selbst ihn erst, seit er ihm in den bernischen Unterrichtsakten aus der Mitte des 18. Jahrhunderts begegnete. Wir können weiter hinzufügen, dass es kein Unrecht gewesen wäre, Blauner der Vergessenheit zu überlassen. Dennoch ist die kleine Schrift in ihrer Art recht lesenswert, weil Blauner grade in seiner Unbedeutendheit ein Licht auf den armseligen Zustand des Unterrichtes in der Mathematik in der Schweiz um das Jahr 1750 zu werfen geeignet ist.

Cantor.

Essai sur la représentation analytique de la direction par Caspar Wessel. Traduction du mémoire intitulé: Om Directionens analytiske Betegning. [Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Femte Del, Kjobenhavn 1799] publiée avec les trois planches de l'original et préfaces de M. M. H. Valentiner et T. N. Thiele par l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie le 10 Mars 1797. Copenhague 1897. Höst & Sön. XIV, 60 p.

Der Diorismus der griechischen Geometer gab darüber Aufschluss, wann eine Konstruktion möglich sei, wann nicht. Wallis im 66.—69. Kapitel seiner Algebra von 1685 verband die geometrische Auflösung einer Aufgabe mit ihrer algebraischen Diskussion und kam der Hauptsache nach zu dem Ergebnisse, dass, wenn imaginäre Werte der Unbekannten auftreten, dieses daher rühre, dass gewisse Strecken in einer bestimmten Grösse oder Richtung gegeben waren, nach deren Abänderung die Auflösung reell d. h. thatsächlich konstruierbar werde. Nicht viel mehr war es, was Heinrich Kühn 1750 oder 1751 leistete. Von der wichtigsten Frage: wie lässt eine imaginäre Strecke sich versinnlichen? war weder bei Wallis noch bei Kühn

die Rede. Sie tauchte, wie es scheint, erst gegen 1786 auf. Wenigstens sagt Cauchy in seinem berühmten Aufsatze *Sur les quantités géométriques* von 1849 [Comptes Rendus XXIX, 250] in einer Anmerkung: *Une grande partie des résultats de ces recherches avaient été, à ce qu'il parait, obtenue même avant le siècle présent et dès l'année 1786 par un savant modeste. Mr. Henry-Dominique Truel, quil, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à Mr. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre.* Freilich war das Jahr 1810 ein viel zu später Zeitpunkt, um Erfinderrechte für Dinge geltend machen zu können, welche Argand 1806 im Drucke herausgegeben hatte. Aber auch Argands Veröffentlichung erweist sich nachgrade als eine jedenfalls selbständig erdachte Wiederholung dessen, was Caspar Wessel 1797 niedergeschrieben hatte, was seit 1799 in dänischer Sprache gedruckt war. Im 1. Bande von Poggendorffs Biographischem Wörterbuche von 1863 ist Wessel und seine Abhandlung genannt, aber wir glauben kaum, dass irgend ein Benutzer jenes Wörterbuches dadurch aufmerksam gemacht wurde. Erst 1895 hat Herr Christensen auf die Bedeutung jener Arbeit von 1797 hingewiesen, und die Dänische Akademie hat mit vollem Rechte einen Centenarneudruck derselben veranstaltet, welcher Caspar Wessel den verdienten Ehrenplatz in der Geschichte der Mathematik sichern wird.

Cantor.

Ludwig Otto Hesses **gesammelte Werke** herausgegeben von der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mit einem Bildnisse Otto Hesses. München 1897. Verlag der K. Akademie. VIII, 732 S.

Die Bayerische Akademie der Wissenschaften hat drei unmittelbare Schüler Hesses, die Herren Gundelfinger, Lüroth, Noether, und neben ihnen noch Herrn Dyck mit der Aufgabe betraut, Hesses Abhandlungen neu herauszugeben und mit denselben zu vereinigen, was etwa druckreif in seinem Nachlasse sich vorfinde. In letzterer Beziehung waren zwar drei Nummern schon durch die Herren Gundelfinger und Caspary dem Drucke übergeben, aber immerhin fanden sich noch zwei Aufsätze, welche nunmehr erstmalig bekannt werden: Beweise zu einigen Sätzen von Chasles und insbesondere die Fortsetzung zu Hesses erster Abhandlung von 1837 über Oberflächen zweiter Ordnung. Sie war beim Abdruck der Abhandlung im 18. Bande von Crelles Journal in Aussicht gestellt, war unter dem Titel „Konstruktion der zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlichen konjugierten Linien“ seit 1837 im Entwurfe fertig und später zu stark zwei Drittel ins Reine geschrieben, aber zur Herausgabe kam es nicht, vermutlich (wie Herr Lüroth annimmt) weil Hesse einen darin ausgesprochenen Satz nachträglich nicht für genügend sichergestellt hielt. Die Herren Herausgeber haben den einzelnen Abhandlungen wertvolle Anmerkungen beigegeben, welche teils kritischer Natur sind, teils

die Geschichte der betreffenden Untersuchungen vor und nach Hesses Eingreifen betreffen. Ein Lebensabriss Hesses, warm empfunden und geschrieben, vervollständigt den stattlichen Band, dessen Ausstattung zu dem Schönsten gehört, was wir an deutschen Drucken noch gesehen haben.

CANTOR.

Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Von JACOB STEINER. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 82 und 83.] Leipzig 1896. W. Engelmann. 126 und 162 S.

Wir haben im 41. Bande dieser Zeitschrift, Histor.-litter. Abt. S. 216 bei Gelegenheit der Anzeige von Steiners Geometrischen Konstruktionen das baldige Erscheinen seiner Systematischen Entwickeiung in Ostwalds Klassikern ankündigen dürfen. Es ist nunmehr in zwei Heften erfolgt, herausgegeben durch Herrn von Oettingen, welcher insbesondere zu Heft 82 einen dankenswerten Zusatz in Gestalt von Bemerkungen über das perspektivische Zeichnen gegeben hat.

CANTOR.

Grundriss der Differential- und Integralrechnung. Von Dr. LUDWIG KIEPERT, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover. I. Teil: Differentialrechnung, 8. Auflage; II. Teil: Integralrechnung, 6. Auflage.

Der fünften Auflage des II. Teils von 1894 folgte eine sechste von 1896, der siebente Auflage des I. Teils von 1895 folgte eine achte von 1897. Es wäre überflüssig diesen Daten ein weiteres Lob anzuschliessen. Wir bemerken nur, dass Herr Kiepert in der Vorrede zur Integralrechnung sich über den auch in dieser Zeitschrift ihm erteilten Rat, die beiden Bände zu verschmelzen, äussert. Rein äusserliche Gründe verhinderten die Befolgung des Rates, während Herr Kiepert, in der Sache mit uns einverstanden, den wirklichen Unterricht so geordnet hat, dass er auf die Abschnitte 1 bis 4 und 8 bis 11 der Differentialrechnung unmittelbar den ganzen ersten Teil der Integralrechnung folgen lässt, um dann wieder zur Differentialrechnung zurückzukehren. Bei dem geringen Unterschiede zwischen den beiden letzten Auflagen kann diese Anweisung auch den Besitzern der vorhergehenden Auflage dienen, und deshalb hielten wir es für wünschenswert, sie hier anzuführen.

CANTOR.

Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt von Dr. ROBERT FRICKE, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig. Heft I, 80 S. Heft II, 66 S. Heft III, 38 S. Braunschweig 1897. Friedrich Vieweg und Sohn.

Vorlesungen über Mathematik weichen in einer Beziehung von allen anderen an Hochschulen gehaltenen Vorlesungen ab. Während man bei

anderen Fächern dem Namen der Vorlesung den Inhalt, vielfach auch den Lehrgang entnehmen kann, ist das in der Mathematik ganz anders. Unter gleichem Titel werden oft himmelweit verschiedene Dinge vorgetragen! Kaum einige wenige Vorlesungen gleichen einander halbwegs, und zu diesen gehören diejenigen über Differential- und Integralrechnung. Um so wünschenswerter erscheint es, den Zuhörern gerade dieser gegenwärtigen Anfangsvorlesung einen Leitfaden empfehlen zu können, kurz genug, um die Vorlesung nicht entbehrlich zu machen, streng genug, um nicht bei jeder Gelegenheit durch den Lehrer als ungenügend bezeichnet werden zu müssen. Herr Fricke hat sich der Aufgabe unterzogen, ein solches Büchelchen herzustellen und, wenigstens was unser persönliches Urteil betrifft, mit vorzüglichem Erfolge. Wir haben bereits Zuhörer, welche eines Leitfadens in dem angegebenen Sinne sich bedienen wollten, auf die kurze, knapp elfeinhalb Druckbogen starke Schrift hingewiesen, und sie fanden darin genau was sie suchten, kein Lehrbuch, geschweige denn ein Handbuch, welches eine ganze Semesterfolge von Vorlesungen ersetzen will, aber eine zweckmässige Unterstützung bei der häuslichen Wiederholung des Vorgetragenen.

Cantor.

J. A. Serret, **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung** mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack, zweite durchgesehene Auflage von G. Bohlmann. Erster Band: Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1897, B. G. Teubner. XVI, 570 S.

Als Harnack 1884 das in Frankreich schon hochgeschätzte Serretsche Lehrbuch übersetzt und mit Anmerkungen bereichert herausgab, war sofort die allgemeine Meinung dahin gerichtet, das Werk habe entschieden gewonnen, und der Serret-Harnack, wie man zu sagen liebte, stehe mehr als das Original auf der Höhe der Wissenschaft. Aber dreizehn Jahre sind in dem Leben der heutigen Mathematik ein langer Zeitraum, und was 1884 nahezu allen Wünschen genügte, bedurfte 1897 bereits wieder der Ergänzung. Herr Bohlmann hat sich der Mühe unterzogen, das im Buchhandel vergriffene Werk zum Zwecke einer neuen Auflage abermals auf die Höhe der Wissenschaft zu bringen. Zwei Wege standen dazu offen. Zu den Harnackschen Anmerkungen konnten neue sie vervollständigende Anmerkungen hinzutreten, oder aber eine Umarbeitung konnte versuchen, das Neue mit dem Älteren und Alten zu verschmelzen. Jener erste Weg wäre vielleicht der pietätvollere gewesen; er hätte auch die Verantwortlichkeit jedes der drei Bearbeiter für seinen Anteil deutlich hervortreten lassen; aber, sagt Herr Bohlmann, und seine Behauptung dürfte berechtigt sein, das Buch hätte dadurch einen so inhomogenen Charakter erhalten, dass es seinen ursprünglichen Vorzug grosser Lesbarkeit darüber verloren hätte. Das gab den Ausschlag. Wir befinden uns infolge des getroffenen Entschlusses beinahe einem neuen Lehrbuche gegenüber,

und man könnte eher fragen, was ist von dem ursprünglichen Serret geblieben, als was hat Herr Bohlmann daran verändert? Das Vorwort beantwortet uns allerdings diese Fragen, und eine Vergleichung der verschiedenen Auflagen setzt uns in den Stand, die Richtigkeit der Antwort zu prüfen und zu bestätigen. Das erste und das elfte Kapitel, jenes von den einleitenden Begriffen, dieses von den Funktionen einer komplexen Variabelen handelnd, sind vollständig umgearbeitet. In jenem sind die Paragraphen, welche den Grenzbegriff kennen lehren, mit besonderer Sorgfalt behandelt, in diesem will dem Leser ein Zugang zu der Funktionentheorie, wie sie in Deutschland gelehrt zu werden pflegt, eröffnet werden. Grössere Veränderungen sind auch im 6. und 7. Kapitel vorgenommen worden, dort bei der Bestimmung der Maximal- und Minimalwerte von Funktionen mehrerer unabhängiger Variabelen, hier bei Erörterung der singulären Stellen ebener Kurven. Das Bedürfnis zur gemeinschaftlichen Benennung von Maximal- und Minimalwerten ein Wort zur Verfügung zu haben, dürfte ein allgemein empfundenes sein. Herr Bohlmann spricht in dieser Beziehung von Extremwerten; Referent bedient sich, um an die Wellenform der die Funktion versinnlichenden Kurve oder Oberfläche zu erinnern, des Wortes Kulminationswert. Vermutlich wird jedem das selbstgewählte Wort als das zutreffendere erscheinen. Eine Veränderung des 7. Kapitels in einem grundsätzlich wichtigen Punkte dürfte allgemeine Billigung finden. Serret hat in seinem Lehrbuche die Differentialrechnung von der Integralrechnung geschieden. Gleichwohl hat er im 7. Kapitel von dem Differential einer Fläche, von dem eines Bogens gesprochen und dabei die Fläche als Grenzwert der Summe geradliniger Vierecke, den Bogen als Grenzwert der Summe geradliniger Sehnen behandelt, mit anderen Worten: er hat die Summendefinition des bestimmten Integrals benutzt, bevor der Leser überhaupt etwas vom Integrieren weiss. Das hat nun Herr Bohlmann abgestellt. Er setzt freilich auch die Möglichkeit voraus eine Fläche und eine Bogenlänge zu messen, denn ohne diese Voraussetzung ist die Frage nach deren Differential gegenstandslos, aber jene vorausgesetzte Messung ist eine, man möchte sagen, handwerksmässige mittelst eines Planimeters oder mittelst der Wage und mittelst eines um den Bogen gelegten und dann ausgespannten Fadens. Die richtigere Grenzdefinition ist dadurch dahin verschoben, wohin sie dem Zusammenhange nach gehört, in den zweiten Band. Eine ähnliche Veränderung ist im 9. Kapitel bei der Bogenlänge von Raumkurven eingetreten. Eine sehr dankenswerte Bereicherung des Werkes besteht in einem alphabetisch geordneten Sachregister, fast unentbehrlich für jeden, der nicht anhaltend zu lesen, sondern nach Bedürfnis bald da bald dort nachzuschlagen beabsichtigt.

Cantor.

Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. Herausgegeben von Dr. Hermann Schubert,

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig 1897, B. G. Teubner. VI, 157 S.

Die Schubertschen Tafeln unterscheiden sich in mehrfacher Beziehung von sämtlichen in Deutschland in Gebrauch befindlichen Werken ähnlicher Richtung. Erstens hat Herr Schubert nach den Tafeln auch Gegentafeln aufgenommen, wodurch der Übergang vom Logarithmus zur Zahl, von der trigonometrischen Funktion zum Winkel direkt aufgeschlagen werden kann. Zweitens ist bei den trigonometrischen Tabellen links ausschliesslich Sinus und Cosinus, rechts ebenso ausschliesslich Tangens und Cotangens zu finden; ein Abwechseln zwischen Vorwärtsblättern und Rückwärtsblättern wird vermieden, so lange die gleiche Funktionenart in Rechnung tritt. Wir glauben mit Herrn Schubert in diesen Eigentümlichkeiten, welche indessen ausserhalb Deutschlands nicht ohne Beispiel dastehen, wesentliche Verbesserungen zu erkennen.

Cantor.

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. Ludwig Schlesinger. Zweiten Bandes erster Teil. Leipzig 1897, B. G. Teubner. XVIII und 532 S.

Kaum zwei Jahre nach dem ersten Bande des Werkes (vergl. das Referat der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1895, S. 166 flg.) ist seine Fortsetzung erschienen, noch nicht der Abschluss. Denn „die Fülle des zu bearbeitenden Materials hat eine Teilung des zweiten Bandes notwendig gemacht. Der vorliegende erste Teil behandelt die Gruppentheorie, die Umkehrprobleme im allgemeinen und diejenigen speziellen Theorien, die sich an die Integration einer linearen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale mit Hilfe der Eulerschen Transformierten angliedern lassen. Der zweite Teil wird die Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunktionen (insbesondere der elliptischen Modulfunktion), der Allgemeinen Fuchsschen Funktionen und die linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Koeffizienten zum Gegenstand haben."

Nach diesen Worten des Verfassers wenden wir uns sogleich zu einer knappen Darlegung des ausserordentlich reichen Inhalts des vorliegenden Bandes.

IX. Allgemeine Theorie der bei linearen Differentialgleichungen auftretenden Gruppen.

Der ganze Abschnitt steht wesentlich unter dem Zeichen der drei Namen Lie, Picard, Vessiot und enthält die neuerdings aufgedeckten Analogieen zwischen der Theorie der linearen Differentialgleichungen und derjenigen der algebraischen Gleichungen. Er steht in dieser Hinsicht zu dem Anfang des II. Abschnittes in Beziehung.

Die allgemeine lineare Gruppe L von n Veränderlichen ist eine n^2-gliedrige kontinuierliche Transformationsgruppe. Sie ist selbst nicht abzählbar, enthält aber als abzählbare Untergruppe die Gesamtheit der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem von Integralen einer vorgelegten

Differentialgleichung bei allen möglichen Umläufen erleidet, d. h. die Gruppe Ω der Differentialgleichung (später mit g bezeichnet).

Die Gruppe L von den n Veränderlichen $y_1 \dots y_n$ bildet das Analogon zur symmetrischen Gruppe von n Unbestimmten $x_1 \dots x_n$. Den elementaren symmetrischen Funktionen von $x_1 \dots x_n$ entsprechen diejenigen rationalen Differentialfunktionen p aus $y_1 \dots y_n$, die die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung mit dem Fundamentalsystem $y_1 \dots y_n$ bilden. — Die Gesamtheit der linearen Transformationen, die irgend eine rationale Differentialfunktion $R(y_1 \dots y_n)$ ungeändert lässt, bildet eine bestimmte Untergruppe von L. R, als Funktion von x, genügt einer Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der Resolvente. — Rationale Differentialfunktionen, die zur nämlichen Gruppe gehören, sind rational durch einander und durch die p ausdrückbar: ein Analogon des Lagrangeschen Satzes der Algebra.

Nimmt man als rationale Differentialfunktion von $y_1 \dots y_n$ eine sogenannte empfindliche Funktion, analog der Galoisschen, d. h. eine solche, die bei keiner linearen Transformation ungeändert bleibt, und stellt ihre Resolvente auf, so ist diese von der Ordnung n^2 und irreduktibel, solange die $y_1 \dots y_n$ unbestimmte Funktionen sind. Geht man aber von einer speziellen Differentialgleichung aus, so kann die Resolvente reduktibel und durch eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung ersetzbar werden. Die von der letzteren bestimmte Gruppe linearer Transformationen ist diejenige Untergruppe von L, die als Transformationsgruppe* G der vorgelegten linearen Differentialgleichung bezeichnet wird und eine hervorragende Rolle für sie spielt. Dies kommt namentlich in dem dem Galoisschen Fundamentaltheorem entsprechenden Picard-Vessiotschen Doppelsatz zum Ausdruck: „Jede rationale Differentialfunktion von $y_1 \dots y_n$ (Fundamentalsystem einer speziellen, vorgelegten linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten), die eine rationale Funktion von x ist, bleibt bei den Transformationen von G als Funktion von x ungeändert. Jede rationale Differentialfunktion von $y_1 \dots y_n$, die als Funktion von x bei den Transformationen von G ungeändert bleibt, ist eine rationale Funktion von x."

Durch „Adjunktion" der „Gattung" einer Differentialfunktion $R(y_1 \dots y_n)$, die bei den Transformationen von G und nur bei diesen formell ungeändert bleibt, zum „Rationalitätsbereich" der allgemeinen linearen Differentialgleichung (deren Transformationsgruppe L ist) wird deren Gruppencharakter identisch mit demjenigen der speziell vorgelegten Differentialgleichung mit der Transformationsgruppe G. — Für die Integration der Differentialgleichung handelt es sich um Reduktion der Transformationsgruppe durch

* Bei der fundamentalen Bedeutung dieses Begriffs wünschten wir seine Definition in Nr. 150 ganz explizite zusammengestellt und hervorgehoben, während man jetzt dieselbe unter mehrfachem Zurückblättern mühsam zusammensuchen muss. Das ist überhaupt eine wiederholt vorkommende Erscheinung.

geeignete Erweiterung des Rationalitätsbereichs. Die Integration hängt also mit der Struktur der Transformationsgruppe zusammen. — Auch die Integrabilität der Differentialgleichung durch Quadraturen kann an der Transformationsgruppe erkannt werden.

Das Bestehen einer algebraischen Relation zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems bedingt einen „Affekt" der Differentialgleichung. Ihre Transformationsgruppe ist als Untergruppe in der Gruppe jenes algebraischen Gebildes enthalten. Bei algebraischer Integrierbarkeit — ein Spezialfall des soeben erwähnten Falles — fällt die Transformationsgruppe G geradezu mit der Gruppe g der Differentialgleichung (siehe oben) zusammen. — Allgemein ist die Gruppe (g) eine Untergruppe der Transformationsgruppe (G).

Aus der Thatsache, dass eine rationale Differentialfunktion, die bei g ungeändert bleibt, im allgemeinen nur eine eindeutige Funktion von x, eine solche, die bei allen Transformationen von G aber ungeändert bleibt, eine rationale Funktion von x ist, rechtfertigt sich die Kleinsche Bezeichnung von g als Monodromie-, von G als Rationalitätsgruppe. — Die Reduktibilität einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten fällt mit derjenigen ihrer Transformationsgruppe zusammen.*

X. Spezielle Probleme der Gruppentheorie. Invarianten.

Manche Eigenschaften gehören nicht einer einzelnen linearen Differentialgleichung an, sondern auch allen denen, die mit jener in Bezug auf einen gewissen Bereich E cogredient sind. Dabei heissen zwei Differentialgleichungen innerhalb E cogredient, wenn beide innerhalb E eindeutige Koeffizienten haben und die abhängige Variable der einen durch die der anderen und ihre Ableitungen linear und homogen mit in E ebenfalls eindeutigen Koeffizienten ausdrückbar ist. Treten an Stelle der eindeutigen rationale Koeffizienten, so gehören die Differentialgleichungen insbesondere zu derselben Art. („Differentialgleichungen derselben Art" heissen bei Herrn Fuchs „zur selben Klasse gehörig", welche Bezeichnung von Herrn Schlesinger später auch noch, aber wieder in dem ursprünglichen Riemannschen Sinne benutzt wird.) Die Reduktibilität innerhalb E, bezw. die Reduktibilität einer Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten schlechthin, ist z. B. eine Eigenschaft aller mit einer Differentialgleichung cogredienten, bezw. zur selben Art gehörigen Differentialgleichungen. — Differentialgleichungen derselben Art haben dieselbe Rationalitäts- und Monodromiegruppe.

Es folgen die eleganten Sätze über die einer vorgelegten assoziierten Differentialgleichungen, wobei eine geometrische Interpretation der Ele-

* S. 13, Z. 13 von unten lies: „stetig veränderlich". — S. 35, Z. 10 von oben lies: „r-gliedrige" statt „n-gliedrige". — S. 68, Z. 14 von unten lies: „Teilgebilde" statt „Teilgebiete". — S. 80, Z. 11 von oben und 1 von unten lies: „Transformationsgruppe" statt „Gruppe".

mente des Fundamentalsystems als homogene Koordinaten in einem $n-1$-dimensionalen Raum sich fruchtbar erweist. Da diese n homogenen Koordinaten Funktionen von x sind, so bestimmen sie eine „Integralkurve“. Jene Sätze über die Differentialgleichung und ihre verschiedenen Assoziierten werden so zu geometrischen Sätzen über die Tangentialebenen verschiedener Stufe an der Integralkurve. Assoziierte Differentialgleichungen führen zu den Begriffen der „assoziierten Arten“ und „assoziirten Gruppen“, im Spezialfall zu den adjungierten Differentialgleichungen. — Mittelst der assoziierten Differentialgleichungen kann man die Frage entscheiden, ob eine vorgelegte lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten reduktibel ist oder nicht.

Geht man von den Integralen der Differentialgleichung zu den Integralquotienten über oder geometrisch zur Darstellung derselben Integralkurve durch nicht homogene Koordinaten, so treten an Stelle der linearen Gruppen projektive. Die Erhaltung der Integralkurve bei der allgemeinsten Transformation

$$x = \varphi(\xi), \quad y = \lambda \cdot z$$

veranlasst die Frage nach den Invarianten dieser Transformation. Die Differentialgleichung mit verschwindenden Invarianten führt dann wieder auf den Fall, dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems homogene Relationen bestehen, und auf Differentialgleichungen mit algebraischer Integralkurve.*

XI. Formulierung und allgemeine Diskussion der Umkehrprobleme.

Die besondere Behandlung des Falles von homogenen Relationen zwischen den Integralen einer Differentialgleichung vierter Ordnung, ein Problem, dem schon die Inaugural-Dissertation des Verfassers gewidmet war, liefert das Ergebnis, dass, abgesehen von gewissen Ausnahmsfällen, die unabhängige Variable eine algebraische Funktion des Ortes auf der Integralkurve ist, und leitet damit zu den Umkehrproblemen hin.

* S. 112. Der in Gleichung 2) enthaltene Schluss dürfte nur dann zu halten sein, wenn ein die sämtlichen Punkte $a_1 \ldots a_\sigma$ einschliessender Umlauf die Integrale ungeändert lässt. — S. 150 Zeile 9 von oben lies ($\mathfrak{A}$) statt (A). — S. 157 Zeile 7 von unten. Vom „dritten Glied einer Gleichung“ zu sprechen, ist unzulässig; mindestens müsste es dann heissen „Doppelgleichung“. Thatsächlich ist aber hier in Gleichung 1) zunächst nur für den komplizierten Ausdruck der linken Seite die abkürzende Bezeichnung $\mathfrak{Z}(u)$ eingeführt, sodass das Gleichheitszeichen $=$ beide Mal einen total verschiedenen Sinn hat, ein Umstand, auf den z. B. Kronecker gern aufmerksam machte. Es empfiehlt sich, das auch äusserlich kenntlich zu machen durch Gebrauch des Identitätszeichens $\equiv$ an der ersten Stelle. Dann genügt es auch von „rechter“ und „linker Seite“ der Gleichung zu sprechen. — S. 177 Zeile 16 von unten. Die spezielle lineare Gruppe L ist S. 92 definiert und seitdem nie wieder benutzt worden; es wäre daher geboten, hier wenigstens auf jene Definition zu verweisen. — S. 179 am Kopf lies 179 statt 180. — S. 187 Zeile 16 von oben lies „Exponent“ statt „Potenz“.

Die algebraisch integrierbaren Differentialgleichungen beliebiger Ordnung bilden ein Beispiel für den Fall, dass x eine eindeutige oder wenigstens endlich vieldeutige Funktion des Ortes auf der Integralkurve ist. Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung können gewisse algebraische notwendige Bedingungen aufgestellt werden, zu denen aber im allgemeinen noch andere transcendente Bedingungen hinzutreten müssen, damit der gewünschte Umstand eintritt. Als Bedingung ergiebt sich namentlich die Diskontinuität der projektiven Monodromiegruppe ϑ von einer Variablen η, dem Integralquotienten. — Für Differentialgleichungen höherer Ordnung ergiebt sich Entsprechendes für die projektive Monodromiegruppe der Integralquotienten. — Als Beispiel dient die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale erster Gattung.

Die Aufgabe, eine lineare Differentialgleichung mit gegebener Monodromiegruppe der Integralquotienten herzustellen, oder die Koeffizienten der Differentialgleichung als Funktionen der Parameter der zugehörigen projektiven Monodromiegruppe, d.h. im wesentlichen der Fundamentalinvarianten, zu studieren, führt bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu dem Ergebnis, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse ohne „scheinbar" singuläre Punkte, für welche 0, 1, ∞ drei der wirklich singulären Stellen sind, durch die projektive Monodromiegruppe der Integralquotienten eindeutig bestimmt ist. Man gelangt dabei zu einer (Riemannschen) Fläche F, ausgebreitet über der η-Ebene, in der x eine eindeutige Funktion des Ortes ist. Sie wird in solche Stücke F_0 (Fundamentalbereich, polygone générateur) zerschnitten, dass innerhalb derselben jeder Wert von x auch nur einmal auftritt. Endlich wird dieses Polygon F_0 zu einer Fläche $\overline{F}_0$ zusammengebogen, die im Sinne der Analysis Situs der x-Ebene, in der die singulären Punkte ausgesondert sind, äquivalent ist. Die umgekehrte Frage: der Existenzbeweis einer auf gegebener Fläche $\overline{F}_0$ eindeutigen Funktion X von η wird nach den Methoden der Herrn Schwarz und Neumann behandelt.

Verwandt mit den schon im X. Abschnitt eingeführten Begriffen von Differentialgleichungen derselben Art (= „Klasse" nach Herrn Fuchs) sind die jetzt benützten von Differentialgleichungen derselben Familie (Poincaré) und Klasse (Riemann). Wir bemerken über das gegenseitige Verhältnis dieser Begriffe nur, dass die Zugehörigkeit zur gleichen Klasse ein Spezialfall der Zugehörigkeit zur gleichen Art und diese wiederum ein Spezialfall der Zugehörigkeit zur gleichen Familie ist. Die Theorie der Differentialgleichungen derselben Klasse wird von Herrn Schlesinger erheblich ausgebaut.

Ihre Verwendung finden diese Betrachtungen sogleich bei der Darstellung der Fuchsschen Untersuchungen über Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist. Diese gipfeln in dem „wunderbaren" — wir würden lieber sagen „höchst merkwürdigen" — Satz, dass die m^{te} Assoziierte

einer linearen Differentialgleichung $2m^{ter}$ Ordnung mit jener Eigenschaft reduktibel ist.*

XII. Theorie und Anwendung der Eulerschen Transformierten.

Schon durch die Überschrift — die darin enthaltene Bezeichnung ist von Herrn Schlesinger in seinen neuesten Arbeiten eingeführt worden — wird dieser Abschnitt in Hinsicht auf das ihn beherrschende Prinzip und den allgemeinen Teil seines Inhaltes als Eigentum des Verfassers gekennzeichnet. Er handelt von der Lösung linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale, erstreckt auf geeignetem Wege — namentlich längs Pochhammerscher Doppelschleifen — und schliesst sich deshalb eng an den VII. Abschnitt an.

Den Eingang bildet eine Erweiterung des Abelschen Satzes von Vertauschung von Parameter und Argument bei linearen Differentialgleichungen. Als Eulersche Transformierte $\mathfrak{D}'=0$ bezw. $E'=0$, einer vorgelegten Differentialgleichung, (A) $P=0$, bezeichnet Herr Schlesinger eine Differentialgleichung, die aus (A) hergeleitet werden kann und die Eigenschaft hat, dass (A) durch ein gewisses bestimmtes Integral gelöst wird, sobald man darin für eine im Integranden enthaltene Grösse eine Lösung von $\mathfrak{D}'=0$ einsetzt. Die Beziehung ist eine reziproke: für die Adjungierte, $\mathfrak{D}=0$, von $\mathfrak{D}'=0$ ist die Adjungierte $P'=0$ von (A) Eulersche Transformierte, und daher wird auch $\mathfrak{D}=0$ mittelst einer Lösung von $P'=0$ durch bestimmte Integrale gelöst.

Dieser hochinteressante allgemeine Satz von Herrn Schlesinger, der für Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse besonders einfache Gestalt annimmt, dient in dem ganzen Abschnitt als gemeinsame Quelle auch für schon früher bekannte Einzelergebnisse. Dahin gehört die Fuchssche Methode der Berechnung der Fundamentalsubstitutionen mit Hilfe solcher bestimmter Integrale, deren Integrationswege sich bei den Umläufen ändern, der Ausdruck der Doppelschleifenintegrale durch Eulersche Integrale — von diesem Spezialfall ist der Name der ganzen Theorie hergeleitet — die Integration der Tissot-Pochhammerschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale, die weitere Spezialisierung dieser Differentialgleichung auf diejenige der Gaussschen Reihe und jeweils die Berechnung der Fundamentalsubstitutionen, die überhaupt als wichtigste Anwendung der Lösung durch bestimmte Integrale anzusehen sein dürfte. — Die Voraussetzung, dass das Integral der Eulerschen Transformierten der Tissot-Pochhammerschen Differentialgleichung algebraisch sei, führt auf die Periodizitätsmoduln der Abelschen Integrale als Funktionen eines Parameters, auf den allgemeinen, darauf bezüglichen Satz von Fuchs, die

* S. 243 Zeile 8 von unten lies $x_{\nu-1}$ statt x_n. — S. 347 Zeile 12 von oben lies „wirklich" statt „wirklichen". — S. 365 Zeile 2 von oben lies „(S. 108)" statt „(S. 156)".

explizite Ausführung für hyperelliptische Integrale und noch spezieller die elliptischen Periodizitätsmoduln und die Legendresche Relation.

Den Abschluss endlich bildet die Haedenkamp-Fuchssche Relation zwischen den hyperelliptischen Integralen verschiedener Gattung und zwischen verschiedenen Grenzen, die doppelte Ableitung der Weierstrassschen Relationen zwischen den kompletten Integralen erster und zweiter Gattung und die Fuchsschen Untersuchungen, die an den Abelschen Satz von Vertauschung von Parameter und Argument anknüpfen.

Zu beachten sind noch einige Ergänzungen und Berichtigungen, die sich auf den ersten Band beziehen.

Vorstehend haben wir kurz die Hauptmaterien bezeichnet, die in dem vorliegenden Band von Herrn Schlesinger zur Darstellung gebracht werden. Aber wir haben dabei nur in geringem Maße hervorheben können, wie vielseitig die Kenntnisse des Verfassers, wie eindringend ins Einzelne und weitschauend in Bezug aufs Ganze sein Blick sich erweist, wie viel Originelles er in dem Bande niedergelegt, wie er es verstanden hat, oft anscheinend ganz Verschiedenartiges unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu gruppieren und zu einer grossen Theorie zusammen zu weben.

Solchen Vorzügen gegenüber erscheint es fast kleinlich, einige allgemeine, rein äusserliche Einwendungen gegen die Form der Darstellung zu erheben. Wir wollen nicht davon reden, dass allerhand sprachliche Missbräuche sich häufig finden, dass der Ausdruck oft rein logisch an Präzision zu wünschen lässt, und dass die Interpunktion nicht immer nach jedermanns Geschmack sein wird, wiewohl möglichste Strenge auch in diesen Dingen die Lektüre eines mathematischen Werkes erheblich erleichtern kann. Abgesehen aber hiervon auch kann nicht geleugnet werden, dass das Buch im allgemeinen schwer zu lesen ist, schwerer, als es der an sich meist schwierige Gegenstand notwendig macht. Dass der Verfasser selbst niemals im Detail erstickt, sondern stets den Blick für den grossen Zusammenhang offen behält, haben wir oben voll anerkannt. Um so wünschenswerter aber wäre, dass er die Übersicht auch für einen erst lernenden Leser noch mehr erleichterte, zumal ja das Ganze glücklicherweise doch mehr die Form von „Vorlesungen" als die eines Nachschlage-Kompendiums trägt. Dazu würde z. B. schon beitragen, wenn die Kapitel eigene Überschriften erhielten. Wozu sind sie sonst eigentlich überhaupt da? Will man aber solche Kapitelüberschriften für den eigenen Gebrauch hinzufügen, so stösst man oft auf Schwierigkeiten, weil in der That die Einteilung nicht immer eine notwendige ist. Dass auch mitunter in einem „Urtext" eine andere Einteilung bestanden hat, dafür spricht verräterisch der Umstand, dass mehrmals die Numerierung der Gleichungen nicht mit dem Kapitel abbricht, sondern sich noch ein Stück in das neue Kapitel hineinzieht!

Vor allem aber würden ausführlichere und häufigere Übersichten — mindestens zu Beginn eines neuen Abschnittes — über das zuletzt Vorgetragene und das nun Folgende in der Art, wie sie z. B. Weierstrass in seinen Vorlesungen so meisterhaft zu geben pflegte, dem gerügten Übel-

stand abhelfen. Vielleicht lernt ja der Leser, der diese Ergänzung selbst vornimmt, am meisten; aber vielleicht ermüdet mancher andere vorher! Warum z. B. wird der noch unkundige Leser nicht gleich auf S. 416 darauf hingewiesen, dass an den dort aufgestellten Satz sich alles folgende anknüpft? — Je weiter man in dem Bande vorschreitet, desto spärlicher wird der Text: für eine mathematische Abhandlung vielleicht in vielen Fällen — auch nicht in allen! — ein Vorzug, für ein Handbuch sicher nicht in demselben Maße!

Endlich noch Eines. Die Gewohnheit, besonders wichtige Formeln nicht in die fortlaufende Numerierung aufzunehmen, sondern durch Buchstaben hervorzuheben, verdient durchaus Anerkennung. Wenn es sich dann aber z. B. um eine Differentialgleichung handelt, deren linke Seite auch wieder durch einen grossen Buchstaben symbolisiert wird, und dieser einmal mit dem Numerierungsbuchstaben übereinstimmt [z. B. S. 420 $(E) E_s(u) = 0$], ein anderes Mal aber nicht, wo es ebenso gut möglich wäre, z. B. in demselben Kapitel 1. XII $(A)\, D_x(y) = 0$, deren Koeffizienten durch P_k bezeichnet sind, und wenn man dann obendrein noch vom ersten Bande her (z. B. S. 37) an eine gewisse Übereinstimmung in der Bezeichnung der Koeffizienten und der ganzen Gleichung gewöhnt ist, so hört die Erleichterung auf und macht einer ausserordentlichen Erschwerung des Studiums Platz!

Indessen — noch einmal — alles dies sind kleine Äusserlichkeiten, die gegenüber den gerühmten Vorzügen kaum ins Gewicht fallen. Es wird nur als eine weitere Anerkennung für den Verfasser wirken, dass der Referent keine sachlicheren Einwendungen vorzubringen hatte; und er hätte auch über diese Dinge völlig geschwiegen, wenn er sich nicht von ihrer Erwähnung manchen Vorteil für den noch ausstehenden Schlussband verspräche. Er möchte ein so schönes Werk auch in einer vollendet schönen Form sehen.

Lothar Heffter.

Elemente der Arithmetik für die mittleren und oberen Klassen höherer Lehranstalten. Von W. Pflieger. Strassburg 1896. Fr. Bull. 128 S.

Der Verfasser vorliegenden Buches schliesst sich im wesentlichen der Darstellung an, welche Weierstrass in seinen Vorlesungen über die Theorie der analytischen Funktionen als Einleitung zu geben pflegte. Im besonderen hält auch er an dem Postulat fest, dass bei jeder Erweiterung des Zahlengebietes die neuen Zahlen den Gesetzen des alten Gebietes zu gehorchen hätten. Auf dieser Grundlage giebt er eine Darstellung der verschiedenen Rechnungsoperationen und schliesst hieran zwei ausführliche Abschnitte über den binomischen Lehrsatz und die Exponentialfunktion.

Ob die immerhin geschickte, aber im Ausdruck zu abstrakt gehaltene Darstellung für den Schulgebrauch geeignet ist, möchte Referent bezweifeln. Sicher dürfte sie dem einen oder anderen Fachgenossen eine bequeme Gelegenheit bieten, sich mit der Weierstrassschen Darstellung der Arithmetik bekannt zu machen.

E. Jahnke.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten: erster, zweiter, dritter Lehrgang. Von K. Schwering. Freiburg i. B. 1896. Herder. 58 S.: Mk. 0. 80; 87 S.: Mk. 1; 95 S.: M. 1. 20.

Es ist eine vortreffliche Aufgabensammlung, welche den Vorteil bietet, dass sie die Einführung eines besonderen Lehrbuches unnötig macht. Die den einzelnen Abschnitten vorgesetzten Erläuterungen sind knapp und klar geschrieben, die Aufgaben geschickt zusammengestellt. Ein grosser Teil der Aufgaben ist neu. Insbesondere möchte Referent auf eine Reihe hübscher Aufgaben in geometrischer Einkleidung (vergl. dritten Lehrgang) aufmerksam machen. Es ist zu wünschen, dass die Sammlung an recht vielen Schulen Eingang finden möge.

E. Jahnke.

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Von G. Holzmüller. Gymnasialausgabe. Zweiter Teil, im Anschluss an die preussischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Entlassungsprüfung reichend. Leipzig 1896, B. G. Teubner. 279 S.

Auf die Gymnasialausgabe des ersten Teiles musste eine solche des zweiten folgen, welche die aus dem ersten Teil ausgeschiedenen Abschnitte aufzunehmen hatte.

E. Jahnke.

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. Von Th. Bürklen. Enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, niederen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der höheren Analysis. Leipzig 1896, Göschen. 211 S. Mk. 0. 80.

Das vorliegende Büchlein soll in erster Linie den Bedürfnissen der Repetition und des Nachschlagens dienen. Es erscheint durch den reichen Inhalt, die übersichtliche Anordnung und die sorgfältige Gliederung für diese Zwecke in hohem Maße geeignet. So sind in der Geometrie die Sätze über Flächenvergleichung und -Berechnung zu einer Gruppe zusammengestellt. Ebenso findet man die geometrischen Örter unter wenigen Gesichtspunkten vereinigt. In der Algebra und algebraischen Analysis werden neben den Grundgesetzen und besonderen Fällen auch die Hilfsmittel gegeben, welche eine weitergehende, geschickte Anwendung der Formeln ermöglichen, z. B. die wichtigsten Formen der Einführung neuer Unbekannten bei der Lösung quadratischer Gleichungen, die Hauptformen der Exponentialgleichungen, welche auf algebraische zurückführen. Bei den Kettenbrüchen, diophantischen Gleichungen und bei der Lösung höherer numerischer Gleichungen u. a. finden sich nicht bloss die Formeln, sondern auch die Durchrechnung eines Beispiels nach zweckmässigem Schema.

Hieran schliessen sich Abschnitte über Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, mathematische Geographie, analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.

In dem Abschnitt über höhere Analysis giebt der Verfasser zunächst aus dem Gebiete der Differentialrechnung allgemeine und spezielle Formeln über Differentiation, die Taylorsche und Mac-Laurinsche Reihe und Regeln zur Berechnung unbestimmter Ausdrücke, sowie der extremen Werte von Funktionen, weiter aus dem Gebiete der Integralrechnung die Grundformeln zur Integration einfacher Funktionen, Integrationsmethoden für explizite Funktionen und einige bestimmte Integrale, endlich als Beispiele für die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie die wichtigsten Begriffe aus der Theorie der ebenen und Raumkurven und der krummen Flächen.

E. Jahnke.

Die Grundlehren der Stereometrie. Von J. Lengauer. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Übungsaufgaben. Kempten 1896. J. Kösel. 110 S.

Der vorliegende dritte Teil eines Lehrbuches der Geometrie enthält das geometrische Pensum der achten Klasse der bayerischen Gymnasien, die räumliche Geometrie und die sphärische Trigonometrie. Die letztere ist mit der Lehre vom Dreikant verknüpft.

Die Darstellung ist knapp und klar, die zahlreichen Figuren durchweg anschaulich. Für die Herleitung der Körperinhalte wird das Cavalerische Prinzip herangezogen.

Für den Ausdruck Parallelepipedon benutzt der Verfasser nicht die von Herrn Martus vorgeschlagene Verdeutschung Rautenprisma, welche schon in zahlreiche Lehrbücher übergegangen ist, er sagt statt dessen Parallelflach, das rechtwinklige Parallelflach nennt er mit Herrn Martus Quader.

Beigegeben sind den einzelnen Kapiteln eine grosse Zahl von Übungsaufgaben, ausser Rechenaufgaben auch Konstruktionsaufgaben, welche die Brauchbarkeit des Lehrbuches noch erhöhen dürften.

E. Jahnke.

Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Von H. Fenkner. Zweiter Teil: Raumgeometrie. Nebst einer Aufgabensammlung bearbeitet mit besonderer Berücksichtigung der Anforderungen bei der Abschlussprüfung. Zweite Auflage. Braunschweig 1896. O. Salle. 109 S. Mk. 1.40.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass die Hauptsätze über die dreiseitigen Ecken und in einem Anhange die Sätze über Kugelmütze, Kugelzone, Kugelausschnitt, Kugelabschnitt hinzugekommen, sowie dadurch, dass die Übungsaufgaben erheblich vermehrt sind.

Was die Figuren anbetrifft, so zeigen sie auch in der zweiten Auflage nicht überall die wünschenswerte Anschaulichkeit.

E. Jahnke.

Leitfaden der elementaren Mathematik. Von A. Sickenberger. Zweiter Teil: Planimetrie. 3. Auflage. München 1896. Th. Ackermann. 123 S.

Die zweite und dritte Auflage unterscheiden sich von der ersten durch die den einzelnen Abschnitten beigefügten Übungsbeispiele. Die dritte Auflage ist ein unveränderter Abdruck der zweiten.

E. Jahnke.

Lehrbuch der Geometrie. Von F. Meigen. Hildburghausen 1896. O. Pezoldt. 82 S.

Der Verfasser giebt die Hauptsätze der elementaren Geometrie in ansprechender Darstellung. Die Anschauung und Bewegung werden ausgiebig als Beweismittel herangezogen. Recht hübsch ist der Abschnitt über die Parallelen. Das Kapitel über das gleichschenklige Dreieck würde durch Einführung des Begriffs „Symmetrieaxe“ an Einfachheit gewinnen, auch könnte der Abschnitt über die Ähnlichkeit von Dreiecken bedeutend gekürzt werden. Im grossen und ganzen aber kann das Buch, welches als viertes Heft der mathematischen Abteilung einer Sammlung „Technische Lehrhefte“ erschienen ist, nur bestens empfohlen werden.

E. Jahnke.

Lehrbuch der Trigonometrie. Von F. Meigen. Hildburghausen 1896. O. Pezoldt. 59 S.

In diesem fünften Heft der mathematischen Abteilung der „Technischen Lehrhefte“ werden die wichtigeren Abschnitte der Trigonometrie in passender Form behandelt. Den grössten Raum beansprucht die Berechnung des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks. Die zahlreichen, durchgerechneten Beispiele sind grösstenteils der Bau- und Maschinenkunde, der praktischen Geometrie und Mechanik entnommen. Dabei ist der Hauptwert auf die Berechnung mit Hilfe der Funktionen selbst gelegt, während Logarithmen nur bei der Anwendung der Tangentenformel und bei der Berechnung eines Dreiecks aus den drei Seiten benutzt werden.

Das Buch dürfte auch an höheren Schulen wegen der vielen praktischen Beispiele mit Vorteil Verwendung finden.

E. Jahnke.

Ebene Geometrie. Von G. Recknagel. Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. Fünfte Auflage. München 1896. Th. Ackermann. 222 S.

Vom methodischen Standpunkt aus betrachtet bietet das Lehrbuch keinen Fortschritt. Soll es, wie Überschrift und Vorrede verraten, in erster Linie für den Schüler bestimmt sein, so wäre eine erhöhte Übersicht und knappere Ausdrucksweise wünschenswert.

Im einzelnen fiel dem Referenten auf, dass der Verfasser die Anwendung der Bildungen „Inkreis“ und „Umkreis“ vermeidet, ferner dass

er an mehreren Stellen schreibt: „das Eck eines Vielecks". Der Abschnitt, welcher von der Berechnung der Peripherie des Einheitskreises handelt, beginnt mit den Worten: „Es ist bisher nicht gelungen, die Maßzahl dieser Peripherie in geschlossener Form, d. h. als Resultat einer endlichen Zahlenverbindung darzustellen." In einer Anmerkung heisst es dann weiter: „π ist später ohne Nutzen bis auf 140 Stellen genau berechnet worden."

Dagegen möchte Referent den dritten Anhang lobend hervorheben, wo der Verfasser isoperimetrische Sätze in Legendrescher Weise behandelt und eine Reihe historischer Notizen beifügt. Leider fehlen letztere bei Abschnitt 161, 173, 174, 175, 176.

E. Jahnke.

Zur Auflösung der allgemeinen Gleichung des dritten Grades. Von E. Grohmann. Wien 1895. A. Hölder.

Es ist ein Versuch, für die kubische Gleichung eine Auflösungsmethode zu finden, welche praktisch schneller zum Ziele führt als die üblichen Methoden.

In dem irreduziblen Fall treten von goniometrischen Funktionen nur die Tangente auf.

E. Jahnke.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. **Leçons de Géométrie** rédigées suivant les derniers programmes officiels et accompagnées, pour chaque leçon, d'exercices et de problèmes gradués. Première partie. Paris 1896. Gauthier-Villars. 173 p.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. **Solutions détaillées des exercices et problèmes énoncés dans les Leçons de Géométrie.** Première partie. Paris 1896. Gauthier-Villars. 168 p.

Dieses Lehrbuch für Geometrie besteht aus vier Teilen, von denen uns der erste, „La ligne droite et la circonférence de cercle" überschrieben, vorliegt. In dreissig Lektionen wird ungefähr das geometrische Pensum der Quarta und Untertertia unserer höheren Schulen erledigt. Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass die Darstellung der Verfasser der „Eléments de géométrie" sich durch Klarheit und Eleganz auszeichnet, und dass die jeder Lektion beigefügten Lehrsätze und Aufgaben geschickt ausgewählt sind. Sehr hübsch ist u. a. die 16. Lektion, welche von der Symmetrie der Figuren handelt, nebst den angehängten Übungsaufgaben.

Gesondert hiervon haben die Verfasser die Lösungen zu den Übungsaufgaben herausgegeben, indem sie je nach der Schwierigkeit der Frage die Lösung nur kurz angedeutet oder ausführlich mitgeteilt haben.

E. Jahnke.

Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Von K. Fink. Erster und zweiter Kurs für die Hand des Lehrers bearbeitet. 151 S.

Sammlung von Sätzen und Aufgaben zur systematischen und darstellenden Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Von K. Fink.

Erster und zweiter Kurs für die Hand des Schülers bearbeitet. Mit zehn Figurentafeln und 84 Blättern für die darstellend-geometr. Übungen. Tübingen 1896, H. Laupp. 108 S. Mk. 1.60 und Mk. 2.80.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass im geometrischen Unterricht auf die darstellende Geometrie mehr Gewicht als bisher gelegt werden müsse. Diesen Zweck will er einmal durch Modelle erreichen, zu deren Anfertigung der Schüler heranzuziehen sei, zweitens durch die dem Buche beigegebenen Blätter, welche er als Vorlagen für die Ausführungen der darstellenden Geometrie durch den Schüler betrachtet wissen will.

Im ersten „Kurs“ werden die Elemente des Raumes, die Bewegungsfähigkeit der Figuren, die zentrale und axiale Symmetrie, die parallele Gerade, das Parallelverschieben, Drehen und Umklappen einer Figur, das Dreieck, Viereck und der Kreis, im zweiten „Kurs“ die Euklidischen Axiome und Beweisformen, die Ähnlichkeit der Figuren, der Ähnlichkeitspunkt, die Kreisberechnung, die Sätze des Ceva und Menelaus, die harmonischen Elemente am vollständigen Viereck und Vierseit, Ähnlichkeitsaxen und Ähnlichkeitszentren bei drei Kreisen, die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis und das Taktionsproblem behandelt.

Ein erster Anhang enthält einen kurzen Abriss der historischen Entwickelung der Elementargeometrie (S. 108—131), ein zweiter ein Begleitwort für die Blättersammlung, wo die Ausführung in Farben empfohlen wird. So giebt Blatt 84 eine vielfarbige Darstellung der zwölf Potenzlinien dreier Kreise.

Ist auch vieles von dem, was der Verfasser als neu eingeführt wissen will, mit gutem Erfolg schon anderswo thatsächlich zur Ausführung gelangt, so dürften die Bücher doch dem einen oder anderen Fachgenossen mannigfache Anregungen bieten.

E. Jahnke.

Die analytische Form der Blätter. Von B. Habenicht. Mit 148 Figuren. Quedlinburg 1895. Selbstverlag. 18 S. Mk. 2.

Es ist ein interessanter Versuch, die analytische Form der Blätter zu bestimmen, den der Verfasser angestellt hat, um daraus Schlüsse auf die treibenden Kräfte zu ziehen. „Wie nämlich aus der mathematisch bestimmten Bahn eines Körpers auf die treibenden Kräfte geschlossen wird, so müssen diese auch aus der analytisch festgelegten Blattform zu entwickeln sein.“ Nun, bei einem Versuche, dieses Problem anzugreifen, würde der Verfasser vermutlich auf grosse Schwierigkeiten stossen

Unter den Blättern, deren analytischer Ausdruck mitgeteilt wird, seien folgende hervorgehoben:

Das Blatt vom Sauerklee:

$$r = 4(1 + \cos 3\varphi) + 4\sin^2 3\varphi,$$

das Blatt vom Steinklee:

$$r = 4(1 + \cos 3\varphi) - 4\sin^2 3\varphi,$$

das Blatt der Rosskastanie:

$$r = 2\left(\cos\varphi + \sqrt{3 + \cos^2\varphi}\right) - 6\sin^2\frac{7\varphi}{2} - 0{,}3\sin^2 60\varphi,$$

das Blatt des Epheus:

$$r = 3(1 + \cos^9\varphi) + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^2 3\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2},$$

das Blatt des spitzblättrigen Ahorns:

$$r = 10\sqrt{1 + \cos\varphi} - 5\left(1 + \sin^2\frac{11\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2\sin^2 11\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2}.$$

E. Jahnke.

Der verjüngte Magister Matheseos. Von K. Traub. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie. Lahr 1896, M. Schauenburg. 12 S.

Der Verfasser weist die Giltigkeit des Pythagoreischen Satzes in der Form: „Im rechtwinkligen Dreieck ist der Inhalt des Kreises, der mit der Hypotenuse als Radius beschrieben wird, das arithmetische Mittel aus den zwei Kreisen, welche bezüglich mit Summe und Differenz der Katheten als Radien konstruiert werden“, auch für die Sphärik und absolute Geometrie nach.

Referent erlaubt sich den Herrn Verfasser auf V. Schlegel, Der Pythagoreische Lehrsatz in mehrdimensionalen Räumen. From the Congress Mathematical Papers, aufmerksam machen.

E. Jahnke.

Praktische Geometrie auf dem Gymnasium. Von G. Degenhardt. Frankfurt a. M. 1896, Chr. Hermann. 30 S.

Es ist ein „Versuch, elementare Aufgaben aus der Feldmesskunde in den Gymnasialunterricht aufzunehmen, um durch dieselben namentlich in den Unter- und Mittelklassen des Gymnasiums eine Belebung des geometrischen Unterrichtes herbeizuführen. Wenn auch schon bisher hier und da die praktische Geometrie in der Schule Berücksichtigung gefunden haben dürfte, so fehlt es doch an einer Auswahl und Zusammenstellung des für das Gymnasium passenden Stoffes.“ Die hier gebotene Sammlung, der vier Figurentafeln angehängt sind, muss als recht brauchbar bezeichnet werden. Sie wird auch solchen Fachgenossen willkommen sein und manches Neue bieten, welche seit langem gewöhnt sind, Beispiele aus der praktischen Geometrie zur Belebung des geometrischen Unterrichts heranzuziehen. Die Mannigfaltigkeit der Aufgaben geht aus der beifolgenden Inhaltsübersicht hervor: Markieren und Messen von geraden Linien, Loten, Parallelen und Winkeln (Ohmanns Feld-Winkelmesser), Abstecken einer Geraden zwischen Hindernissen, Errichten von Loten und Dreiteilung des Winkels ohne Winkelinstrument, Anwendungen der Proportionalität von Linien, Flächenmessungen, Trigonometrische Aufgaben, Nivellierung, Meßtischaufnahme, Aufzeichnen von Plänen im verjüngten Maßstabe, Spiegelsextant, Vermessung in Stadt, Provinz und Staat.

Referent erlaubt sich, den Herrn Verfasser auf die Martussche Sammlung trigonometrischer Vermessungsaufgaben aufmerksam zu machen.

E. Jahnke.

Zur Theorie der reellen Kurven einer rationalen Funktion n^{ten} Grades für komplexe Variable. Von H. Suhle. XIV. Jahresbericht des Herzoglichen Friedrichs-Realgymnasiums. Dessau 1896. C. Dünnhaupt. 16 S.

Die vorliegende Arbeit bildet eine Ergänzung und Fortsetzung von früheren Programmabhandlungen desselben Verfassers aus den Jahren 1893, 1894.

Macht man in der Gleichung:

$$z = u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n$$

die Substitution:

$$u = x + iy,$$

so möge

$$z = U(x, y) + i V(x, y)$$

werden. Dann betrachtet der Verfasser einerseits die Flächen

$$z = U(x, y) \quad \text{und} \quad z = V(x, y),$$

anderseits die reellen Kurven:

$$z = U(x, y), \quad V(x, y) = 0.$$

Der erste und zweite Abschnitt handeln von den Asymptoten der zur Fläche $U(x, y)$ bezw. $V(x, y)$ gehörigen Niveaulinien n^{ten} Grades, der dritte von den Beziehungen der reellen Nebenkurven zu den Asymptoten der Niveaulinien jener Flächen und der vierte von dem reellen Kurvensystem der Funktion:

$$z = (x + iy)^n$$

und der geometrischen Darstellung der n^{ten} Einheitswurzeln.

Die ersten Abschnitte dürften an Übersicht und Einfachheit gewinnen, wenn von vornherein in

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

der zweite Term durch die Substitution:

$$x' = x + \frac{a_1}{n}$$

zum Verschwinden gebracht wird. Das Gleiche gilt vom vierten Abschnitt, wenn von vornherein Polarkoordinaten eingeführt werden.

E. Jahnke.

Leçons de cinématique professées à la Sorbonne par Gabriel Koenigs, avec des notes par M. G. Darboux et par MM. E. et F. Cosserat. Erster Teil: Cinématique théorique. Paris 1897. A. Hermann. X und 499 S.

Die Kinematik, d. i. die Lehre von der Bewegung ohne Rücksicht auf die wirkenden Kräfte, hat in den letzten Jahren von verschiedenen Gesichtspunkten aus eine Reihe hervorragender Bearbeitungen gefunden. Die Werke von Schoenflies und Mannheim untersuchen auf synthetischem Wege und ohne Benutzung des Zeitbegriffs die Eigenschaften der durch

Bewegung erzeugten Raumgebilde. In Verbindung mit dieser reinen „Geometrie der Bewegung" wird z. B. in Schells „Theorie der Bewegung und der Kräfte" auch der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand, und zwar teilweise analytisch, behandelt, und damit erscheint, obwohl nur in der Rolle einer Hilfsvariabeln, die Zeit als ein der Geometrie fremdes Element. Auch in Burmesters noch unvollendetem Lehrbuche begegnen wir den Geschwindigkeiten als einem viel gebrauchten Hilfsmittel zur Lösung geometrischer Aufgaben; hier wird ausserdem das Forschungsgebiet durch Heranziehung von Problemen der Maschinentechnik beträchtlich erweitert.

Gegenüber der anfangs erwähnten streng geometrischen Auffassung bilden in den vorliegenden Vorlesungen über Kinematik die Formeln für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen die eigentliche Grundlage und somit auch die Quelle für die geometrischen Eigenschaften der von dem bewegten System erzeugten Linien und Flächen. In der völlig folgerichtigen und einheitlichen Durchführung dieses Standpunktes, sowie in der vorwiegend analytischen Darstellung erblicken wir die charakteristische Eigenart des reichhaltigen Werkes, das wir als eine wertvolle und willkommene Ergänzung der kinematischen Litteratur begrüssen. In Anordnung und Behandlungsweise des vorgetragenen Lehrstoffes steht es in seinen ersten zehn Kapiteln dem Buche Schells verhältnismässig am nächsten, wenn es auch in seinen Ergebnissen über dieses häufig hinausgeht.

Die folgende Übersicht versucht den wesentlichen Inhalt in kurzen Zügen zu kennzeichnen, ohne bei der Fülle des vorhandenen Stoffes auf Vollständigkeit irgendwie Anspruch zu erheben.

Im ersten vorbereitenden Kapitel entwickelt der Verfasser im Anschluss an Möbius und Chasles die Geometrie der Streckensysteme, ungefähr in demselben Umfange wie in der zweiten Auflage des Schellschen Werkes, aber in vielfach selbständiger Gestaltung.

Das zweite Kapitel enthält die Definitionen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines Punktes (Formeln für krummlinige Koordinaten etc.). Das dritte handelt von der relativen Bewegung und der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und giebt u. a. die wichtigen Formeln für die Projektionen der Geschwindigkeit auf die Axen des bewegten Koordinatensystems. In der Anwendung solcher Koordinatensysteme, deren Axen nach dem von Darboux gegebenen Vorbilde in jedem einzelnen Falle passend gewählt werden, erkennt der Verfasser das sicherste und bequemste Werkzeug der kinematischen Untersuchung, und er macht davon in den folgenden Kapiteln ausgiebigen Gebrauch.

Im vierten Kapitel wird der Fundamentalsatz über die momentane Bewegung eines starren Körpers in eigenartiger Weise abgeleitet: Aus den im vorigen Kapitel erhaltenen Formeln folgt zunächst, dass zu jeder Lage des bewegten Körpers ein Streckensystem gehört, dessen Moment in Bezug auf irgend einen Punkt des Körpers die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes darstellt. Dieses Streckensystem kann in bestimmter Weise ersetzt werden durch eine Einzelstrecke und ein Streckenpaar, dessen Ebene auf

jener senkrecht steht. Die Einzelstrecke ist gleichbedeutend mit einer Drehung des Körpers um die durch die Strecke gehende Axe, und das Paar bewirkt eine Verschiebung parallel zu dieser Axe; der Körper vollführt also augenblicklich eine unendlich kleine Schraubenbewegung. Der so gefundene Satz wird nachträglich in herkömmlicher Weise geometrisch bewiesen; hieran schliessen sich die bekannten Eigenschaften über das Nullsystem, welches die Punkte des Körpers mit den Normalebenen ihrer Bahnkurven bilden etc.

Es folgt ein Kapitel über die Beschleunigung der relativen Bewegung (Formeln für die Projektionen der Beschleunigung auf die Axen des bewegten Koordinatensystems, Satz von Coriolis, Beschleunigungszustand eines starren Körpers).

Die beiden nächsten Kapitel beziehen sich auf die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene. Die allgemeinen Formeln für die Geschwindigkeit der Systempunkte führen, angewendet auf den speziellen Fall der ebenen Bewegung, zur Auffindung des Pols und der Rollkurven; die entsprechenden Formeln für die Beschleunigung liefert die Savary (Euler)sche Gleichung für die Krümmungsmittelpunkte der von den Systempunkten erzeugten Bahnkurven. Auf S. 152 begegnen wir der etwas voreiligen Behauptung, dass ein gewisser Systempunkt momentan eine Inflexionsstelle beschreibt, weil der zugehörige Krümmungsmittelpunkt unendlich fern liegt. Dass ein bestimmter Punkt des Wendekreises in der Regel einen Undulationspunkt durchschreitet, bleibt unbeachtet; dann wird natürlich auch auf die Punkte stationärer Krümmung und verwandte Dinge nicht eingegangen. — Der Verfasser betrachtet (S. 154) den singulären Fall, dass die Rollkurven einander oskulieren, aber die schönen und wesentlich allgemeineren Untersuchungen von Mehmke im 35. Bande dieser Zeitschrift finden hierbei keine Erwähnung. Die auf S. 163 angegebene Einteilung der cyklischen Kurven ist nicht ganz zutreffend; hier fehlt der Satz von der doppelten Erzeugungsweise dieser Kurven. Auf S. 167 finden wir die Aufgabe, für einen beliebigen Systempunkt den Krümmungsmittelpunkt seiner Bahnkurve zu konstruieren, wenn zu zwei anderen Systempunkten die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte gegeben sind. Die mitgeteilte Lösung, bei welcher zunächst der Wendepol bestimmt wird, erscheint uns umständlicher als die bekannte Bobilliersche Konstruktion. — Recht ansprechend ist dagegen am Schlusse des 7. Kapitels der Abschnitt über den Inhalt der Flächenstücke, die von einer starren oder veränderlichen Strecke bestrichen werden.

Das achte Kapitel giebt die bekannten Sätze und Formeln über die sphärische Bewegung; das neunte nimmt die im vierten Kapitel abgebrochene Betrachtung wieder auf und beschäftigt sich mit der allgemeinsten Bewegung eines starren räumlichen Systems, dargestellt durch das Rollen und Gleiten zweier geradlinigen Flächen. Besondere Beachtung verdienen die Abschnitte über solche Systemkurven, die eine Hüllbahnkurve besitzen, sowie über zwei Sonderfälle der allgemeinen Bewegung: Im ersten sind die

windschiefen Axenflächen aufeinander abwickelbar, im zweiten sind sie abwickelbare Flächen, deren Rückkehrkanten einander beständig berühren.

Das zehnte Kapitel handelt von den Graden der Bewegungsfreiheit. Wir heben hervor die allgemeinen Untersuchungen über die Bewegung eines starren Körpers, dessen Freiheit grösser ist als Eins.

Die beiden letzten Kapitel stehen mit den vorhergehenden in loserem Zusammenhang. Das elfte — das umfangreichste von allen — ist den Gelenkmechanismen gewidmet. Es umfasst das Gelenkviereck — jedoch ohne die allgemeine Theorie der Koppelkurve — die Mechanismen zur Umwandlung einer Bewegung in eine gesetzmässig entsprechende, die angenäherten Geradführungen von Watt und Evans, Mechanismen zur genauen Geradführung, sowie einige unebene Gelenkmechanismen. Der Kempesche Satz, nach welchem jede ebene algebraische Kurve durch einen Gelenkmechanismus erzeugt werden kann, wird dahin erweitert, dass überhaupt jede algebraische Verbindung zwischen n gegebenen Punkten im Raume sich durch einen solchen Mechanismus verwirklichen lässt.

Das zwölfte Kapitel betrachtet die komplane Bewegung eines starren ebenen Systems als speziellen Fall der Kollineationen einer Ebene in sich, sowie ihre Beziehungen zu den imaginären Kreispunkten der Ebene. Hieran schliessen sich die entsprechenden Untersuchungen über die Bewegung eines starren Körpers im Raume. Auf diese folgt endlich die analytische Darstellung der ebenen, sowie der sphärischen Bewegung durch lineare ganze, bez. gebrochene Substitutionen einer komplexen Variabeln, mit einem Hinweise auf die gruppentheoretische Auffassung.

Die Zusätze von Darboux (47 S.) betreffen:

1. eine neue Ableitung der Transformationsformeln von Euler und Ol. Rodriques (Kap. 8),
2. die Lehre von den Umwendungen und ebenen Spiegelungen, angewendet auf den Fundamentalsatz von der Momentanbewegung eines starren Körpers (Kap. 4),
3. eine inhaltreiche Untersuchung über algebraische Bewegungen.

Als Beitrag von E und F. Cosserat finden wir eine anziehende Arbeit über die Kinematik eines kontinuierlichen (veränderlichen) Mittels (27 S.).

Den Schluss des Werkes bildet eine Reihe von Anmerkungen des Verfassers, in denen einzelne Abschnitte weiter ausgeführt und gewisse Nachbargebiete, wie Balls Schraubentheorie und Hamiltons Quaternionen kurz gestreift werden (71 S.). In der siebenten Anmerkung (S. 446) scheint ein Irrtum vorzuliegen, wenn bezüglich des Beschleunigungszustandes eines starren Körpers auf Schoenflies „Geometrie der Bewegung" verwiesen wird. Übrigens sind auch an einigen anderen Stellen die Litteraturangaben recht unbestimmt, z. B. S. 13:

„On pourra consulter à ce sujet un Mémoire de M. Lindemann inséré dans les Mathematische Annalen."

Die Darstellung ist in dem ganzen Werke klar und leicht fasslich, dabei anregend und geschmackvoll. Dem Erscheinen des zweiten Bandes, der die Anwendungen der Kinematik enthalten soll, sehen wir mit berechtigter Spannung entgegen.

R. Müller.

Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. Von C. Neumann. Leipzig 1896, B. G. Teubner.

Die C. Neumannschen Bücher zeichnen sich bekanntlich, trotzdem sie zumeist eigene Untersuchungen des Verfassers behandeln, durch eine klare und ausführliche (für manche Leser fast zu ausführliche) Exposition aus. Dies gilt insbesondere auch von den Vorreden, in denen der Verfasser die Stellung seiner Untersuchungen gegenüber den verwandten anderer Forscher mit aller Freimütigkeit fixiert, es aber auch nicht verschmäht, die Tragweite und den Giltigkeitsbereich seiner Sätze und Methoden einer unparteiischen Selbstkritik zu unterziehen. Damit sind dem Rezensenten schon im voraus, so zu sagen, die Waffen aus den Händen gewunden, und er darf sich im wesentlichen darauf beschränken, das Positive und Neue zu betonen.

Von Green stammt eine merkwürdige Arbeit aus dem Jahre 1832 in der an die Stelle der Newtonschen Potentialfunktion

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}$$

die allgemeinere

$$\psi(r) = r^{p-2} (0 \leqq p < 1)$$

gesetzt wird. Das auffallendste (wenigstens implizite bei Green vorkommende) Resultat dieser Substitution ist, dass die elektrische Verteilung in einer isolierten Metallkugel — im Gegensatz zu der Newtonschen Theorie — in einer räumlichen Ausbreitung der elektrischen Materie im Innenraum der Kugel besteht, ohne dass dabei noch eine besondere Oberflächenbelegung vorhanden wäre. Nähert sich p der Einheit, so wird sich die räumliche Ausbreitung der elektrischen Materie in der Nähe der Oberfläche mehr und mehr verdichten. Nähme man also p nur wenig von der Einheit verschieden an, so würde man zu einer Theorie gelangen, die von der gewöhnlichen Theorie nur äusserst wenig abweicht, den Beobachtungserfahrungen gut entspricht, und dabei doch jene unendlich dünne Ausbreitung einer Schicht auf der Kugeloberfläche vermeidet, die von jeher auf mehr oder weniger Misstrauen gestossen ist.

Die Schwierigkeiten, mit denen Green bei der näheren Untersuchung der Potentialfunktion

$$\psi(r) = r^{p-2}$$

zu kämpfen hatte, scheinen zuerst Herrn C. Neumann veranlasst zu haben, die Greensche Funktion $\psi(r)$ wiederum als Grenzfall einer noch allgemeineren Funktion $\Phi(r)$ anzusehen, um auf diese Weise die neue Theorie von all dem Fremdartigen, was ihr anhaftete, zu befreien, und ihren Horizont zu erweitern.

Es lässt sich nämlich das Produkt aus r^{p-2} und r mit Hilfe von Integralbetrachtungen (S. 86) in eine Reihe nach Exponentialfunktionen entwickeln, wie folgt:

$$1)\qquad r \cdot r^{p-2} = A_1 e^{-\alpha r_1} + A_2 e^{-\alpha_2 r} + A_3 e^{-\alpha_3 r} + \cdots,$$

wo die α, wie die A alle reell und positiv sind.

Der Gedanke, durch Einführung derartiger Exponentialfunktionen die gewöhnliche Potentialtheorie zu modifizieren, findet sich, wie es scheint, zuerst bei Laplace (S. 114). An einer klassischen Stelle seiner Mécanique celeste ändert Laplace den Newtonschen Ausdruck $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ (für die Kraft, mit der zwei Massenpunkte m_1, m_2 im Abstande r aufeinander wirken) dahin ab, dass er noch den verkleinernden Faktor $e^{-\alpha r}$ (α positiv) hinzufügt. Nach einer wichtigen, neueren Beobachtung von Seeliger scheint diese Laplacesche Korrektion in der That geeignet, eine gewisse, schon von Leverrier untersuchte Vorwärtsbewegung des Perihels des Merkur zu erklären.

Aus diesen wenigen Bruchstücken hat der Verfasser eine ganze, umfassende Theorie geschaffen, indem er eine Potentialfunktion $\Phi(r)$ nach Analogie von 1), nur in Form einer endlichen Reihe:

$$2)\qquad \Phi(r) = \sum \frac{A_i e^{-\alpha_i r}}{r} \quad (A_i,\ \alpha_i \text{ reell und positiv})$$

zu Grunde legt.

Unzweifelhaft liegt zunächst in dem Ansatze 2) eine gewisse Willkür; man wird fragen, welche Vorzüge, oder gar welche innere Notwendigkeit der Ansatz 2) gegenüber anderen aufweist, und in zweiter Linie, wenn die Vorteile der Form $\Phi(r)$ wirklich zu Tage liegen sollten, welche physikalische Bedeutung die über die Konstanten A, α getroffenen Festsetzungen besitzen?

Der Verfasser hat das elektrische Gebiet als Ausgangspunkt gewählt und hat hier nach einem Prinzip oder Axiom gesucht, welches sich gegenüber allen Abänderungen der Newtonschen Potentialfunktion

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}$$

invariant verhielte.

Nun wird allgemein zugegeben, dass man aus der Annahme der Form

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}$$

die Existenz eines elektrostatischen Gleichgewichtszustandes (für ein beliebiges System elektrisch geladener Konduktoren) einwandsfrei herleiten kann. Da auch von physikalischer Seite her an der Vorstellung eines derartigen Gleichgewichtszustandes nichts wesentliches ausgesetzt wird, so hat der Verfasser dies „Prinzip des elektrostatischen Gleichgewichts“ zum Leitstern genommen.

Sollte man nun wirklich annehmen, dass das genannte Prinzip einen so bestimmenden Einfluss auf die Form einer im übrigen willkürlichen Potentialfunktion ausüben möchte?

Der Verfasser hat dies schwierige Problem zunächst von negativer Seite her in Angriff genommen und hat nach Beispielen von Potentialfunktionen gesucht, bei deren Annahme ein elektrischer Gleichgewichtszustand ausgeschlossen sei. Ein solches merkwürdiges Beispiel — und das scheint die primäre Entdeckung gewesen zu sein, die den Gang der weiteren Untersuchung veranlasst hat — bot sich ihm in der Funktion:

$$f(r) = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r}, \tag{3}$$

wo die Konstante α positiv und sehr gross sein soll.

Es sei eine isolierte Metallkugel mit der Elektrizitätsmenge $M = 1$ geladen, die man sich teils im Innern der Kugel, teils an ihrer Oberfläche beliebig verteilt denke. Das von dieser Verteilung auf irgend einen innern Punkt ausgeübte Potential V werde aufgestellt, sowie, nach Entwickelung von $f(r)$ nach Potenzen von α und r, die Ausdrücke ΔV und $\Delta\Delta V$.

Dann ergiebt sich die einfache Relation:

$$\Delta\Delta V - \alpha^2 \Delta V - 4\pi\alpha^2 \varepsilon = 0, \tag{4}$$

wo ε die (variable) räumliche Dichtigkeit bezeichne.

Lässt man nunmehr noch die — allerdings wesentlich beschränkende — Voraussetzung Platz greifen, dass der der Zeit $t = 0$ entsprechende Anfangszustand in Bezug auf das Kugelzentrum symmetrisch sei, so folgt aus 4), mit Rücksicht auf frühere, von Laplace und Bertrand herrührende Sätze, dass die Elektrizität der Kugel niemals zur Ruhe kommen kann, sondern sich in unaufhörlicher Bewegung (die sogar niemals stationär werden kann) befinden muss.

Und solcher Beispiele kann man leicht noch mehrere aufstellen.

Umgekehrt beweist nun der Verfasser in der That den Fundamentalsatz, dass alle mit dem Prinzip des elektrostatischen Gleichgewichtszustandes verträglichen Potentialfunktionen $\Phi(r)$ die Gestalt 2) besitzen müssen. Das ist sein „Exponentialgesetz“, das je nach der Anzahl der Glieder von $\Phi(r)$ ein eingliedriges, zweigliedriges u. s. f. heisst.

Die Hauptformeln dieser allgemeinen Potentialtheorie haben eine weitgehende Analogie mit denen der gewöhnlichen Theorie; die Laplacesche Gleichung $\Delta V = 0$ nimmt jedoch eine wesentlich andere Gestalt an, indem z. B. für das eingliedrige Exponentialgesetz $\Phi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ gilt:

$$\Delta V = \alpha^2 V. \tag{5}$$

Wirken auf einen isolierten Konduktor elektrische Massen von aussen her, so ist im Gleichgewichtszustande neben einer elektrischen Oberflächenbelegung noch eine räumliche Ausbreitung der Elektrizität im Innern des Konduktors vorhanden, die ein einfaches Gesetz befolgt.

Der oben berührte singuläre Vorteil des Greenschen Grenzfalles 1) würde also damit im allgemeineren Falle wieder verloren gehen.

Besondere Beachtung verdient es, was übrigens nach anderen Erfahrungen zu erwarten war, dass sich der Beweis des sogenannten „Existenztheoremes“ der Potentialtheorie, unter Zugrundelegung der C. Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels, mit Hilfe von 5) weit einfacher und durchsichtiger führen lässt, als im extremen Falle der Newtonschen Potentialfunktion.

Bei allen diesen Untersuchungen war bisher stillschweigend, nach Newton, die Hypothese der momentanen Fernwirkung vorausgesetzt.

In einem kurzen, aber höchst interessanten Kapitel (Nr. VIII S. 222 bis 251) lässt der Verfasser jene Hypothese fallen, ohne übrigens von seinem Exponentialgesetz weiterhin Gebrauch zu machen.

Er denkt sich wiederum zwei Massenpunkte m, m_1, von denen der eine dem anderen zur Zeit t_0, wo sie den Abstand r_0 haben mögen, das gewöhnliche Potential $W = mm_1\varphi(r_0)$ „zusendet“. Diese Zusendung soll aber, einer ersten Hypothese zufolge, einer gewissen, wenn auch sehr kleinen Zeit $t - t_0$ bedürfen, nach deren Ablauf die — in irgend welcher Bewegung befindlichen — Punkte die Entfernung r besitzen; zudem soll die Zusendung mit konstanter (sehr grosser) Geschwindigkeit erfolgen.

Der Verfasser macht dann die weitere Hypothese, das Potential W habe in Wirklichkeit die zur Zeit t vorhandene Entfernung r durchlaufen, wozu also die Zeit

$$t - t_0 = \frac{r}{c}$$

erforderlich sei.

Ob und inwieweit sich diese zweite Hypothese mit der ersten in Übereinstimmung befindet, mag dahingestellt sein.

Durch einfache Rechnung ergiebt sich so ein Ausdruck für W, der alsdann dem Hamiltonschen Prinzip — das der Verfasser als suprema lex hinstellt — unterworfen wird. Man kann auch sagen, dass der Ausdruck W nach den Koordinaten variiert werde, sodass W eigentlich den Namen eines „Variations-Potentials“ verdiente (im Gegensatz zu dem gewöhnlichen „Differentiations-Potential“).

Nimmt man noch im besonderen

$$\varphi(r) = \frac{1}{r},$$

so führt das angedeutete Verfahren auf den merkwürdigen Satz:

> „Die gegenseitige Einwirkung der beiden Punkte wird von solcher Art sein, als fände zwischen ihnen eine gewisse repulsive Kraft R statt. Diese Kraft R, die geradezu durch Variation von W entsteht, ist identisch mit der durch das Webersche Gesetz definierten Kraft:
>
> $$6) \qquad R = \frac{mm_1}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}r'^2 + \frac{2r}{c^2}r''\right],$$
>
> falls man nur jene konstante Transmissionsgeschwindigkeit c als identisch sich denkt mit der Weberschen Konstanten c.“

Alsdann lässt sich auch ein Theorem der lebendigen Kraft aufstellen, das dem gewöhnlichen nahe verwandt ist.

Danach wäre es sehr wahrscheinlich, dass in den Fällen, wo Kräfte ein gewöhnliches Potential nicht besitzen, wenigstens ein derartiges „Variationspotential“ existiert, dessen innerer Grund eben durch die Hypothese einer zeitlichen Transmission der Kräfte aufgedeckt sein würde.

Für weitere Forschungen wäre damit ein weites Feld eröffnet.

W. Franz Meyer.

Bibliographie

vom 13. Januar bis 14. April 1898.

Periodische Schriften.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1896, dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 52. Jahrg. 2. Abt. Physik des Äthers. Red. von Rich. Börnstein. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 30.

—— im Jahre 1892, dargestellt von d. physikal. Gesellschaft zu Berlin. 48. Jahrg. 3. Abt. Kosm. Physik, red. v. Rich. Assmann. Braunschweig, Ebenda. M. 25.

—— 48 Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie, red. v. Rich. Börnstein. Ebenda. M. 20.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorol. Instituts. Herausgegeben durch Dir. Wilh. v. Bezold. 1897. 1. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung i. Jahre 1897, zugleich deutsches meteorol. Jahrbuch für 1897. Beobachtungssystem des Königreich Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 3.

—— d. hydrogr. Amtes d. k. u. k. Kriegsmarine in Pola. Nr. 1-4. Wien, Gerold & Co.

1. Gruppe II. Jahrbuch der meteorologischen u. erdmagnetischen Beobachtungen des Jahres 1896. M. 6.

2. Gruppe III. Relative Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen. 1. Heft. Beobachtungen in d. Jahren 1893—1896. M. 3.

3. Gruppe IV. Erdmagn. Reise-Beobacht. 1. Heft. 1895/96. M. 2.

4. Gruppe V. 1. Heft. Gareis, Ant., Geschichtliche Darstellung der Entwickelung des kaiserl. u. königl. hydrograph. Amtes. M. 2.

Annalen d. schweizer. meteorol. Centralanstalt. Zürich 1895. Fäsi & Beer. M. 18.

Publikationen des astrophysikal. Observatoriums zu Potsdam. Nr. 37. 11. Bd. 4. Stück. Wilsing, J., Beobachtungen veränderlicher Sterne in den Jahren 1881—1885. Leipzig, Engelmann. M. 3.

—— Nr. 38. 11. Bd. 5. Stück. Müller, G. und Kempf, P., Untersuchungen über die Absorption des Sternenlichts in der Erdatmosphäre, angestellt auf dem Ätna und in Catania. Ebenda. M. 4.

Abhandlungen d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. 24. Bd. Nr. II. Wundt, Wilh., Die geometr.-optisch. Täuschungen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.

—— 24. Bd. Nr. III, Peter, Bruno, Beobacht. am sechszölligen Repsoldschen Heliometer der Leipziger Sternwarte. II. Abhandlg. Ebenda. M. 5.

Jahrbuch, Berliner astron. für 1900 mit Angaben f. die Oppositionen d. Planeten (1)—(422) für 1898. Herausgeg. von dem königl. astron. Recheninstitut unter Leitung von J. Bauschinger. Berlin, Dümmler. M. 12.

Gezeitentafeln für das Jahr 1899. Herausgegeben vom Reichsmarineamt. Berlin, Mittler & Sohn. M. 1. 50.

Förster, W. u. Lehmann, P., Die veränderl. Tafeln d. astronom. u. chronolog. Teils des königl. preuss. Normalkalenders für 1899. Nebst einem allgem. stat. Beitrage von E. Blenck. Berlin, Verlag d. königl. stat. Bureaus. M. 5.

Verhandlungen d. Gesellsch. deutscher Naturforscher u. Ärzte. 68. Versammlung zu Frankfurt a. M. 1896. 1. Naturw. Abhandlungen. Leipzig, Vogel. M. 5.

Bibliotheca mathematica. Zeitschr. f. Gesch. d. Mathem. Hrsg. v. Gust. Eneström. Generalreg. d. J. 1887-1896 (m. eingedr. Bildn.). Berlin, Mayer & Müller. M 4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgeg. von Emil Lampe. 26. Bd. Jahrg. 1895. 3. (Schluss-) Heft. Berlin, Reimer. M. 11. 40.

Veröffentlichungen d. kgl. preuss. meteorol. Instituts. Hrsg. d. Wilh. v. Bezold. Ergebnisse der magn. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1896 u. internationale magnet. Simultanbeobachtungen 1896. Berlin, Asher & Co. M. 6.

Arbeiten, astronom.-geodätische. Veröffentlichung der kgl. bayer. Kommission für die internationale Erdmessung. 2. Heft. München, Franz. M. 8. 60.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Hrsg. v. Herm. J. Klein. 8. Jahrg. 1897. Leipzig, Mayer. kart. M. 7.

Sitzungsberichte, Münch., Mathem. Kl., 1897. 3. Heft. München, Franz. M. 1. 20.

Albrecht, Th., Bericht üb. d. Stand d. Erforsch. d. Breitenvariation i. Dezbr. 1897. Hrsg. vom Centralbureau der intern. Erdmessung. Berlin, Reimer. M. 3.

Arbeiten, astr., d. k. k. Gradmessungsb., 9. Bd. Längenbest. Leipz., Freytag. M. 16.

Ergebnisse d. meteorol. Beobacht. i. Systeme d. deutsch. Seewarte f. d. Dezennium 1886-1895. Hrsg. von d. Dir. d. Seew. Hamburg, Friederichsen & Co. M. 2.

Jahrbuch, deutsches meteorol., f. 1896. Beobachtungssyst. d. deutschen Seewarte. XIX. Jahrg. (21. Jahrg. d. meteorologischen Beobachtungen in Deutschland). Herausgegeben von der Direktion der Seewarte. Hamburg, Ebenda. M. 13.

Förster, W., u. E. Blenck, Populäre Mitteilungen zum astronom. u. chronol. Teile d. preuss. Normalkalenders f. 1899. Berlin, Verl. d. k. stat. Bureaus. M. 1.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Petri Philomeni de Dacia in algorismum vulgarem Joh. de Sacrobosco commentarius. Una cum algorismo ipso edidit et praefatus est Prof. Max. Curtze. Sumptibus societ. regiae scientiar. danicae. Kopenhagen, Höst & S. M. 2. 25.

Poggendorff, J. C., biogr.-litter. Handwörterbuch z. Gesch. d. exakten Wissenschaften. 3. Bd. (1858—1883). Herausgegeben von B. W. Feddersen und A. J. v. Oettingen. 14. u. 15. (Schluss-) Lieferg. Leipzig, Barth. à M. 3.

Graf, J. H., Der Mathematiker Jak. Steiner v. Utzendorf. Bern, Wyss. M. 1. 20.

Killing, Wilh., K. Weierstrass. Rektoratsrede. Münster, Aschendorff. M. —. 60.

Helm, G., Die Energetik n. ihrer gesch. Entwickelung. Leipzig, Veit & Co. M. 8. 60.

Lindemann, Ferd., Gedächnisr. a. Philipp Ludw. v. Seidel. München, Franz. M. 3.

Reine Mathematik.

Hammer, E., Lehrb. d. eb. u. sphär. Trigonom. 2. Aufl. Stuttgart, Metzler. M. 7. 40.

—— Der logarithm. Rechenschieber und sein Gebrauch. Ebenda. M. —. 40.

Czuber, Eman., Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung. 1. Bd. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 12.

Schell, Wilh., Allgem. Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.

Weber, Heinr., Lehrb. d. Algebra. 2. Aufl. 1. Bd. Braunschw., Vieweg & S. M. 10.

Döhlemann, Karl, Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung (Sammlung Göschen Nr. 72). Leipzig, Göschen. M. —. 80.
Schubert, Herm., Arithm. u. Algebra (S. Göschen Nr. 47). 2. Aufl. Ebenda. M. —. 80.
Killing, Wilh., Einf. in d. Grundl. d. Geom. 2. (Schl.-) Bd. Paderb., Schöningh M. 7.
Sailer, Engelb., Die Aufgaben aus d. Elem.-Mathematik, welche bei der Prüfung f. d. Lehramt d. Mathem. u. Physik an d. kgl. bayer. hum. u. techn. Unterr.-Anstalten i. d. J. 1873-1893 gestellt wurden. München, Ackermann. M. 3. 80.
Steiner's, Jac., Vorlesungen üb. synthet. Geometrie 2. T. Die Theorie d. Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften, bearb. von Heinr. Schröter. 3. Aufl. Durchgesehen von Rud. Sturm. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.
Diakow, G., Multiplikationstabelle (in russ., franz. und deutscher Sprache). St. Petersburg, Ricker. geb. M. 15.
Männchen, Phpp., Die Transformation der trilinearen ternären Form in eine teilweise symmetrische. Dissertation. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 20.
Dölp, H., Aufgaben z. Differential- u. Integralrechn., nebst d. Resultaten u. d. z. Lösung nötig. theor. Erläut. 7. Aufl. Von E. Netto. Giessen, Ricker. geb. M. 4.

Angewandte Mathematik.

Weickert, A., u. Stolle, R., Prakt. Maschinenrechn. 3. Aufl. Berlin, Seydel. M. 3.50.
Bortkewitsch, L. v., Das Gesetz der kl. Zahlen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.
Routh, Edward John, Die Dynamik d. Syst. starrer Körp. Deutsch v. Adf. Schepp. Mit e. Vorw. v. F. Klein. 1. Bd. Die Elemente. Leipz., B. G. Teubner. geb. M. 10.
Föppl, Aug., Vorles. üb. techn. Mechanik. 3. Bd. Festigkeitsl. Ebenda. geb. M. 12.
Lüling, E., Mathematische Tafeln für Markscheider u. Bergingenieure, sowie zum Gebrauche für Bergschulen. 4. Aufl. Berlin, Springer. geb. M. 6.
Möbius, A. F., Astronomie, Grösse, Beweg. u. Entfern. d. Himmelskörper (Samml. Göschen Nr. 11). 9. Aufl. Von Walt. F. Wislicenus. Leipz., Göschen. M. —. 80.
Becker, E., Tafeln z. Berechn. d. Präcession (Aus: Annalen der kaiserl. Univers.-Sternwarte in Strassburg. 2. Bd.). Karlsruhe, Braun. M. 5.

Physik und Meteorologie.

Neudrucke v. Schriften u. Kart. üb. Meteor. u. Erdmagn. Hrsg. v. G. Hellmann. Nr. 10. Magnet., rara. 1269-1599. P. de Maricourt. F. Falero. P. Nunes. J. de Castro. G. Hartmann. M. Cortés. G. Mercator. R. Norman. W. Borough. S. Stevin. M. 15. Nr. 11. J. H. Winkler. B. Franklin. T. F. Dalibard. L. G. Le Monnier: Über Luftelektrizität. 1746—1753. Asher & Co. M. 3. 50.
Landolt, H., Das opt. Drehungsverm. organ. Subst. u. d. prakt. Anwend., bearb. u. Mitwirk. von O. Schönrock u. a. 2. Aufl. Braunschw., Vieweg & S. geb. M. 18.
Ernecke, Erich, Über elektr. Wellen u. ihre Anwend. z. Demonstr. d. Telegraphie o. Draht n. Marconi. Experimentalvortr. 2. Abdr. Berlin, Gärtner. M. —. 80.
Hentze, Willy, Analyt. Berechnung elektr. Leitungen. Berlin, Springer. M. 3.
Maiss, Ed., Aufgaben über Wärme einschl. der mechan. Wärmetheorie u. der kinetischen Theorie der Gase. Wien, Pichler's Wwe. & Sohn. M. 2. 40.
Voigt, W., Die fund. phys. Eigensch. d. Kryst. in elem. Darst. Leipz., Veit & Co. M. 5.
Bebber, W. J. van, Die Wettervorhersage. 2. Aufl. Stuttgart, Encke. M. 5.
Lehmann, O., Die elektr. Lichterschein. od. Entlad., bez. als Glimmen, Büschel, Funken u. Lichtbogen, in fr. Luft u. in Vacuumröhren. Halle, Knapp. M. 20.
Maser, H., Die Phys. 4. H. (Haussch. d. W., H. 199). Neudamm, Neumann. M. —. 30.
Scheel, Karl, Über Fernthermometer. Halle, Marhold. M. 1

Historisch-litterarische Abteilung.

Preisaufgabe.

Die Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft schlägt für das Jahr 1901 als Preisaufgabe vor:

Die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte zu vervollkommnen.

Die Theorie der quadratischen Differentialformen, welche von Riemann angebahnt und namentlich von Christoffel und Lipschitz weitergeführt worden ist, hat durch neuere Untersuchungen in der Geometrie, der Dynamik und der Theorie der Transformationsgruppen eine erhebliche Bedeutung gewonnen, und jeder Fortschritt in jener Theorie würde auch hier einen Gewinn bedeuten. Indem die Gesellschaft wünscht, dass die Theorie der quadratischen Differentialformen in einem wesentlichen Punkte vervollständigt werde, lenkt sie die Aufmerksamkeit der Bewerber besonders auf die durch Lies Forschungen angeregte Frage nach der Natur und den Eigenschaften der Formen, welche kontinuierliche Gruppen von Transformationen gestatten. Für den Spezialfall $n = 3$ hat neuerdings Bianchi* wertvolle Beiträge geliefert: es ist zu hoffen, dass die Darstellung der Kriterien für die Zugehörigkeit einer gegebenen Form zu einem bestimmten Typus in invarianter Form gelingen, und dass das Studium der in den betreffenden Räumen herrschenden Geometrien sich als lohnend erweisen werde.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und paginiert, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird,

* Memorie della Società Italiana delle Scienze, Ser. IIIa T. XI, 1897.

zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November 1901, und die Zusendung ist an den derzeitigen Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1898 Professor Dr. August Leskien, Stephanstrasse Nr. 10) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

W. Scheibner, Präs.

A. Leskien. E. Sievers. K. Lamprecht. H. Lipsius.

K. Bücher. F. Zirkel. W. Pfeffer. W. Hankel.

Rezensionen.

Zur Entdeckung des Elektromagnetismus. Abhandlungen von Hans Christian Örsted und Thomas Johann Seebeck (1820—1821). Herausgegeben von A. J. Öttingen. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 63.] Mit 30 Textfiguren. Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 83 S. Preis 1.40 M.

Die Örstedsche Abhandlung umfasst nur acht Seiten und führt den Titel: Versuche über die Wirkung des elektrischen Konflikts auf die Magnetnadel. Sie erschien in lateinischer Sprache und wurde von Gilbert ins Deutsche übersetzt.

Seebecks Arbeit lautet: Über den Magnetismus der galvanischen Kette und ist 65 Seiten gross. Sie verdankt ihre Entstehung zweien Vorlesungen.

Den Schluss bilden Anmerkungen, in welchen uns die beiden Gelehrten persönlich näher bekannt gemacht werden.

B. Nebel.

Über Faradays Kraftlinien. Von James Clerk Maxwell (1855—1856). Herausgegeben von L. Boltzmann. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 69.] Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 130 S. Preis 2 M.

Der Inhalt zerfällt in drei Teile, von denen der erste lautet: Anwendung auf statische Zustände und stationäre Strömung. Der zweite behändelt Faradays elektrotonischen Zustand, während der dritte eine Reihe von Beispielen mathematisch löst.

Die Anmerkungen erstrecken sich über 32 Seiten und lassen erkennen, wie sehr der Herausgeber bemüht ist, die knappe und deshalb schwer verständliche Ausdrucksweise Maxwells einem grösseren Leserkreis mund-

gerecht zu machen; denn nur auf solche Weise ist es möglich, die moderne Theorie über die Elektrizität rasch einzuführen und die alten, seit dem Aufschwung der Elektrotechnik nicht mehr ausreichenden Anschauungen zu verdrängen.

B. NEBEL.

Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz. Von TH. J. SEEBECK (1822—1823). Herausgegeben von A. J. VON ÖTTINGEN. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 70.] Mit 33 Figuren. Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 120 S. Preis 2 M.

Die vorliegende Arbeit Seebecks ist an Inhalt wichtiger, als die in Nr. 63 dieser Sammlung wiedergegebene. Jedoch ist es der Ausdrucksweise wegen nötig auch diese zu lesen. Da der Lebensgang des Autors in die Anmerkungen von Nr. 63 aufgenommen ist, so beziehen sich die jetzigen Zusätze lediglich auf die Abhandlung selbst, die einen Auszug aus vier Vorlesungen bildet.

B. NEBEL.

Chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen. Von G. KIRCHHOFF und R. BUNSEN (1860). Herausgegeben von W. OSTWALD. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 72.] Mit 2 Tafeln und 7 Figuren im Text. Leipzig 1895. Verlag von Wilhelm Engelmann. 74 S. Preis 1.40 M.

In diesem Bändchen sind zwei Abhandlungen aus Poggendorffs Annalen abgedruckt, welche das Fundament der nunmehr unentbehrlich gewordenen Spektralanalyse bilden. Obwohl Text und Inhalt wesentlich von Bunsen herrühren, so wird das Verdienst Kirchhoffs bei dieser wichtigen Entdeckung keineswegs geschmälert. Der Herausgeber teilt in den Anmerkungen mit, wie Bunsen den Hergang der Entdeckung schildert, die namentlich der Chemie zu einem ungemein wichtigen Hilfsmittel geworden ist.

B. NEBEL.

Untersuchungen über die Gesetze der Verwandtschaft. Von CLAUDE LOUIS BERTHOLLET (1801). Herausgegeben von W. OSTWALD. [Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 74.] Leipzig 1896. Verlag von Wilhelm Engelmann. 113 S. Preis 1.80 M.

Wir haben es hier lediglich mit einem Neudruck einer im Jahre 1802 in Berlin erschienenen Übersetzung von Berthollets französischer Ausgabe zu thun. In den Anmerkungen wird zunächst der interessante Lebenslauf des Verfassers mitgeteilt, an den sich einige kritische Bemerkungen anschliessen.

B. NEBEL.

Abhandlung über die Herleitung aller kristallographischen Systeme mit ihren Unterabteilungen aus einem einzigen Prinzipe. Von AXEL GADOLIN (1867). Deutsch herausgegeben von P. GROTH. [Ostwalds

Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 75.] Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. Leipzig 1896. Verlag von Wilhelm Engelmann. 92 S. Preis 1.50 M.

Gadolin führte auf Grund des von Hauy entdeckten Erfahrungsgesetzes der Rationalität der Indices, ohne irgend welche Annahme über die Molekularstruktur der Kristalle, den Nachweis, dass es nur 32 Klassen von Kristallen geben könne, die sich durch ihre ganz bestimmte Art der Symmetrie von einander unterscheiden. Zu dieser Erkenntnis kam schon 1830 der deutsche Mineralog Hessel. Seine Arbeit ist aber 60 Jahre lang nicht berücksichtigt worden. Die eleganteste Ableitung rührt doch von Gadolin her.

Hier zeigt sich wieder deutlich der Nutzen, welcher durch die Herausgabe dieser Sammlung von Klassikern der exakten Wissenschaften gestiftet wird. Werke, welche in einer dem Gelehrten nicht geläufigen Sprache und in einer dazu noch weniger verbreiteten Zeitschrift erschienen sind, kommen auf diese Weise in den Besitz der Allgemeinheit, wodurch auch das unabhängige Arbeiten über denselben Gegenstand vermieden wird. B. Nebel.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1893. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 49. Jahrgang:

Zweite Abteilung, enthaltend: Physik des Äthers. Redigiert von Richard Börnstein. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 900 S. Preis 30 M.

Dritte Abteilung, enthaltend: Kosmische Physik. Redigiert von Richard Assmann. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 727 S. Preis 25 M.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1894. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 50. Jahrgang:

Erste Abteilung, enthaltend: Physik der Materie. Redigiert von Richard Börnstein. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 600 S. Preis 22.50 M.

Zweite Abteilung, enthaltend: Physik des Äthers. Redigiert von Richard Börnstein. Braunschweig 1896. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 853 S. Preis 30 M.

Dritte Abteilung, enthaltend: Kosmische Physik. Redigiert von Richard Assmann. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 716 S. Preis 25 M.

Über den Nutzen der Fortschritte der Physik für den thätigen Physiker zu sprechen, hiesse: Eulen nach Athen tragen. Aber gerade weil die Physiker zu thätig waren, so mangelte ihnen die Zeit, die Referate so schnell wie möglich zu liefern. Daher kam eine solche Verschleppung in dem Erscheinen der Bände, dass der Vorteil doch sehr fraglich erschien. Schon sahen Einige den Untergang, bis es der Tüchtigkeit zweier neuer Redakteure gelang, dass der 50. Band zum 50jährigen Jubiläum der Physi-

kalischen Gesellschaft erscheinen konnte, also die Zeit innehielt, welche von den Gründern als Ideal angesehen wurde. Dieses Ergebnis ist um so höher anzuschlagen, als auch die restierenden Jahrgänge noch in Angriff genommen werden mussten. Stolz können jene Männer auf ihre Thätigkeit zurückblicken, denn jetzt ist nur noch ein Jahrgang einzuholen, während die laufende Arbeit keine Verzögerung dadurch erleidet. In Kurzem wird alles normal gehen, und die Wiedergeburt ist glücklich vollzogen. Möge eine derartige Krisis nie mehr eintreten, damit auch der 100. Band dereinst rechtzeitig erscheinen kann!

B. Nebel.

Die Lehre von der Elektrizität von Gustav Wiedemann. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Dritter Band. Mit 320 eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1139 S. Preis 28 M.

Die Gruppierung des Inhalts ist im grossen und ganzen dieselbe geblieben, wie in dem entsprechenden Bande der früheren Auflage; jedoch bemerkt man überall die unermüdliche Thätigkeit des Verfassers, dessen Streben es ist, dem Physiker ein Werk an die Hand zu geben, ohne das er nicht mehr erfolgreich arbeiten kann. Wiedemanns Lehre von der Elektrizität ist aber schon dem jüngsten Physiker derart bekannt, dass es nur eines Hinweises bedarf, dass wieder ein neuer Band erschienen sei. Es gehört ein immenser Bienenfleiss dazu, das täglich rasch anwachsende Material sorgfältig zu sammeln und es in solcher Weise zu vereinigen, dass es als Ganzes ein Bild liefert von dem Stande der Wissenschaft, dessen Grenze in dem vorliegenden Falle der Anfang des Jahres 1895 bildet. — Mögen auch die beiden letzten Bände in Bälde erscheinen!

B. Nebel.

Lehrbuch der Experimentalphysik von Adolph Wüllner. Fünfte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Zweiter Band: Die Lehre von der Wärme. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. Leipzig 1896, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 935 S.

Die elektromagnetische Lichttheorie gab die Veranlassung, in dem zweiten Band nunmehr die Wärmelehre zu behandeln, während die Lehre vom Lichte den vierten Band umfassen soll. — Begonnen wird die Lehre von der Wärme wieder mit der Thermometrie und der Ausdehnung der Körper durch die Wärme. Bei dieser Inhaltseinteilung war es erforderlich, die Temperaturmessungen mit Thermoströmen in diesen Band aufzunehmen, während die Thermoströme selbst erst im nächsten Band eingehender berücksichtigt werden. Die wichtigen Ergebnisse der experimentellen Erforschung der Gase sind voll gewürdigt worden. Da die Strahlung einen wesentlichen Teil der Optik ausmacht, so wurde in dem zweiten Kapitel nach Besprechung der Messinstrumente nur die Emission und Absorption

aufgenommen. Die mechanische Theorie der Wärme ist im wesentlichen unverändert geblieben. Obwohl die spezifische Wärme über ein reiches experimentelles Material zu verfügen hat, so sind die Schlüsse daraus noch nicht befriedigend. Von den grossen Errungenschaften auf dem Gebiete der physikalischen Chemie durch van t'Hoff und seine Mitarbeiter haben diejenigen Aufnahme gefunden, welche mehr die Physik streifen. So kommt es auch, dass die Wärmeentwicklung durch chemische Prozesse nicht auf Grund der neueren Untersuchungen behandelt wird, obwohl diese für den Chemiker so überaus fruchtbar geworden sind, sondern sich aufbaut auf die physikalischen Grundsätze, die ihre Entstehung den älteren Untersuchungen verdanken. Dieses Verfahren mag ja jetzt noch hingehen, bis die physikalische Chemie weiter ausgebaut ist. — Das Buch eignet sich insbesondere für den jungen Physiker, der sich im Laboratorium selbstständig machen will.

B. Nebel.

Lehrbuch der Experimentalphysik von E. von Lommel. Mit 430 Figuren im Text und einer Spektraltafel. Dritte Auflage. Leipzig 1896. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 556 S.

Die rasche Aufeinanderfolge der drei Auflagen spricht dafür, wie sehr es der Verfasser verstanden hat, ein Buch zu schaffen, welches den Bedürfnissen der Studierenden in jeder Hinsicht entspricht. Ein Grund zu wesentlichen Änderungen lag somit nicht vor, gleichwohl hat der Verfasser da und dort seine bessernde Hand angelegt. — Die seit dem Erscheinen der letzten Auflage erfolgte wichtige Entdeckung der Röntgen-Strahlen ist entsprechend berücksichtigt worden. Die Beigabe einer schönen Spektraltafel darf als besonders willkommen bezeichnet werden. — Auch diese Auflage begleite unser „Glück auf“!

B. Nebel.

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Neunte umgearbeitete und vermehrte Auflage von Leop. Pfaundler, unter Mitwirkung von Otto Lummer. In drei Bänden. Mit gegen 2000 Holzstichen, Tafeln, zum Teil in Farbendruck. Zweiter Band. Erste Abteilung. Zweite Lieferung. Braunschweig 1895. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 608 S. Preis 4.50 M.

Die vorliegende zweite Lieferung beginnt mit dem fünften Kapitel, der Spektralanalyse. In einem besonderen Kapitel werden die Umwandlungsprodukte oder Wirkungen des absorbierten Lichtes behandelt, also die Fluorescenz, Phosphorescenz und Photographie. Die Wellenlehre des Lichtes wird durch einen geschichtlichen Überblick eingeleitet, worauf dann zur Ableitung der Grundgesetze der geometrischen Optik übergegangen wird. Den centrierten optischen Systemen ist wegen ihrer Wichtigkeit in der praktischen Optik ein besonderes Kapitel gewidmet, in welchem die bei der Abbildung auftretenden Fehler und die Mittel zu deren Hebung eingehend behandelt werden. Den Abschluss dieser Lieferung bildet der An-

fang des elften Kapitels: Das Auge und die Gesichtsempfindungen. — Die Fehler der Linsensysteme wurden früher meistens nur kurz erwähnt; erst die allgemeine Verbreitung der Photographie spornte die Optiker zum Auffinden der besten Linsensysteme an, womit natürlich eine eingehende Kenntnis der Abbildungsfehler verbunden war. Das Streben, diese schwierigen Teile der Optik so deutlich wie möglich darzustellen, giebt sich schon in dem äusseren Umstande zu erkennen, dass in den Figuren die roten und blauen Strahlen farbig wiedergegeben sind, was von sehr grossem Wert ist. — Auch dieser Teil des Werkes sei bestens empfohlen.

B. Nebel.

Das Mikroskop und seine Anwendung. Von Dippel. Zweite umgearbeitete Auflage. Zweiter Teil. Anwendung des Mikroskopes auf die Histologie der Gewächse. Erste Abteilung. Mit 302 eingedruckten Holzstichen und drei Tafeln in Farbendruck. Braunschweig 1896. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 443 S. Preis 24 M.

Seit dem Erscheinen der früheren Auflage ist die mikroskopische Untersuchung der Pflanzen wesentlich gesteigert worden. Dabei sind auch die Methoden teils verbessert, teils neu geschaffen worden. Dies gilt besonders von den Polarisationserscheinungen. Der erste Abschnitt des Werkes beschäftigt sich ausschliesslich mit den Untersuchungen über den Bau der Zelle, während der zweite die Gewebe der höheren Gewächse zum Gegenstand hat. Der dritte und vierte Abschnitt sind der zweiten Abteilung des Werkes vorbehalten und sollen die Untersuchungen der vegetativen Organe der höheren Gewächse und die aus der Entwickelungsgeschichte umfassen. Die zahlreichen, zum Teil farbigen Figuren tragen wesentlich zum leichteren Verständnis bei und entheben den Verfasser von weitschweifigen und sehr oft doch ungenügenden Beschreibungen. Das Entgegenkommen hierin von Seiten der Verlagsbuchhandlung sei besonders anerkannt. Bezüglich der äusseren Ausstattung wäre die Wahl eines solchen Papiers zu wünschen, bei welchem die Rückseite nicht durchschlägt. Wie unschön sind z. B. Seite 178, 249, 253 und andere mehr! — Von welcher Wichtigkeit die mikroskopischen Untersuchungen der organischen Substanzen, speziell auch die in der Botanik für das praktische Leben sind, dafür sprechen die durch das Mikroskop in Kürze feststellbaren Verfälschungen von Mehl und anderen Lebensmitteln. Ein derartiges Handbuch wird daher nicht nur dem Gelehrten, sondern auch dem gerichtlichen Sachverständigen ein wichtiges Werkzeug sein.

B. Nebel.

Vorlesungen über Gastheorie. Von Ludwig Boltzmann. I. Teil: Theorie der Gase mit einatomigen Molekülen, deren Dimensionen gegen die mittlere Weglänge verschwinden. Leipzig 1895. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 204 S.

Auch die Wissenschaft hat ihre Mode, und wer dieselbe nicht mitmacht, wird von seinen Fachgenossen ebenso beurteilt, wie wenn er kein

modernes Gewand trägt. Lächerlich ist es, aber leider wahr. Verfasser empfindet dies auch und erläutert in seinem Vorwort, wie er eigentlich dazu kommt, der Öffentlichkeit ein Werk über Gastheorie zu übergeben. Dies kann aber nur als ein Zug von Bescheidenheit angesehen werden; denn der Verfasser gehört zu den Menschen, die sich unabhängig von der Mode kleiden können und doch nicht unmodern sind. Während die kinetische Gastheorie von O. E. Meyer mehr für Chemiker ist, die auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Chemie thätig sind, so existieren doch nur die Kirchhoffschen Vorlesungen über Wärmetheorie, denen die Gastheorie als Anhang folgt. Angeregt durch die Kirchhoffsche Gastheorie, war der Verfasser bestrebt, die vielen Lücken darin auszufüllen und die Arbeiten von Clausius und Maxwell im Zusammenhang wiederzugeben. Nach einer Einleitung über die mechanische Analogie für das Verhalten der Gase und der Berechnung des Druckes eines Gases werden im ersten Abschnitt die Moleküle als elastische Kugeln aufgefasst, wobei äussere Kräfte und sichtbare Massenbewegungen fehlen. In dem zweiten Abschnitt werden die Moleküle als Kraftcentra angesehen und äussere Kräfte und sichtbare Bewegungen des Gases der Betrachtung unterworfen. Im dritten und letzten Abschnitt wird der Nachweis geliefert, dass die Moleküle sich mit einer der fünften Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstossen. Der zweite Teil soll die van der Waalssche Theorie, die Gase mit mehratomigen Molekülen und die Dissociation zum Gegenstand haben.

B. Nebel.

Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus und der Induktion, dargestellt auf Grund des Kraftlinienbegriffes. Von H. Ebert. I. Teil. Mit 93 Abbildungen im Text und auf zwei Tafeln. Leipzig 1896. Verlag von Johann Ambrosius Barth. 223 S.

Durch die genialen experimentellen Untersuchungen von Heinrich Hertz wurde der Faraday-Maxwellschen Theorie über die Elektrizität der wichtigste Stützpunkt geliefert, so dass die früheren Anschauungen plötzlich verdrängt wurden. Dies geschah in so unglaublich kurzer Zeit, dass z. B. die Elektrotechnik sofort mit den Kraftlinien rechnete. In der Physik wurde in dem Unterricht auch der Kraftlinienbegriff eingeführt, jedoch bildete er noch nicht allgemein die Basis für die Elektrizitätslehre, zumal noch kein Lehrbuch für den ersten Physikunterricht an Hochschulen existierte, in welchem der ganze Stoff vom Standpunkt der Kraftlinientheorie aus einheitlich zur Darstellung gelangte. Das vorliegende, dem Andenken von Heinrich Hertz gewidmete Werk soll diese Lücke ausfüllen. Zunächst ist nur der erste Teil erschienen, welcher einen mehr vorbereitenden Charakter besitzt. Die neuen Begriffe werden an den längst bekannten Beispielen aus dem ersten Physikunterricht erläutert und durch Einüben geläufig gemacht. So werden schon bei dem natürlichen Magnet das magnetische Kraftfeld und die Kraftlinien eingeführt. Der zweite Teil soll die In-

duktion im weitesten Sinne des Wortes umfassen. Dahin gehören zunächst die Erscheinungen der Induktion in qualitativer und quantitativer Hinsicht, sodann diejenigen der Selbstinduktion, der ein- und mehrphasigen Wechselströme und der magnetischen Drehfelder. Mittels der Helmholtzschen Cykeltheorie sollen auch die Erscheinungen der Transformation der elektromagnetischen Energie in Wärme und auch die Energieansammlung bei ungeschlossenen Strömen behandelt werden. Sehr wichtig wird dann das Kapitel über Elektrooptik sein, in welchem neben den Leuchterscheinungen auch die Kathoden- und Röntgenstrahlen ihren Platz finden werden. Aus diesen kurzen Andeutungen folgt schon, welche Fülle von Material unter dem einen Gesichtspunkt der Kraftlinien behandelt werden soll. — Es bedarf wohl kaum des Hinweises, dass sich ein solches Buch sehr rasch in dem Unterricht über Experimentalphysik einbürgern wird, um die neue Generation nicht zu sehr mit dem leidigen Übergangsstadium von der alten zur neuen Theorie zu belästigen. — Auch die äussere Ausstattung entspricht ganz dem gediegenen Inhalt des Werkes. B. Nebel.

Populär-wissenschaftliche Vorlesungen. Von E. Mach. Mit 46 Abbildungen. Leipzig 1896. Verlag von Johann Ambrosius Barth. 135 S.

Die 15 populär-wissenschaftlichen Vorlesungen sind zuerst in Chicago in englischer Sprache erschienen, verdanken aber ihre Entstehung nicht, wie dies so häufig der Fall ist, einem Vortragscyklus in einem kürzeren Zeitraum; ihr Erscheinen erstreckt sich über einen Zeitraum von mehr als 30 Jahren, und schon daraus folgt, dass sie vollständig unabhängig von einander sind. Auch der Charakter des Inhalts ist durchaus verschieden, bald wird ein ganz spezieller Gegenstand behandelt, wie z. B. über die Geschwindigkeit des Lichtes, bald eine allgemeine, das heutige Leben lebhaft beschäftigende Schulfrage, wie z. B. über den relativen Bildungswert der philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer der höheren Schulen. Bei dieser unabhängigen Stoffauswahl kann der Leser seinem Geschmack folgen und ist nicht genötigt, schrittweise vorzugehen, was gerade dem Laien, der sich mehr belehrend unterhalten will, nur zu schwer wird. Alle aus dem Gebiet der Naturwissenschaften stammenden populären Vorlesungen begrüssen wir mit besonderer Freude; denn sie tragen dazu bei, dem klassischen Philologen seinen bisher dominierenden Platz in der Schule auf das richtige Maß zu beschränken.

B. Nebel.

Grundriss der Wärme für Studierende und Schüler. Von R. T. Glazebrook. Deutsch herausgegeben von Otto Schönrock. Mit 88 Figuren im Text. Berlin 1896. Verlag von S. Calvary & Co. 280 S. Preis 3.60 M.

Das kleine Werk ist sehr nett und äusserst praktisch eingerichtet. Hinter den mit Zahlen versehenen Abschnitten ist in fettem Druck das den

Inhalt angebende Stichwort gesetzt. Handelt es sich um eine Definition, so fällt sie äusserlich schon durch den Druck in Kursivschrift auf. Durch kleinen Druck werden Aufgaben und Fehlerquellen bei Experimenten angedeutet. Dabei war der Verfasser bestrebt, so knapp und präzis wie möglich zu sein. Kurz gesagt, es ist ein Vademecum für den angehenden Physiker, sei er mit Experimentieren, sei er mit Examensvorbereitungen beschäftigt.

B. Nebel.

Grundgesetze der Molekularphysik. Von Th. Schwartze. Mit 25 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1896. Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber. 209 S. Preis 2 M.

Durch die überraschenden experimentellen Ergebnisse von Heinrich Hertz machten sich die Faraday-Maxwellschen Anschauungen über die elektrischen Vorgänge derart schnell geltend, dass man zunächst noch in Verlegenheit kam, da die Ausdrucksweise der alten Lehre mit derjenigen der neuen bei der Behandlung der gesamten Elektrizitätslehre in Kollision geriet. Verfasser ist mit seiner Lehre von der Elektrizität und deren praktische Verwendung als ein Apostel der neuen Lehre anzusehen, da die Darstellung ganz im Sinne Faradays erfolgte. — Der Umschwung auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus ist aber ein solch gewaltiger, dass auch die Mechanik hiervon ergriffen wird. Längst hat man es empfunden, dass es mit dieser in dem bisherigen Geleise nicht weiter gehen kann. Schon Lagrange und Hamilton waren der Ansicht, dass sich die mechanischen Grundprinzipien von einem Gesichtspunkt aus behandeln lassen müssen. Verfasser sucht dieses Ziel dadurch zu erreichen, dass er das dem Wechselspiel von Wirkung und Gegenwirkung Ausdruck gebende Prinzip der Zusammensetzung der Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz zur Grundlage der physikalischen Mechanik macht. Durch die Aufstellung einer allgemeinen, für Statik und Dynamik giltigen Grundformel, analog der Maxwellschen elektrodynamischen Grundgleichung gelingt es, die gesamte Statik und Dynamik in eine systematische Gestalt zu bringen. — Den Anhang bildet eine auf neuere Beobachtungen gegründete Farbentheorie, die mit der Newtonschen Hypothese, dass weisses Licht zugleich vielfarbiges Licht sei, im Widerspruch steht.

B. Nebel.

Repetitorium der Experimentalphysik für Studierende auf Hochschulen. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Mediziner und Pharmazeuten. Von L. Weber. Mit 121 in den Text gedruckten Abbildungen. München und Leipzig 1895. Wissenschaftlicher Verlag von Dr. E. Wolf. 256 S. Preis 4.20 M.

Gewöhnlich wird in den Vorträgen über Experimentalphysik auf die speziellen Bedürfnisse einzelner Studentenkategorien keine Rücksicht genommen, so dass namentlich den Chemikern, Medizinern und Pharmazeuten in vielen Teilen der Physik die Vorträge allzu eingehend erscheinen. Dadurch wird die für das Examen zu treffende Auswahl recht schwer, zumal

die grösseren Lehrbücher zu viel, die kleineren zu wenig bringen. Verfasser hat es verstanden, ein nicht zu umfangreiches Werk zu schaffen, welches die wesentlichen Grundlagen der Experimentalphysik in solchem Umfang enthält, wie sie für ein erfolgreiches physikalisches Praktikum speziell für Mediziner und Pharmazeuten ausreichen. Die in diesen Kreisen so häufig gefürchtete Mathematik tritt völlig zurück und beschränkt sich nur auf die einfachsten Mittel. Zur schnelleren Orientierung sind auf den Rand die Stichwörter gedruckt. Die Figuren sind nur schematisch angedeutet, setzen also die Bekanntschaft mit den Apparaten aus der Experimentalphysik voraus. — Sicherlich wird dieses Repetitorium der Experimentalphysik bei den Studenten sehr willkommen geheissen.

B. Nebel.

L'école pratique de physique. Cours élémentaire de manipulations de physique, à l'usage des candidats aux écoles et au certificat des études physiques et naturelles. Par Aimé Witz. Deuxième édition revue de augmentée. Paris 1895. Gauthier-Villars et fils. 218 S. Preis 5 Fr.

Obwohl der Charakter des Buches gegenüber der ersten Auflage sich nicht geändert hat, so hat es doch darin eine wesentliche Änderung erfahren, als es in zwei Bände geteilt worden ist. Äussere Rücksichten gaben hierzu die Veranlassung. Der erste Band ist für Schulamtskandidaten, Mediziner und Pharmazeuten bestimmt, er ist daher elementar gehalten. Zugleich dient er auch als Vorbereitung für den zweiten Band, welcher die jungen Leute zu tüchtigen Physikern heranziehen soll, indem sie mit den genauen Messungen schwierigerer Versuche vertraut gemacht werden sollen. Jedem Abschnitt geht ein theoretischer Teil vor, in welchem das Wichtigste zum Verständnis der anzustellenden Versuche kurz zusammengestellt wird. Sodann folgt eine Beschreibung der zu benützenden Apparate und erst dann werden die von dem Schüler durchzuführenden praktischen Übungen besprochen. Den Schluss bildet jedes Mal eine Zusammenstellung der Ergebnisse und der daraus zu ziehenden Folgerungen. Diese Einteilung weicht wesentlich von derjenigen unserer deutschen Bücher für das physikalische Praktikum ab. Durch jene Anordnung wird dem Studierenden die ganze Arbeit sehr erleichtert und das Selbststudium ermöglicht. B. Nebel.

Cours de physique de l'école polytechnique par J. Jamin. **Premier supplément** par Bouty. Chaleur. — Acoustique. — Optique. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 182 S.

In dem vorliegenden Ergänzungsband zu dem Jaminschen Werk werden die neueren Fortschritte der Physik in Bezug auf die Wärme, Akustik und Optik behandelt. Um aber das Ganze in zusammenhängender Form darstellen zu können, konnten nicht alle Einzelheiten bis in die neueste Zeit aufgenommen werden, sondern nur solche, welche seit einigen Jahren eine gewisse Entwicklung erfahren haben, wie z. B. der osmotische

Druck und dergleichen mehr. — Auf diese Weise werden auch die Besitzer der letzten Auflage mit dem heutigen Stand der Physik bekannt gemacht.

B. Nebel.

Die Erhaltung der Arbeit. Von Richard Heger. Hannover 1896. Helwingsche Verlagsbuchhandlung. 305 S. Preis 8 M.

In dem vorliegenden Buch sollen die Naturerscheinungen vom Standpunkte der Erhaltung der Arbeit aus wissenschaftlich behandelt werden, ein Streben, das schon sehr viele Anhänger gewonnen hat. Wenn nun auch dieser Standpunkt nicht allgemein angenommen wird, so ist es doch ein nützliches Werk, die Wichtigkeit des Prinzipes von der Erhaltung der Arbeit an der Hand der physikalischen Erscheinungen nachgewiesen und die Bedeutung dieses Gesetzes durch eine leichtverständliche Darstellung den weitesten Kreisen zugänglich gemacht zu haben. Je grösser die Verbreitung dieses den Haushalt der Natur betreffenden Gesetzes ist, um so grösser ist die Wahrscheinlichkeit, dass neue Gedanken und neue Gesichtspunkte auftreten zu der schnelleren Klärung über die künftige Behandlung der Physik; denn die sich mehr und mehr bahnbrechenden Anschauungen in der Elektrizitätslehre erheischen immer energischer eine baldige Umgestaltung der Mechanik und daher der ganzen übrigen Physik. — Figuren, wie z B. Fig. 53 ohne weitere Buchstabenbezeichnung, sind für solche, die sich erst belehren lassen wollen, von geringem Nutzen. B. Nebel.

Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug. Mathematisch-mechanische Klärung auf experimenteller Grundlage entwickelt von Friedrich Ritter von Loessl. Wien 1896. Alfred Holder. 304 S.

Die Lüfte zu durcheilen, war schon jeher das Bestreben der Menschen, und es fehlte nicht an Versuchen, diesem Ziel näher zu kommen. Zwei Richtungen sind es hauptsächlich, welche eingeschlagen werden, einmal das Bestreben, den Luftballon lenkbar zu machen und sodann das grossartigere Problem, den Vogelflug nachzuahmen. Um dieses Ziel zu erreichen, sind aufmerksame Naturstudien erforderlich. Dazu gehören nun nicht nur eifrige Beobachtungen des Vogelfluges, sondern auch eine eingehende Kenntnis von den Gesetzen des Luftwiderstandes, um richtige Konsequenzen für den künstlichen Vogelflug ziehen zu können. Die seit einer Reihe von Jahren angestellten Experimente und teilweise auch schon veröffentlichten Resultate hat der Verfasser in dem vorliegenden Buche zu einem Ganzen vereinigt. Nachdem die verschiedenen Ansichten über das Verhalten der Luft gegen eine bewegte Fläche einander gegenüber gestellt worden sind, wird auf das nach Ansicht des Verfassers thatsächliche Verhalten der Luft hingewiesen, das in einer Lufthügelbildung bestehen soll. Diese wird nun der eingehendsten experimentellen und rechnerischen Untersuchung unterworfen, und dabei die Ergebnisse erforscht, wenn die Versuchsbedingungen

entsprechend geändert werden. Dies führt schliesslich zu dem Problem des Vogelfluges, wobei auch die bisherigen Vorstellungen über diesen nicht unerwähnt bleiben. Aus den speziellen Betrachtungen des Taubenfluges und den rechnerisch ergründeten Arbeitsleistungen glaubt der Verfasser die gewonnenen Resultate sinngemäss auf jede Vogelgattung übertragen zu dürfen, weshalb von einer weiteren Betrachtung abgesehen wird. Dass die mathematischen Ergebnisse nur Annäherungswerte sein können, dessen ist sich auch der Verfasser bewusst; denn für eine durchsichtige mathematische Behandlung müssen zunächst die Bedingungen so einfach wie möglich gewählt werden. Daher sind die Probleme über den Stirnwiderstand schwach gebogener dünner Flächen, sowie der Widerstand parallel gestellter Flächen, insbesondere der von Gittern und Sieben wegen ihres bedeutenden Umfanges künftigen selbständigen Abhandlungen vorbehalten worden. B. Nebel.

Les radiations nouvelles. Les rayons X et la photographie à travers les corps opaques par Ch.-Ed. Guillaume. Deuxième édition. Paris 1896. Gauthier-Villars et fils. 144 S. Preis 3 Frcs.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches ist in theoretischer Hinsicht über die Natur der X-Strahlen oder Röntgen-Strahlen, wie sie in Deutschland nur noch bezeichnet werden, kein Fortschritt zu verzeichnen, der uns die Lösung für das immer noch unbekannte X gebracht hätte. Der Verfasser verzichtet daher, die verschiedenen Vermutungen über das Wesen dieses neuen Phänomens in dieses Buch aufzunehmen, sondern begnügt sich mit den bedeutenden Ergebnissen in praktischer Hinsicht. Wer sich daher Aufklärung hierüber verschaffen will und selbst erfolgreiche Versuche anzustellen wünscht, dem kann dieses Buch nur bestens empfohlen sein. Der erste Teil und die beiden ersten Kapitel des zweiten Teiles betreffen diejenigen Kapitel der Physik, welche zum Verständnis der Röntgen-Strahlen erforderlich sind. Die Figuren einer Ratte, mit natürlichen und Röntgen-Strahlen aufgenommen, liefern den deutlichsten Beweis über den Unterschied dieser Strahlengattungen. Die übrigen Tafeln geben ausgezeichnete Röntgen-Photographien wieder. B. Nebel.

Untersuchungen über die Quellung der Stärke von H. Rodewald. Kiel und Leipzig 1896. Verlag von Lipsius und Tischer. 87 S. Preis 2.40 M.

Verfasser beschäftigt sich zunächt mit der Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten der Stärke und sodann eingehend mit Wärmemessungen. Hier werden die spezifischen Wärmen der trockenen, gequollenen Stärke und des Stärkekleisters gemessen, dann erst wird die Quellungswärme der Stärke im Eiskalorimeter und bei Zimmertemperatur ermittelt. Der Bestimmung der spezifischen Volumina der Stärke folgt diejenige des Wassergehaltes der Stärke im Quellungsmaximum. Nach diesen experimentellen

Untersuchungen wird in Kürze die mechanische Wärmetheorie auf die Quellung angewendet, und aus den zusammengestellten, auf experimentellem Wege gefundenen Resultaten noch eine Reihe von Grössen abgeleitet, unter anderem auch die bei der Quellung auftretende Arbeitsleistung. — Durch diese Spezialarbeit ist aber auch das Interesse auf andere Gebiete gelenkt worden, erwähnt sei nur die Physiologie bezüglich der Muskelthätigkeit.

B. Nebel.

Barometrische Höhentafeln für Tiefland und für grosse Höhen von W. Jordan. Hannover 1896. Helwingsche Verlagsbuchhandlung. 48 S. Preis 2 M.

Diese Tafeln bilden die Ergänzung der zweiten Auflage der im Jahre 1886 im Verlage von J. B. Metzler, Stuttgart, erschienenen barometrischen Höhentafeln nach Unten und Oben, so dass nunmehr ein barometrisches Tabellenwerk existiert, welches bei barometrischen Höhenmessungen im Tiefland, im Mittelgebirge, im Hochgebirge und auf Ballonfahrten bis 8000 m Höhe benutzt werden kann. — Sicherlich wird auch diese Arbeit des ungemein thätigen Verfassers in den beteiligten Kreisen grossen Anklang finden.

B. Nebel.

Isenkrahe, Dr. C. **Das Verfahren der Funktionswiederholung, seine geometrische Veranschaulichung und algebraische Anwendung.** Leipzig 1897. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 113 S.

Die sogenannte Funktionswiederholung oder Iteration, welche darin besteht, dass man auf eine Grösse z_0 die Operation f wiederholt ausübt, also aus $z_1 = f(z_0)$, weiter $z_2 = f(z_1) = f[f(z_0)] = f_2(z_0)$ bildet u. s. f. bis $z_n = f_n(z_0)$, ist nicht neu. Verfasser selbst weist auf Archimedes, Newton, Gauss, Günther, E. Hoffmann, Netto hin, Namen, welchen unter anderen noch Stern, Schlömilch, Schröder, Schapira und v. Schaewen beigefügt werden können.

Die Frage der Anwendung iterierter Funktionen auf Algebra hat eigentlich so recht Günther in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der 34. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Trier (Sept. 1879) in Fluss gebracht. Man vergleiche J. C. V. Hoffmanns Zeitschr., 11. Jahrg., S. 68: „Eine didaktisch wichtige Auflösung trinomischer Gleichungen“. Denn der Güntherschen Fragestellung folgte noch in demselben Bande dieser Zeitschrift eine entsprechende Abhandlung von v. Schaewen, sodann eine verwandte Arbeit von E. Hoffmann im Archiv d. Math., 66. Teil, S. 33 (1881). Etwas später erschienen zwei Abhandlungen von Netto im 29. Bd. der Math. Annalen (1887), S. 141 u. 148 und an diese anschliessend eine Arbeit von Isenkrahe, Math. Annalen, Bd. 31, S. 309 (1888), welche als der Vorläufer seines jetzt erschienenen Buches bezeichnet werden kann.

In allen diesen Arbeiten fehlt, von einigen sehr unbestimmt gehaltenen Äusserungen abgesehen, die geometrische Deutung des ana-

lytischen Vorganges bei dem Iterationsprozess, und diese Lücke soll nun im wesentlichen durch das uns vorliegende Buch ausgefüllt werden.

Der Verfasser zerfällt eine Gleichung $F(x)=0$ in $f(x)=g(x)$ und betrachtet die Kurven $y=f(x)$ und $y=g(x)$. Von der einen Kurve nach der anderen schlägt er sodann eine „Brücke“, d.h. er fügt eine die genannten Kurven schneidende Kurve $y=k(x)$ hinzu und sucht mittelst solcher sich aneinander schliessender Brücken den Schnittpunkt der ersten beiden Kurven zu erreichen. Die Abscisse jenes Schnittpunktes kommt dann offenbar mit einer reellen Wurzel der vorgelegten Gleichung überein. Die aufeinander folgenden Brücken bilden, wie leicht ersichtlich, je nach der Neigung der Kurven gegen die x-Axe, entweder einen treppenartigen „Brückenzickzack“, kurz eine „Treppe“ oder auch eine „eckige Spirale“, ein Ausdruck, welcher allerdings an „eckiger Kreis“ u. dergl. erinnert. — Nach Einführung dieser allgemeinen Begriffe wird die Kurve $y=k(x)$ spezialisiert, genauer gesprochen: es werden die aufeinander folgenden Brücken durch Strecken ersetzt, welche abwechselnd parallel den Koordinatenaxen verlaufen; es entsteht so zwischen den Kurven ein geradliniger, gebrochener Zug. Aber auch die Kurve $y=g(x)$ wird spezialisiert; an ihrer Stelle wird einfach die Gerade $y=x$ eingeführt. Diese Gerade nennt Verfasser „Wurzelaxe“, und er legt ihr eine prinzipielle Bedeutung bei, welche sie indessen keineswegs besitzt. Gerade dadurch, dass er jene Axe auswählt und $y=x$ an Stelle einer noch passend auszusuchenden, leicht umkehrbaren Funktion $y=g(x)$ setzt, beraubt er sich der Bewegungsfreiheit und gestaltet die geometrischen Bilder unnötig verwickelt.

Bei der Neuheit und Wichtigkeit des Gegenstandes halten wir uns für verpflichtet, diesen genauer darzulegen.

Nehmen wir die kubische Gleichung:

$$a_0 + a_1 x + x^3 = 0,$$

welche Verfasser auf Seite 61 behandelt. Er bildet:

1) $$x = -\frac{a_0 + x^3}{a_1} = f(x);$$

2) $$x = \sqrt[3]{-a_0 - a_1 x} = v(x)$$

und legt somit die Gerade $y=x$ fest, während die kubischen Parabeln:

$$y = -\frac{a_0 + x^3}{a_1}, \quad \text{resp.} \quad x = \sqrt[3]{-a_0 - a_1 y}$$

mit wechselnden Werten der Parameter a_0 und a, in veränderlicher Gestalt und Lage die Ebene durchsetzen. Man vergl. die Figuren 52—55, von denen die erste, welche sich auf eine quadratische Gleichung bezieht, nicht weniger als sechzehn verschiedene Parabeln aufweist.

Bringt man dagegen die vorgelegte Gleichung auf die Form:

$$x^3 \mp x - c = 0,$$

was mittelst einer einfachen Substitution immer möglich ist, und spaltet sie in $y=x^3$ und $y=c\pm x$, so hat man eine feste kubische Parabel von

unveränderlicher Gestalt, während das wechselnde Element in einer Geraden $y = c + x$ oder $y = c - x$ besteht, welche für verschiedene Werte von c parallel zu sich selbst zu verschieben ist. — Dieselbe Bemerkung gilt für trinomische Gleichungen überhaupt, denn die Gleichung

$$x^n \mp x^p - c = 0$$

kann in eine solche mit $p = 1$ verwandelt werden, nur ist dann n als gebrochen zu denken, was keinerlei Störung in dem Iterationsprozess herbeiführt.

Betrachten wir weiter eine biquadratische Gleichung der Form

$$x^4 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0.$$

Mit Herrn Isenkrahe müssten wir dieselbe etwa spalten in $y = x$ und

$$1)\quad y = \frac{x^4 - \alpha x^2 - \gamma}{\beta}, \quad \text{resp.}\quad 2)\quad x = \sqrt{\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta y + \gamma}},$$

sodann aber wären die letzten Gleichungen als Kurven vierter Ordnung zu deuten, welche mit den Konstanten α, β, γ nicht nur ihre Lage, sondern auch ihre Gestalt wechselten. — Verzichten wir dagegen auf die Wurzelaxe $y = x$ und transformieren die vorgelegte Gleichung so, dass sie durch die beiden Gleichungen $x^2 = a + y$ und $y^2 = b + x$ ersetzt werden kann, d. h. dass sie übereinkommt mit

$$(x^2 - a)^2 - x - b = 0,$$

so erreichen wir eine beträchtliche Vereinfachung. Die hier auftretenden Parabeln sind vom zweiten Grade und kongruent, denn sie besitzen denselben Parameter und unterscheiden sich nur durch ihre Lage. Ihre Gleichungen sind überdies leicht umkehrbar und liefern daher folgende einfache Kettenlösungen:

$$1)\qquad x = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a + \cdots}}},$$

$$2)\qquad x = -b + \sqrt[\frac{1}{2}]{-a + \sqrt[\frac{1}{2}]{-b + \cdots}},$$

welche in der That sämtliche Wurzeln der biquadratischen Gleichung zur Darstellung bringen. — Ähnliche Bemerkungen gelten für quadrinomische Gleichungen der Form:

$$x^{2n} - \alpha x^n - \beta x - \gamma = 0 \quad \text{und} \quad x^n - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0.$$

Wenn also Herr Isenkrahe auf gewisse merkwürdige und einfache Algorithmen nicht verzichten will, so muss er die Beschränkung, welche er durch die Wurzelaxe $y = x$ einführt, von vornherein fallen lassen. Mit dieser Axe scheiden natürlich auch die „Oktanten“ aus, deren er bei seiner Darstellung bedarf. Solange er aber die Funktion $y = g(x)$ einfach durch $y = x$ ersetzt, so geschieht das eben auf Kosten der anderen

$y = f(x)$, welche unnötig kompliziert wird, sodass sie sich schwer oder garnicht invertieren lässt. Nun braucht zwar die Umkehrbarkeit von $f(x)$ nicht unbedingt gefordert zu werden, wenn man eine Iterationsmethode wie etwa die Newtonsche in Anwendung bringt; aber dann bewegt man sich in ausgefahrenen Gleisen.

Und weiter: Die iterierten Funktionen sind geeignet in der angewandten Mathematik eine hervorragende Rolle zu spielen. Dort kommt es darauf an, möglichst schnell die definitiven numerischen Lösungen zu erhalten, und man wird deswegen die Iteration mit einem recht günstigen Anfangswert beginnen wollen. Solche Anfangswerte können aber auf geometrischen Wege sehr leicht gefunden werden; wir wollen das durch ein Beispiel klar machen.

Um eine beliebig vorgelegte biquadratische Gleichung zu lösen, bringe man sie zunächst auf die Form:

$$(x^2 - a)^2 - x - b = 0,$$

was, wie bemerkt, durch einfache Substitution stets möglich ist. Nun konstruiere man sich ein für alle Mal auf eine durchscheinende Tafel (Fliesspapier) die Parabel $v = u^2$ in zwei Exemplaren und bringe dieselben durch Aufeinanderlegen zu Schnitt nach Maßgabe der beiden Gleichungen

$$x^2 = a + y \quad \text{und} \quad y^2 = b + x.$$

Die Abscissen der unmittelbar erkennbaren Schnittpunkte sind selbstverständlich angenäherte Lösungen der oben angeschriebenen Gleichung vierten Grades, und die nun vorzunehmende Iteration führt von diesen günstig gewählten Anfangslösungen zu solchen mit beliebig grosser Genauigkeit. Sobald also die Konstanten der Gleichungen derartig reduziert werden, dass sie keinen Einfluss mehr auf die Gestalt der Kurven haben, reicht ein fertiges Kurvenpaar, ein in allen Fällen brauchbarer mechanischer Apparat zu einer angenäherten Bestimmung der Wurzeln aus; andernfalls müsste man die Kurven für jedes Beispiel besonders zeichnen.

Auf eine solche Reduktion geht aber Herr Isenkrahe nicht ein, er würde sie bei quadrinomischen Gleichungen auch gar nicht mehr erzwingen können, weil er durch die einseitige Entlastung der Kurvengleichung

$$y = g(x),$$

d. h. durch ihre Verwandlung in $y = x$, die andere Gleichung $y = f(x)$ mit Konstanten überlastet. Aber abgesehen von allen Spezialitäten muss ganz allgemein folgendes konstatiert werden. Das gewöhnliche rechtwinklige Koordinatensystem mit seinen zwei Axen und vier Quadranten reicht zur geometrischen Interpretation der analytischen Vorgänge bei der Iteration völlig aus und ist zugleich das zweckmässigste. Unter Umständen kann es bequem sein, die auftretenden Gleichungen auch in Polarkoordinaten zu deuten, und dann treten an Stelle der horizontalen Brücken einfach Kreisbögen.

Trotz all' der Einwände, die wir gemacht, möchten wir die Schrift des Herrn Isenkrahe doch zur Lektüre empfehlen, denn sie ist die einzige

Quelle — abgesehen von Legendres Zahlentheorie und zwei noch zu nennenden Abhandlungen, welche eine geometrische Illustration der Iterationstheorie liefert. — Was Legendre betrifft, so teilt mir Herr Mehmke soeben gefälliger Weise mit, dass in dem Werke über Zahlentheorie (Anhang des zweiten Bandes) die Iterationsmethode auf numerische Gleichungen angewendet und der analytische Prozess an sich schneidenden Kurven verfolgt wird. Immerhin wird man finden, dass der geometrische Teil bei Legendre beträchtlich zurücktritt, feinere Unterscheidungen fehlen ganz, sind wahrscheinlich auch nicht beabsichtigt, und die Untersuchung kann keineswegs als abgeschlossen angesehen werden.

Zum Schlusse muss Referent, so ungern er es auch an dieser Stelle thut, auf die eigenen einschlägigen Arbeiten zu sprechen kommen, welche im Jahre 1894 erschienen sind. Die erste findet sich in dieser Zeitschrift, 39. Jahrg, und sie bringt auf Seite 321—354 eine umfängliche geometrische Theorie der Kettenfunktionen. Die andere wurde im Journal für Mathematik Bd. 113, S. 267—302 publiziert und führt den Titel „Theorie der An- und Umläufe und Auflösung der Gleichungen vom vierten, fünften und sechsten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Funktionen.“ In diesen Arbeiten wird man manche der Gesichtspunkte, die Herr Isenkrahe einnimmt, bereits vorfinden. Ich führte damals die Begriffe „Anlauf“ und „Umlauf“ ein und sprach von Anläufen, welche um den Schnittpunkt konvergent, divergent und indifferent (in sich zurückkehrend) verlaufen. Herr Isenkrahe benutzt für die gleichen Begriffe die bereits erwähnten Bezeichungen „Brückenzickzack, Treppe, eckige Spirale“. — Da der Herr Verfasser bei Ausarbeitung seiner schon vor ca. 10 Jahren angekündigten Schrift die neueste mathematische Litteratur nicht eingesehen oder wenigstens meine umfangreichen einschlägigen Arbeiten völlig ignoriert hat, so blieb mir nichts anderes übrig, als auf dieselben selbst hinzuweisen.

Dr. Heymann.

Poggendorffs Biographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen u. s. w. aller Völker und Zeiten. III. Band (die Jahre 1858 bis 1883 umfassend). Herausgegeben von Dr. B. W. Feddersen und Prof. Dr. A. J v. Oettingen. Leipzig 1896 — 1898 bei Johann Ambrosius Barth. 15 Lieferungen. 1496 S.

Seit wir im 41. Bande dieser Zeitschrift, Hist.-litter. Abtlg. S. 181 bis 182, die erste Lieferung der Fortsetzung des längst klassisch gewordenen Poggendorffschen Wörterbuchs angezeigt haben, sind in ununterbrochener Reihenfolge weitere 14 Lieferungen erschienen, und hat mit der 15. Lieferung der Band abgeschlossen werden können. So ist das vorausgeschickte Programm nach jeder Richtung eingehalten worden, das deutlichste Zeichen,

wie umfassend die Vorbereitung des Bandes gewesen ist. Ein solches Werk liest man nicht, man benutzt es, und während des Benutzens kann man sich erst von der Zuverlässigkeit und Vollständigkeit überzeugen. Wir sind daher heute nur in der Lage, die Vollendung des Bandes zu melden und die Erklärung hinzuzufügen, dass mehrfache Stichproben uns mit grosser Befriedigung erfüllt haben.

Cantor.

Das Delische Problem von Prof. Ambros Sturm (Schluss). Programm des K. K. Gymnasiums Seitenstetten 1897. 42 S.

Mit der dritten Programmabhandlung hat Herr Sturm seine Untersuchungen über die Geschichte des Delischen Problems abgeschlossen, welche bei fortlaufender Seitenzählung von 1 bis zu 140 sich leicht zu einem kleinen Bändchen vereinigen lassen. Mit freudiger Überraschung hatten wir unsere Leser auf manches Neue hinweisen können, welches der Verfasser auf dem Felde, welches für längst abgegrast galt, zu finden und in den beiden ersten Abhandlungen mitzuteilen wusste. Einige Nachträge sind auch in der dritten Abhandlung vorhanden, zu welchen ein den meisten, wenn nicht allen Mathematikern unbekannt gebliebener Aufsatz von U. von Wilamowitz-Moellendorff, ein Weihgeschenk des Eratosthenes (Nachrichten der königl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen. Phil.-hist. Klasse 1894. Göttingen 1895) Veranlassung bot. Schade, dass Herr Sturm sein Programm erscheinen lassen musste, bevor im 4. Hefte 1897 dieser Zeitschrift Herons Kubikwurzelausziehung durch Maximilian Curtze bekannt gemacht worden ist. Sein Scharfsinn hätte sich an dem Rätsel des Heronischen Verfahrens erproben können. Den Hauptinhalt der dritten Abhandlung bildet die Geschichte des Delischen Problems in Indien und dem fernen Osten, bei den Arabern und in Europa seit der Zeit des Wiederaufblühens der Mathematik. Zu den Völkern des fernen Ostens, von deren erfolgreicher Beschäftigung mit mathematischen Aufgaben die allerletzten Jahre uns Kenntnis verschafft haben, gehören die Japaner, und Herr Sturm hat sich diese Vermehrung unseres Wissens nicht entgehen lassen. Von europäischen Arbeiten hat er solche des durch seine Beziehungen zu Galilei bekannten Paters Grienberger der Vergessenheit entrissen. Dieselben finden sich in einer Schrift über den Salomonischen Tempel von Js. B. Villalpandus, einem Ordensgenossen Grienbergers.

Cantor.

Bibliographie

vom 14. April bis 9. Juni 1898.

Periodische Schriften.

Arbeiten, die astronomisch-geodätischen, des kaiserl. und königl. militär-geographischen Institutes in Wien. Publikation für die internationale Erdmessung. 7., 10. und 11. Bd. Wien, Lechner.

7. Das Präzisions-Nivellement in der österreichisch-ungarischen Monarchie. 1. Theoretische Grundlagen und Ausführungsbestimmungen. M. 10.

10. Dasselbe. 3. Nordöstlicher Teil. M. 10.

11. Astronomische Arbeiten. 3. Längenunterschiedmessungen. Polhöhen und Azimut-Bestimmungen. M. 16.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-physik. Klasse. 1897. V u. VI. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1892. 48. Jahrg. 2. Abtlg. Physik des Äthers. Redigiert von Rich. Börnstein. Braunschweig, Vieweg und Sohn. M. 30.

Fortschritte der Physik, herausgegeben von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. Namenregister n. einem Sach-Ergänzungsregister zu Bd. 21 bis 43 (1865—1887). Bearbeitet von B. Schwalbe. 2. Hälfte. Berlin, Reimer. M. 24.

Jahrbuch des königl. sächs. meteorologischen Institutes. 1896. Zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1896. Beobachtungssystem des Königreichs Sachsen. Herausgegeben vom Dir. Paul Schreiber. Chemnitz, Bülz. 14. Jahrg. 2. Abtlg. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an der Station erster Ordnung Chemnitz im Jahre 1896. M. 5.

Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg. XIII. Stein, Jos., Die Regenverhältnisse von Marburg auf Grund 30jähriger Beobachtungen an der meteorologischen Station daselbst. Marburg, Elwert. M. 2. 80.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. Jahrgang 1897. 2 Bände. Prag, Řivnač. M. 12.

Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 69. Versammlung zu Braunschweig 1897. 1. Naturwissenschaftliche Abteilungen. Leipzig, Vogel. M. 5.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen in den Jahren 1895 und 1896. Berlin, Asher & Co. M. 3.

—— Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1896. Ebenda. M. 9.

Zeitschrift für komprimierte und flüssige Gase. Herausgegeben von M. Altschul. 2. Jahrgang. April 1898 bis März 1899. 12 Hefte. Weimar, Steinert. Halbjährlich M. 8.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, Mor., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. (Schluss-)Bd. 3. Abtlg. Die Zeit von 1727 bis 1758. Leipzig, B. G. Teubner. M. 12.

Häbler, Thdr., Über zwei Stellen in Platons Timäus und im Hauptwerke von Coppernicus. Programm. Grimma, Gensel. M. 1.

Reine Mathematik.

Baer, Karl, Die Kugelfunktion als Lösung einer Differenzengleichung. Programm. Berlin, Meyer & Müller. M. 1. 50.

Guthjahr, Wilh., Die Diakaustik des Kreises. Berlin, Gärtner. M. 1.

Kiepert, Ludw., Grundr. d. Differential- u. Integralrechn. 1. T. Differentialrechn. 8. Aufl. d. gleichn. Leitf. v. wl. Dr. M. Stegemann. Hannover, Hellwing. M. 12.

Klug, Leop., Die Konfiguration des Pascalschen Sechseckes im allgemeinen und in vier speziellen Fällen. Wien, Eisenstein. M. 3.

Salmon, George, Analyt. Geometrie d. Raumes. Deutsch v. Wilh. Fiedler. 1. T. Die Elem. u. d. Theorie d. Flächen 2. Grad. 4. Aufl. Leipz., B. G. Teubner. M. 8.

Schimpf, Ernst, Zur Definition der Konvergenz der unendlichen Reihen und der unendlichen Produkte. Programm. Berlin, Meyer & Müller. M. 1.

Thomae, J., Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 2. Aufl. Halle, Nebert. M. 9.

Angewandte Mathematik.

Bach, C., Elastizität und Festigkeit. 3. Aufl. Berlin, Springer. geb. M. 16.

Diesterwegs populäre Himmelskunde u. Mathem. Geographie. Neu bearb. v. M. W. Meyer unt. Mitwirk. v. B. Schwalbe. 19. Aufl. Hamburg, Grand. M 7.

Fuhrmann, Arwed, Anwend. der Infinitesimalrechn. in d. Naturw., im Hochbau und in d. Technik. Lehrb. u. Aufgabensamml. 3. Teil. Bauwissenschaft. Anwendungen d. Differentialrechnung. 1. Hälfte. Berlin, Ernst & Sohn. M. 5. 50.

Fulst, Otto, Azimuttafel. Tafel z. Bestimmung d. Azimuts aus Breite, Abweich. u. Stundenwinkel. Bremen, Heinsius Nachf. In Wachstuch kart. M. 2. 20.

Glinzer, E., Grundriss d. Festigkeitslehre. 2. Aufl. Dresden, Kühtmann. M. 2. 80.

Heun, Karl, Die Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes und der geraden Linie. Programm. Berlin, Gärtner. M. 1.

Johnson, A. C., Zur Bestimmung der Breite und Länge bei bewölktem Himmel und zu anderen Zeiten. Eingeführt bei der königl. grossbrit. Marine. Übers. von Thdr. Lüning. Berlin, Mittler & Sohn. M. —. 50.

Kants allgem. Naturgesch. u. Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung u. d. mechan. Ursprunge d. ganzen Weltgebäudes nach Newtonschen Grunds. abgeh. 1755. Herausg. von A. J. v. Oettingen. (Ostw. Klass. Nr. 12, neue Aufl.). Leipzig, Engelmann. M. 2. 40.

Landestriangulation, die königl. preuss. Abrisse, Koordinaten und Höhen sämtl. von d. trigonometrischen Abteilung d. Landesaufnahme bestimmten Punkte. 14. Tl. Regierungsbezirk Magdeburg. Berlin, Mittler & Sohn. kart. M. 10.

Nernst, W., u. Schönflies, A., Einführung in die mathem. Behandlung d. Naturwissensch. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechn. m. bes. Berücksichtigung der Chemie. 2. Aufl. München, Wolff. M. 9.

Nivellementsergebnisse, die, d. trigonom. Abtlg. der königl. preuss. Landesaufn. 7. Prov. Brandenburg. 10. Prov. Westfalen. 11. Prov. Hessen-Nassau u. d. Grossherzogt. Hessen 12. Rheinprovinz. Berlin, Mittler & Sohn. à M. 1.

Riem, J., Nettorechnungen auf Grundl. d. v. Dr. Zillmer ausgeglichenen Sterbetafel der 23 deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften f. normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung, zu 3% gerechnet und kontrolliert. Basel, Lendorff. geb. M. 3. 32.

Schubert, Herm., Mathem. Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufg. math. Natur. Leipzig, Göschen. M. 5.

Weisstein, Jos., Die rationelle Mechanik. 1. Bd. Statik. Dynamik des Punktes. Wien, Braumüller. M. 10.

Physik und Meteorologie.

Bendt, Frz., Techn. Aufsätze II. Die Hertzschen Versuche. Teslas Versuche. Schwachstrom u. Starkstrom. Die Ozeantelegraph. Die Herstellung d. elektr. Glühlampe (Meyers Volksb. Nr. 1191). Leipzig, Bibliogr. Institut. M. —. 10.

Bott, Paul, Graph. Darstell. elektr. Wechselströme. Progr. Berlin, Gärtner. M. 1.

Blümel, Ant., Über elektr. Entladungsfiguren auf photogr. Platten. Progr. Berlin, Gärtner. M. 1.

Grätz, L., Die Elektrizität u. ihre Anwend. 7. Aufl. Stuttg., Engelhorn. geb. M. 8.

Hiller, Jul., Physikalische Übungen und Aufgaben im Anschluss an den Unterricht. Berlin, Gärtner. M. 1.

Kerber, Arth., Beiträge zur Dioptrik. 4. Heft. Leipzig, Fock. M. —. 50.

Kerntler, Frz., Die Möglichk. einer experim. Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodyn. Grundges. Nachtr. zu der Abhandlg.: Die elektrodyn. Grundgesetze u. d. eigentl. Elementargesetz. Budapest, Selbstverl. M. —. 50.

Neumann, Karl, Die elektr. Kräfte. Darlegung u. genauere Betrachtung d. von hervorragenden Physikern entwickelten math. Theorien. 2. (Schluss-) Tl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.

Zenger, K. W., Die Meteorologie der Sonne u. das Wetter im Jahre 1888, zugl. Wetterprognose für das Jahr 1898. Prag, Řivnač. M. 2.

Zulkowski, Karl, Zur Erhärtungstheorie des natürlichen und künstlichen hydraulischen Kalkes. Berlin, Gärtner. M. 1. 20.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1897.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abelsche Transcendenten.

1. Sur les fonctions abéliennes. H. Poincaré. Compt. Rend. XXIV, 1407.
2. Sur une classe de fonctions hyperabéliennes. H. Bourget. Compt. Rend. CXXIV, 1428.
3. Sur les fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux variables. Ém. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 1490.
4. Zur Reduktion Abelscher Integrale auf elliptische. O. Biermann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 924.
5. Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere tre. Ern. Pascal. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 193.

Absolute Geometrie.

6. Sur une méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non Euclidienne. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, 112, 134, 158.
7. Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide. G. Lechalas. Mathesis, Sér. 2, VII, Supplément.
8. Sur la non-identité du plan Riemannien et de la sphère Euclidienne. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, Supplément.
9. Relations entre les distances de 5 et de 6 points en géométrie Euclidienne et en géométrie non-Euclidienne. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, Supplément.
10. Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique. V. Sikstel. Grun. Archiv 2. R. XV, 159, 403.
11. Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 93.

Ärodynamik.

12. Über die Wirkung des Windes auf schwach gewölbte Flächen. A. v. Obermayer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 963.
13. Contribution to the theory of the Robinson cup-anemometer. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 63.
14. Sur une nouvelle mesure du coefficient de viscosité de l'air. Ch. Fabry et A. Perot. Compt. Rend. CXXIV, 281.
15. The viscosity of mixed guses. W. Sutherland. Phil. Mag. Sér. 5, XL, 421.

Akustik.

16. Akustische Untersuchungen über die Elastizität weicher Körper. M. v. Smoluchowski. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 739.
17. Über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 1040.
18. On resultant tones. J. D. Everett. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 199.

Analytische Geometrie der Ebene.

19. Loci of the equations $p = \varphi^u e$ and $p = \varphi^u \psi^v e$. E. W. Hyde. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 122, 160.
20. Die Sekanten und Tangenten des Folium Cartesii. A. Himstedt. Grun. Archiv 2. R. XV, 129.

21. Kreuzcurve enveloppe d'une série d'hyperboles. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 257.
22. Une courbe oubliée, la conchoïde de R. de Sluse. G. Loria. Mathesis, Sér 2, VII, 5.
23. Une courbe du quatrième degré. Cristesco, Petresco, Bastin, J. Jonesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 145.
24. Sur une quartique se décomposant dans certains cas en deux ellipses. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 258.
25. Lieu d'un point dont les projections sur les côtés d'un quadrilatère donné remplissent certaines conditions. Gob, Colart, Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 206.
26. La tangente MA en un point M d'une courbe donnée rencontre une droite fixe en A. On porte sur cette droite fixe une longueur constante AN. Déterminer le point où la droite MN touche son enveloppe. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 168.
27. Sur la recherche de certains lieux géométriques. A. C. Mathesis, Sér. 2, VII, 110.
    Vergl. Determinanten 62, 63. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Normale. Parabel. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

28. Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen. K. Carda. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 787.
29. Zur Theorie der Kurven in analytischer Behandlungsweise. A. zur Kammer. Grun. Archiv 2. R. XV, 14.
30. Zur analytischen Kurventheorie. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 124.
31. Über die charakteristische Differentialgleichung der Raumkurven. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 244.
32. Die Krümmung der Raumkurven in singulären Punkten derselben. E. Wölffing. Grun. Archiv 2. R. XV, 146.
33. Erweiterung der Kurvenklasse von konstanter Krümmung. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 447.
34. Sur les congruences associées. C. Guichard. Compt. Rend. CXXIV, 669.
35. Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe. A. Demoulin. Compt. Rend. CXXIV, 1077.
36. Sur quelques applications de la théorie des systèmes cycliques. C. Guichard. Compt. Rend. CXXIV, 1079.
37. Sur une cubique gauche. E. Duporcq. Mathesis, Sér. 2, VII, 97.
    Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 19. Cubatur. Ellipsoid. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Tetraeder.

Astronomie.

38. Distances du système solaire. Delauney. Compt. Rend. CXXIV, 71. — E. Roger ibid. 219.
39. Remarque sur la méthode de Gauss pour la détermination des orbites des petites planètes. J. Perchot. Compt. Rend. CXXIV, 69.
40. Sur les quadratures mécaniques. B. Baillaud. Compt. Rend. XXIV, 737.
41. Sur la précision comparée de divers modes de repérage de la verticale dans les observations astronomiques, géodésiques ou topographiques. Ch. Lallemend. Compt. Rend. CXXIV, 941.
42. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXIV, 1259.
43 Sur le mouvement des péritélies de Mercure et de Mars et du noeud de Vénus. Simonin. Compt. Rend. CXXIV, 1423.
44. Zur Frage der Perihelsbewegung des Planeten Merkur. Ed. v. Haerdtl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 713.
45. Notiz betreffend die Säkularacceleration des Mondes. Ed. v. Haerdtl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 8.
46. Sur la désagrégation des comètes. Rôle de Jupiter à l'égard des comètes à courte période. O. Callandreau. Compt. Rend. CXXIV, 1193.

47. Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 145.
Vergl. Geschichte der Mathematik 156, 157.

B.

Bernoullische Zahlen.

48. Propriété des nombres de Bernoulli. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 94.

Bestimmte Integrale.

49. Sur les résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 433.
50. Ein Mittelwertsatz für ein System von n Integralen. G. Kowalewski. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 153.
Vergl. Elliptische Transcendenten 121. Reihen 353. Umkehrungsproblem.

C.

Combinatorik.

51. Sur les combinaisons. Barbette. Mathesis, Sér. 2, VII, 85. — Stuyvaert ibid. 227.
52. Une démcnstration du théorème de Wilson. A. Cayley. Mathesis, Sér. 2, VII, 163.
53. Sur la marche d'un pion du jeu de dames. R. H. Van Dorsten. Mathesis, Sér. 2, VII, 117.
54. Nombre des manières de décomposition d'un polygone de $(p-2)n+2$ côtés en n polygones de p côtés. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 164.
55. Über Nachbargebiete im Raum. P. Stäckel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 276.

Cubatur.

56. Sur la formule des trois niveaux. Goulard. Mathesis, Sér. 2, VII, 105.

Cylinderfunktionen.

57. Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes, tirées de la théorie des fractions continues. L. Crelier. Annali mat. Sér. 2, XXIV, 131.

D.

Determinanten.

58. Über Beziehungen zwischen den Determinanten einer Matrix. W. Ahrens. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 65. [Vergl. Bd. XLI Nr. 30.]
59. Sulle varie forme che possono darsi alle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare. Ern. Pascal. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 241.
60. Eine Determinantenformel. E. Schulze. Zeitschr. Math. Phys XLII, 313.
61. Démonstration de la propriété fondamentale des Wronskiens. A. Demoulin. Mathesis, Sér. 2, VII, 62.
62. Décomposition en facteurs rationnels d'un déterminant du troisième ordre. Hacken. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 232.
63. On Lagrange's determinantal equation Thom. Muir. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 220.

Differentialgleichungen.

64. Sur la réduction du problème général de l'intégration. Riquier. Compt. Rend. CXXIV, 490.
65. Sur l'intégration de certaines équations différentielles par des séries. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 214.
66. Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di Lagrange. Franc. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 339.
67. Sur les intégrales premières des systèmes différentiels. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIV, 136.
68. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires du troisième ordre. A. Boulanger. Compt. Rend. CXXIV, 1011.
69. Sur les singularités des équations aux dérivées partielles. J. Beudon. Compt. Rend. CXXIV, 671.

70. Sur la méthode des approximations successives de M. Picard. S. Zaremba. Compt. Rend. CXXIV, 554.
71. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Eman. Czuber. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 295.
72. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables. Catton. Compt. Rend. CXXIV, 744.
73. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, dont les deux systèmes de caractéristiques sont confondus. E. v. Weber. Compt. Rend. CXXIV, 1215.
74. Remarques sur une note récente de *M.* E. v. Weber. E. Goursat. Compt. Rend. CXXIV, 1294.
75. Zur Theorie der Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$ auf Grund der Kirchhoffschen Gleichung für das Huygens'sche Prinzip. J. Jung. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 278.
76. Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = F(u, x, y)$. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 1488.
77. Sur l'équation des télégraphistes. Le Roux. Compt. Rend. CXXIV, 143.
78. Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires par leur valeur sur une surface fermée. E. Le Roy. Compt. Rend. CXXIV, 1508.

Vergl. Geschichte der Mathematik 173. Mechanik. Oberflächen.

Differentialquotient.

79. Sur les différentielles successives d'une fonction de plusieurs variable. Moutard. Compt. Rend. CXXIV, 603. — E. Goursat ibid. 676.

Dreiecksgeometrie.

80. Théorèmes sur le triangle. Franc. Ferrati. Mathesis, Sér. 2, VII, 241.
81. Sur la ligne d'Euler d'un triangle. Francq, Colette, Déprez, Seligmann. Mathesis, Sér. 2, VII, 71.
82. Sur la ligne d'Euler dans le cas qu'un des angles du triangle est de 60° ou de 120°. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 77.
83. Sur le point de Tarry et le point de Steiner d'un triangle. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 174.
84. Quatre cercles par rapport auxquels l'orthocentre d'un triangle est d'égale puissance. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 73.
85. Konstruktion der Trägheitsaxen eines Dreiecks. O. Richter. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 338.
86. Sur le centre des transversales angulaires égales. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 156. [Vergl. Bd. XLII Nr. 93.]
87. Théorème sur les triangles rectangles sur la même hypoténuse. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 234.
88. Propriétés d'un triangle sur les côtés duquel on construit extérieurement des rectangles semblables. P. Bastin. Mathesis, Sér. 2, VII, 21.

E.

Elastizität.

89. Zum Gesetz der elastisch. Dehnungen. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 327.
90. Das Potential der inneren Kräfte und die inneren Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. Jos. Finger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 163, 231.
91. Einige Bemerkungen zu Herrn Jos. Fingers Abhandlung „Das Potential der inneren Kräfte u. s. w." W. Voigt. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1069.
92. Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und dem zugehörigen Spannungen in aeolotropen und isotropen Substanzen. Jos. Finger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1073.
93. Étude de variations d'énergie. Vaschy. Compt. Rend. CXXIV, 284.

Elektrizität.

94. Généralisation de formules d'électromagnetisme. Vaschy. Compt. Rend. CXXIV, 226. [Vergl. Bd. XLII Nr. 512.]
95. On the electro-magnetic theory of moving charges. W. B. Morton. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 488. — J. Larmor ibid. XLII, 201.
96. On the magnetic force acting on moving electrified spheres. Arth. Schuster. Phil. Mag Ser. 5, XLIII, 1.
97. Über eine neue Folgerung aus der Maxwellschen Theorie der elektrischen Erscheinungen. A. Scheye. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 157.
98. On the wave-surface and rotation of polarization plane in an aelotropic electromagnetic medium. A. McAulay. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 224.
99. Schwingungsvorgang in komplizierten Erregern Hertz'scher Wellen. Jos. v. Geitler. Wien. Akad. Ber (Abtlg. IIa) CIV, 169.
100. Strömung der Elektrizität in Rotationsflächen. Leonh. Fleischmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 227.
101. The relation between the atom and the charge of electricity carried by it. J. J. Thomsen. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 511; XLI, 51.
102. Über die elektrolytische Leitfähigkeit von wässerigen Lösungen, insbesondere deren Abhängigkeit von der Temperatur. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIX, 408.
103. Über die wechselseitige Induktion zweier auf Kugelschalen gleichmässig gewickelter Windungslagen. Osc. Singer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 165.
104. Zur Theorie der Dielektrica. Ant. Lampa. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 681.
105. Über die Bestimmung der Dielektrizitätskonstante eines anisotropen Stoffes nach einer beliebigen Richtung aus den Dielektrizitätskonstanten nach den Hauptrichtungen. Ant. Lampa. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 1179.
106. On the passage of electric waves through tubes, or the vibrations of dielectric cylinders. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 125.
107. A method of determining the angle of lag Arth. L. Clark. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 369.
108. On the measurement of alternate currents by means of an obliquely situated galvanometer needle, with a method of determining the angle of lag. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 343.
109. Sur les moteurs asynchrones. A. Potier. Compt. Rend. CXXIV, 538, 642.
110. A theory of the synchronous motor. W. G. Rhodes. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 56, 195.
111. Admittance and impedance loci. Fred. Bedell. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 300.
112. Discussion of the currents in the branches of a Wheatstones bridge, where each branch contains resistance and inductance, and there is an harmonic impressed electromotive force. A. C. Crehore and G. O. Squier. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 161.
113. Sur la décharge des conducteurs à capacité, résistance et coefficient de self-induction variables. M. Pétrovitch. Compt. Rend. CXXIV, 452.
114. Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre. W. Trabert. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1023.

Ellipse.

115. Über die Ellipse vom kleinsten Umfange durch 3 gegebene Punkte. V. v. Dantscher. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 301. [Vergl. Bd. XXXVII Nr. 449.]
116. Résumé des propriétés concernant les triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 88. [Vergl. Bd. XLI Nr. 65.]
117. Sur une génération connue de l'ellipse. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 247.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 24. Normalen 284, 285.

Ellipsoid.

118. Relations entre trois demi-diamètres d'un ellipsoïde. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 252.
119. Sur l'enveloppe d'un ellipsoide variable. Mandart. Mathesis, Sér. 2, VII, 198.

Elliptische Transcendenten.

120. La moltiplicazione complessa per $\sqrt{-23}$ delle funzioni ellittiche. Franc. Brioschi. Annali mat. Ser 2, XXIV, 335.
121. Sur une formule d'analyse relative à certaines intégrales de fonctions elliptiques par rapport à leur module. F. de Salvert. Compt. Rend. CXXIV, 1008.

Vergl. Abelsche Transcendenten 4.

F.

Faktorenfolge.

122. Sur un produit de n facteurs. A. Boutin, G. Bergmans, Audibert. Mathesis, Sér. 2, VII, 236.

Formen.

123. Bemerkungen zu der ausnahmslosen Auflösung des Problems, eine quadratische Form durch eine lineare orthogonale Substitution in eine Summe von Quadraten zu verwandeln. Ad. Kneser. Grun. Archiv 2. R. XV, 225.
124. Über die Komposition der binären quadratischen Formen. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 103.
125. Über die Laméschen Polynome 2. Ordnung einer Form 5. Ordnung. Em. Waelsch. Wien Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 741.

Funktionen.

126. Sur les opérations en général. C. Bourlet. Compt. Rend. CXXIV, 348.
127. Sur la convergence des substitutions uniformes. E. M. Lémeray. Compt. Rend. CXXIV, 1220.
128. Über einen Satz der Funktionentheorie und seine Anwendung auf isothermische Kurvensysteme und auf einige Theorien der mathematischen Physik. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 217.
129. Sur les propriétés des fonctions entières. Desaint. Compt. Rend. CXXIV, 746.
130. Über Zahlenteiler ganzer Funktionen. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 214.
131. Sur les zéros de certaines fonctions analytiques. Desaint. Compt. Rend. CXXIV, 276.
132. Über die Transcendenz der Zahlen e und π. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 839.
133. Über die Differentiation empirischer Funktionen. C. Runge. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 205.
134. Remarks upon the analytical representation of the periodic system of the elements. A. Goldhammer. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 277.
135. Sur certaines équations analogues aux équations différentielles. C. Bourlet. Compt. Rend. CXXIV, 1431. — Appell ibid. 1433.
136. Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes. Autonne. Compt. Rend. CXXIV, 139.
137. Über eine von Abel untersuchte Funktionsgleichung. P. Stäckel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 323.

Vergl. Abelsche Transcendenten. Bernoullische Zahlen. Bestimmte Integrale. Combinatorik. Cylinderfunktionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Faktorenfolge. Formen. Gleichungen. Imaginäres. Kettenbrüche. Logarithmen. Maxima und Minima. Reihen. Substitution. Thetafunktionen. Transformationsgruppen. Umkehrungsproblem.

G.

Geodäsie.

138. Über das Einstellen der dreiteiligen Fluchtpunktschiene. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 99.

Geometrie (descriptive).

139. Eine Aufgabe aus der Schattenlehre. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 111.
140. Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (durch Konstruktion der Isophengen). Jul. Mandl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 807.
Vergl. Perspektive.

Geometrie (höhere).

141. Eine Methode, aus gegebenen Konfigurationen andere abzuleiten. Konr. Zindler. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 311.
142. Zur perspektivischen Lage kollinearer ebener Felder. Kilbinger. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 104.
143. Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie. F. Amodeo. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 1 [Vergl. Bd. XL Nr. 97.]
144. Über einen symbolischen Kalkul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung. Em. Weyr. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 365.
145. Die homogenen Koordinaten als Wurfkoordinaten. G. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 1166.
146. Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugelsysteme. O. Rupp. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 623.
147. Zur Konstruktion von Krümmungskugeln an Raumkurven. J. Sobotka. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 144.
148. Über die kubischen Raumkurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten kubischen Raumkurve in 4,5 oder 6 Punkten berühren. Gust. Kohn. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 1035.
149. Zu den Bemerkungen über doppeltcentrische Vierecke. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 63. [Vergl. Bd. XLI Nr. 97.]
150. Der kubische Kreis mit Doppelpunkt. Chr. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 281.
151. Théorèmes sur les triangles trihomologiques. H. Van Aubel. Mathesis, Sér. 2, VII, 53.
152. Sur un rapport anharmonique de valeur constante. R. Buysens et Sollertinsky. Mathesis, Sér. 2, VII, 101.
153. Sur la cubique $\frac{y^2}{a^2} = \frac{x}{ka - x}$. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 74.
154. Über Kurven 5. Ordnung mit 4 Doppelpunkten. J. de Vries. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 46.
155. Lieu des points d'inflexion des courbes $y = \cos\sqrt{a^2 - x^2}$ lorsque a varie. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 236.
Vergl. Absolute Geometrie. Mehrdimensionale Geometrie.

Geschichte der Mathematik.

156. Die Apisperiode der alten Ägypter. Ed. Mahler. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa). CIII, 832.
157. Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodos gefundene astronomische Inschrift. Norb. Herz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1135.
158. Die Schlussaufgabe in Diophant's Schrift über Polygonalzahlen. G. Wertheim. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist. litter. Abtlg. 121.
159. Quadrat- und Kubikwurzeln bei den Griechen nach Herons neu aufgefundenen *Μετρικά*. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist. litter. Abtlg. 113; ebenda nicht paginiertes Blatt.
160. Die Quadratwurzelformel des Heron bei den Arabern und bei Regiomontan und damit Zusammenhängendes. M. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist. litter. Abtlg. 145.
161. Sur le sens exact du mot „al-djebr" Carra de Vaux. Biblioth. math. 1897, 1.
162. Einige Beiträge zur Geschichte der arabischen Mathematiker und Astronomen. H. Suter. Biblioth. math. 1897, 83.
163. Die Mathematik bei den Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1897, 13, 35, 73, 103. [Vergl. Bd. XLII Nr. 170.]

164. Magister Robertus Anglicus in Montepessulano. P. Tannery. Biblioth. math. 1897, 3.
165. Sur le mot „theca". G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 95.
166. Sur les neuf „limites" mentionnés dans l'Algorismus de Sacrobosco. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 97.
167. Sur le nom de la „regula coeci". Carra de Vaux. Biblioth. math. 1897, 32.
168. Eppur si muove. G. Berthold. Zeitschr. Math. Phys. XLII Hist. litter. Abtlg. 5.
169. Über den angeblichen Ausspruch Galileis „Eppur si muove". G. Berthold. Biblioth. math. 1897, 57.
170. Éditions de John Wilkins, The discovery of a world in the moon de 1638 et de 1640. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 95.
171. Versiera, Visiera e Pseudo-versiera. G. Loria. Biblioth. math 1897, 7, 33.
172. Sur les lettres de Léonard Euler à Jean I Bernoulli. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 51.
173. Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coeffecients constants. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 43.
174. Sur Jean Henry Bürmann. M. Cantor. Biblioth. math. 1897, 31.
175. Sur le séjour du général Poncelet à Saratow. G. Bapst. Compt Rend. CXXIV, 1135.
176. Sur Wolfgang et Jean Bolyai. P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, 194.
177. Inauguration du monument de N. Lobatschevsky à Kazan. G. Darboux. Compt. Rend. CXXIV, 936.
178. Cinquantième anniversaire de la nomination de Mr. Faye à l'Académie (25. I. 1897). A. Chatin. Compt. Rend. CXXIV, 165. — Faye ibid. 167
179. Wilhelm Schrentzel † 26. I. 1896. Ludwig Schlesinger. Zeitschr. Math. Phys. XLII. Hist. litter. Abtlg. 1.
180. Benj. Gould (27. XI. 1824 – 26. XI. 1896). Loewy. Compt. Rend. CXXIV, 57.
181. Mort de Weierstrass (31. X. 1815 — 19. II. 1897). Mathesis, Sér. 2, VII, 62.
182. Notice sur Weierstrass. Hermite. Compt. Rend. CXXIV, 430
183. Karl Weierstrass. M. d'Ocagne. Mathesis, Sér. 2, VII, Supplément.
184. J. J. Sylvester (3. IX. 1814 — 15. III 1897). P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, VII, 245.
185. Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule zu München. A. v. Braunmühl. Biblioth. math. 1897. 113.
186. Über die neuesten mathemat.-bibliograph. Unternehmungen. G. Eneström. Biblioth. math. 1897, 65.
187. Internationaler Mathematiker-Kongress in Zürich 1897. Zeitschr. Math. Phys. XLII. Hist. litter. Abtlg. 73. Vergl. Cubatur. Rechnen 347.

Gleichungen.

188. Über die Fundamentalgleichungen eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 5.
189. Sur la transformation des équations algébriques. F. Brioschi. Compt. Rend. CXXIV, 661.
190. Über das Problem der Winkelhalbierenden. A. Korselt. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 304.
191. Condition de réalité des racines de l'équation du 3e degré dont dépend la résolution d'un triangle connaissant le rayon du cercle circonscrit, la surface et celle du triangle formé par les centres des cercles ex-inscrits. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 230.
192. Zerlegung der Gleichung 4. Grades. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 60, 112.
193. Die Transformation und Auflösung der Gleichung 5. Grades in elementarer Darstellung. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 81, 113.
194. Résolution d'un système de trois équations cubiques. V. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 260.
195. Condition nécessaire pour qu'un système de 3 équations homogènes admette une solution autre que $x=y=z=0$. Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 211. — Delahaye ibid. 212.

Graphisches Rechnen.

196. The radial cursor; a new addition to the slide-rule. F. W. Lanchester. Phil. Mag Ser. 5, XLI, 52.
197. Anwendung der Integralkurve zur Volumteilung. E. Brauer. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 272.
198. Sur un procédé d'intégration graphique des équations différentielles. M. Petrovitch. Compt. Rend. CXXIV, 1081.

H.

Hydrodynamik.

199. Expression des petites composantes transversales de la vitesse dans les écoulements graduellement variés des liquides. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIV, 1411.
!00. Parties tournantes des composantes transversales de la vitesse, dans un écoulement permanent graduellement varié. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIV, 1492.
!01. On an error in the method of determining the mean depth of the ocean from the velocity of seismic sea-waves. Ch. Davison. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 33.
'02. Applications of physics and mathematics to seismology. C. Chree. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 173.
03. Über die innere Reibung der Lösungen. Gust. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 251. [Vergl. Bd. XLI Nr. 425.]
04. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. R. Liouville. Compt. Rend CXXIV, 72. [Vergl. Bd. XLII Nr. 599.]
05. High tensions in moving liquids. W. Sutherland. Phil. Mag. Sér. 5, XLII, 111.
06. Écoulement graduellement varié des liquides dans les lits à grande section; équations fondamentales. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIV, 1196.
07. Vérification expérimentale de la théorie de l'écoulement graduellement varié dans les canauxdécouverts. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXIV, 1327.

Hyperbel.

)8. On a method of drawing hyperbolas G. J. Burch. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 72. — F. L. O. Wadsworth ibid. 372.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 21. Dreiecksgeometrie 88. Parabel 324.

I.

Imaginäres.

›9. Strecken- und Punktrechnung, insbesondere die Rechnung mit parallelen Strecken. Fr. Graefe. Grun. Archiv 2. R. XV, 34.
0. Sur les systèmes de nombres complexes. E. Cartan. Compt. Rend. CXXIV, 1217.
1. Sur les systèmes reels de nombres complexes. E. Cartan. Compt. Rend. XXIV, 1296.

Interpolation.

2. Sur l'interpolation. Em. Borel. Compt. Rend. CXXIV, 673.

K.

Kegelschnitte.

3. Équation focale des coniques. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 193.
4. Axes de symétrie des coniques. Équation du couple des asymptotes. H. Mandart. Mathesis, Sér. 2, VII, 38.
5. Über orthoaxiale Kegelschnitte. Alfr. Salomon. Grun. Archiv 2. R., XV, 1.
6. Sur les cordes de courbure concourantes dans les coniques. Cl. Servais. Mathesis, Sér. 2, VII, 222.
7. Propriété focale des coniques à centre. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 195.
3. Sur une conique inscrite on circonscrite à un triangle. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 63, 81.
9. Sur les coniques circonscrites à un triangle. A. Krahe. Mathesis, Sér. 2, VII, 33.

220. Relation entre les perpendiculaires qu'on abaisse de chaque point d'une conique sur les côtés d'un triangle rectangle. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 272.
221. Sur les triangles semiconjugués. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 59. — Retali ibid. 142. — Lorent ibid. 142.
222. Une propriété des coniques. J. Wasteels. Mathesis, Sér. 2, VII, 13.
223. Propriété des coniques. E. Buisseret. Mathesis, Ser. 2, VII, 122.
224. Extension aux coniques d'une propriété de cercles remarquée par M. Mannheim. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 16. — Droz-Farny ibid. 87.
225. Conique lieu du point de rencontre des côtés non parallèles d'un trapèze de base fixe en grandeur et position, de hauteur constante et dont les diagonales sont rectangulaires. Retali etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 173.
226. Intersection d'une conique avec une ou deux circonférences. A. Gob. Mathesis, Sér. 2, VII, 202.
227. Cercle orthoptique mutuel de deux coniques homofocales. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 227.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

228. Sur les fractions continues. Mme. Prime. Mathesis, Ser. 2, VII, 108.
229. Développement de $\sqrt{x}$ en fraction continue. A. Boutin. Mathesis, Ser. 2, VII, 8.
230. Réduire $\sqrt{a^2-2}$ en fraction continue périodique. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 101.

Vergl. Cylinderfunktionen.

Kinematik.

231. Ein Beitrag zur Kinematik der Ebene. Friedr. Procházka. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. II a), CIV, 605.
232. Die kinematische Theorie der Hyperboloidenreibungsräder. Fr. Schilling. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 37.

Kreis.

233. Sur les cercles radicaux et antiradicaux. J. J. Duran Loriga. Mathesis, Sér. 2, VII, 189. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 235.]
234. Über Radikalkreise. J. Duran Loriga. Grun. Archiv 2. R. XV, 117, 232.
235. Tangentes communes à deux cercles. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 194.
236. Cercle tangent à trois autres. L. Gérard. Mathesis, Sér. 2, VII, 248.
237. Sur quatre cercles tangents deux à deux. Mathot. Mathesis, Sér. 2, VII, 193.
238. Sur deux points d'un triangle décrivant conjointement des circonférences. Droz-Farny etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 235.
239. Théorème sur deux circonférences. J. Jonesco etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 147. Vergl. Dreiecksgeometrie 84.

Kristallographie.

240. Über die Symetrieverhältnisse der Kristalle. V. v. Lang. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. II a), CV, 362.
241. On the use of the globe in the study of crystallography. J. Y. Buchanan. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 153.

L.

Logarithmen.

242. Druckfehler in S. Gundelfinger — A. M. Nells Tafeln zur Berechnung 9stelliger Logarithmen. Jos. Blater. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 64.

M.

Magnetismus.

243. On magnetic tractive force. E. Tayl. Jones. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 153.
244. On the effects of magnetic stress in magnetostriction. H. Nagaoka and E. Tayl. Jones. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 454.

245. Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes. Max Jüllig. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 691.
246. The magnetic field of any cylindrical coil. W. H. Everett. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 367.
247. On the magnetic field due to an elliptical current at a point in its plane within it. J. Vir. Jones. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 107.
248. On the possibility of explaining the phenomena of magnetism by the hypothesis of participation of matter in the motion of the magnetic field. B. Rosing. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 314.

Maxima und Minima.

249. Maximum de $xy+yz+zx$ sachant que $x+y+z=2p$. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 271.
250. Sur certaines aires minima. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 45.
Vergl. Ellipse 115, 116.

Mechanik.

251. On the laws of irreversible phenomena. Lad. Natanson. Phil. Mag. XLI, 385.
252. The hypotheses of abstract dynamics and the question of the number of the elastic constants. J. G. MacGregor. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 240.
253. Herleitung des Gesetzes vom Kräfteparallelogramm aus der Bewegung eines Körpers im widerstehenden Mittel und Aufstellung einer allgemeinen Gleichung für dynamische Kraftwirkung. Th. Schwartze. Grun. Archiv 2. R. XV, 421.
254. Über die Transformation des Zwanges in allgemeinen Koordinaten. A. Wassmuth. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 281.
255. Von der elliptischen Bewegung eines freibeweglichen Massenpunktes unter der Wirkung von Attraktionskräften. P. Kindel. Grun. Archiv 2. R. XV, 262.
256. Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica. G. Di Pirro. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 315.
257. Über quadratische Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik. P. Staeckel. Annali mat. Sér. 2, XXV, 55.
258. Sur les intégrales premières de la Dynamique et sur le problème des n corps. P. Painlevé. Compt. Rend., CXXIV, 173.
259. Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIV, 221.
260. Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique. T. Lévi-Civita. Compt. Rend. CXXIV, 392. — Appell ibid. 395.
261. Sulla trasformazioni della equazioni dinamiche. T. Lévi-Civita. Annali mat. Sér. 2, XXIV, 255.
262. Sur une classe de ds^2 à trois variables. T. Lévi-Civita. Compt. Rend. CXXIV, 1434.
263. Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems. Ed. Weyr. Wien Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 292.
264. Les solutions périodiques et le principe de moindre action. H. Poincaré. Compt. Rend CXXIV, 713.
265. Sur les petits mouvements périodiques des systèmes. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIV, 1222.
266. Sur les petits mouvements périodiques des systèmes à longue période. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXIV, 1340.
267. Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici. V. Volterra. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 29.
268. Ein mechanisches Polycykel als Analogon der Induktionswirkungen beliebig vieler Kreisströme. F. Hasenoehrl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CV, 900.
269. Über einen Satz der Satik. K. Th. Vahlen. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 160.
270. Über ein Problem der Mechanik. A. Karl. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 105.
271. Beiträge zur Theorie der ebenen Gelenkvierecke. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 247.
272. Grundzüge einer Grapho-Ballistik auf Grund der Kruppschen Tabelle. C. Cranz. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 183.

273. Aufgabe über Druckverhältnisse im Innern eines durch einen gewölbten Boden abgeschlossenen Hohlcylinders. C. B. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 280.
274. Über Schraubengeschwindigkeiten eines festen Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen. P. Somoff. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 133, 161.
275. Sur le rendement des engrenages. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXIV, 1225.
276. Sur l'action locomotrice des membres antérieurs du cheval. P. Le Hello. Compt. Rend. CXXIV, 913.

Vergl. Aerodynamik. Akustik. Astronomie. Differentialgleichungen 75. Elastizität. Elektrizität. Funktionen 128. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Molekularphysik. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre. Wellenbewegung. Winkelteilung 416.

Mehrdimensionale Geometrie.

277. Sur l'emploi de l'espace à quatre dimensions dans l'étude des surfaces algébriques admettant plusieurs séries de coniques. Eug. Cosserat. Compt. Rend. CXXIV, 1004.
278. Sulla equazione $\Delta_2 U + k^2 U = 0$ in uno spazio di n dimensioni. R. Marcolongo. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 301.

Molekularphysik.

279. Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft. L. Boltzmann. Wien. Akad Ber. (Abtlg. IIa), CV, 907.
280. Molecular force and the surface-tension of solutions. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 477.
281. On the variation of the dissociation coefficient with temperature. S. Roslington Milner. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 286.

N.

Normalen.

282. Lieu d'un point tel que les trois normales menées de ce point à une parabole donnée jouissent de certaines propriétés. Cristescu. Mathesis, Sér. 2, VII, 19. — Déprez ibid. 20.
283. Propriété des deux autres normales menées à une parabole d'un point quelconque d'une normale fixe. A. Gob et Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 124.
284. Construction d'une normale à une ellipse. P. Bastin et Cl. Servais. Mathesis, Sér. 2, VII, 120.
285. Lieu se rapportant au quatre normales menées d'un point variable à une ellipse donnée. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 68, 109.

O.

Oberflächen.

286. Sur la théorie des surfaces. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 451.
287. Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la Géométrie de situation et sur les intégrales de différentielles totales. Em. Picard. Compt. Rend. CXXIV, 532.
288. Sur la théorie générale des surfaces. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 739.
289. Sur les systèmes de surfaces orthogonales et isothermes. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 552.
290. Sur les surfaces ayant même représentation sphérique. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 1291.
291. Sur les surfaces isométriques. A. Pellet. Compt. Rend. CXXIV, 1337.
292. Nuove ricerche sulle superficie pseudo-sferiche. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 347.
293. Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica. G. Castelnuovo. Annali mat. Ser. 2, XXV, 235.
294. Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche. C. Segre. Annali mat. Ser. 2, XXV, 1.
295. Sulla riduzione delle singolarità di una superficie algebrica per mezzo di trasformazioni birazionali dello spazio. M. Pannelli. Annali mat. Ser. 2, XXV, 67.
296. Die singulären Punkte der Flächen. E. Wölffing. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 14.

297. Regelfläche, deren Striktionslinie auch Krümmungslinie ist. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 250.
298. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées. Hadamard. Compt. Rend. CXXIV, 1503.
299. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali. Rem. Banal. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 213.
300. Das erweiterte Theorem von Bour. F. Ebner. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 215.
301. Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. K. Bobek. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 187.
302. Sur la déformation de certains paraboloïdes et sur le théorème de M. Weingarten. Eug. Cosserat. Compt. Rend. CXXIV, 741.
303. Sulle intersezioni di tre superficie algebriche. L. Berzolari. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 165.
304. Einige Konstruktionen bezüglich der Schnittkurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen. J. Sobotka. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 371.
305. Sur les surfaces qui peuvent, dans plusieurs mouvements différents, engendrer une famille de Lamé. Eug. Cosserat. Compt. Rend. CXXIV, 1426. — Darboux ibid. 1428.
306. Sur les centres de gravité des surfaces parallèles à une surface fermée. Ern. Duporcq. Compt. Rend. CXXIV, 492.
307. Aufgabe über ein Kugelballon-Netz. S. Finsterwalder. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 63.
308. Una questione geometrica. Gem. Pirondini. Annali mat. Ser. 2, XXV, 61.
Vergl. Absolute Geometrie 7, 8, 11.

Oberflächen zweiter Ordnung.

309. Über das Kriterion der Koaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung. Jos. Finger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1061.
Vergl. Ellipsoid.

Optik.

310. On the longitudinal component in light. G. Fr. Fitz Gerald. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 260.
311. Longitudinales Licht. G. Jaumann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 747.
312. Graphical method for finding the focal lengths of mirrors and lenses. Edw. H. Barton. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 59.
313. Graphical method for lenses. R. S. Cole. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 216.
314. On a simple geometrical construction for finding the intensity of illumination at any point of a plane due to a small source of light symmetrical about an axis perpendicular to that plane. Ch. H. Lees. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 463.
315. On the relation between the brightness of an object and that of its image. W. T. A. Emtage. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 504.
316. Über die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens. J.v.Hepperger. Wien. Akad Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 189.
317. On the theory of optical images with special reference to the microscope. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 167. — G. Johnst. Stoney ibid. 332, 423, 499; XLIII, 139, 273, 368. [Vergl. Nr. 360.]
318. Die Laplacesche und die Salmonsche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem. H. Buchholz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 863.
319. On the division of energy in the emission-spectrum of a black body. W. Wien. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 214.
320. On the resolving power of telescopes and spectroscopes for lines of finite width. F. L. O. Wadsworth. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 317.
321. Über den Einfluss der selektiven Absorption auf die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. J. v. Hepperger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 173.
Vergl. Elektrizität 98.

P.

Parabel.

322. Propriétés de la parabole. E. Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 25.
323. Théorèmes sur la parabole. E. N. Barisien. Mathesis, Sér. 2, VII, 272.

324. On considère les paraboles dont l'axe passe par un point donné P et qui touchent une droite donnée AB au même point A. Le foyer décrit une hyperbole équilatère, la tangente au sommet enveloppe une parabole. Droz-Farny. Libert. Mathesis, Sér. 2, VII, 276.
325. Parabole enveloppe de la hauteur d'un triangle variable. A. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 142. — Barisien ibid. 144.
326. Parabole enveloppe d'une droite. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 212.
327. Lieu des sommets de paraboles tangentes à deux normales rectangulaires d'une parabole donnée et ayant le même foyer que cette conique. R. Buysens. Droz-Farny. Mathesis, Sér. 2, VII, 255.
328. Cardioïde lieu des foyers des paraboles tangentes à une hypocycloide. Gob. Mathesis, Sér. 2, VII, 256.

Vergl. Dreiecksgeometrie 88. Normalen 282, 283.

Perspektive.

329. Zur Perspektive des Kreises. Rud. Schüssler. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 107. [Vergl. Bd. XLI Nr. 207 und 208.]

Planimetrie.

330. Résumé de la théorie de l'équivalence. L. Gérard. Mathesis, Sér. 2, VII, 265.
331. Une nouvelle démonstration du postulatum d'Euclide. J. M. Joubin. Mathesis, Sér. 2, VII, 225. — P. Barbarin, Sollertinsky ibid. 266.
332. Trois droites concourent en un même point. Collette, Gob, Kompers. Mathesis, Sér. 2, VII, 69. — J. Jonesco, Mandart, Déprez ibid. 70.
333. Théorème sur les bissectrices d'un angle et de son supplément. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 271.
334. Sur 5 droites qui concourent dans un même point chaque fois qu'un angle est arc tg 2. E. Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 77.
335. Sur le théorème relatif au carré de l'hypoténuse et le cinquième postulat d'Euclide. V. Reyes. Mathesis, Sér. 2, VII, 86.
336. Construire un triangle ABC, connaissant AB, AC et sachant que l'angle $C = 2B$ ou $C = 3B$. Colart. Droz-Farny etc. Mathesis, Ser. 2, VII, 171.
337. Sur un triangle tirant son origine d'un triangle équilatéral ABC en prenant sur ces côtés des segments $AM = x$, $BN = 2x$, $CP = 3x$ et réunissant M, N, P. H. Mandart. Mathesis, Sér. 2, VII, 98.
338. Sur les pseudocarrés. J. Jonesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 48.
339. Construction d'un pseudocarré connaissant un côté et les angles adjacents. Droz-Farny etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 209.
340. Sur trois quadrilatères dont deux dérivent du troisième. Bastin. Mathesis, Sér. 2, VII, 119.
341. Construction du pentagone régulier. A. Cayley. Mathesis, Sér. 2, VII, 194.
342. Théorème sur l'hexagone inscrit à un cercle et tel que trois diagonales qui joignent des sommets opposés concourent en un même point. E. Mathot. Mathesis, Sér. 2, VII, 139.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Gleichungen 190, 191.

Potential.

343. Über eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Greenschen Wirkungsgesetzes. W. Wirtinger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 575.
344. Sur le problème de Dirichlet. S. Zaremba. Compt. Rend. CXXIV, 940.

Vergl. Elastizität. Elektrizität. Magnetismus. Wärmelehre.

Q.

Quadratur.

345. Aire d'une courbe fermée engendrée à l'aide d'une cissoide. Mandart. Mathesis, Sér. 2, VII, 199. — J. Neuberg ibid. 201.

R.

Rechnen.

346. Sur la définition de la multiplication. A. Listray. Mathesis, Sér. 2, VII, 17. [Vergl. Bd. XLII Nr. 343.]
347. La multiplication egyptienne et russe. Plakhovo. Mathesis, Sér. 2, VII, 86.

348. Sur les calculs approchés. L. Gérard. Mathesis, Sér. 2, VII, 248.
Vergl. Wurzelausziehung. Zinseszins.

Reihen.

349. Über den Konvergenzkreis der umgekehrten Reihe. O. Stolz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 485.
350. Théorème sur les séries entières. Hadamart. Compt. Rend. CXXIV, 492.
351. Remarques utiles dans les calculs de limites. E. Cesaro. Mathesis, Sér. 2, VII, 177.
352. Sur les séries de Taylor. Eug. Fabry. Compt. Rend. CXXIV, 142. [Vergl. Bd. XLII Nr. 687.]
353. Studie zu Raabes Monographie über die Jacob-Bernoullische Funktion. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 1.
354. Si $Q_{n,p}$ désigne la somme des produits p à p des fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}$ on a la formule $\sum_{p=1}^{p=n} 2p\,Q_{n,p} = \frac{1}{2}(n^2 + 3n)$. Audibert. Mathesis, Sér. 2, VII, 276.
355. Sur deux séries convergentes. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 42.
356. Über Dirichlets Reihen. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 1093, 1158.
357. Die Summierung einer Gattung trigonometrischer Reihen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XV, 255.
358. The development of arbitrary functions. J. Perry and H. F. Hunt. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 506.
359. On the convergency of Fourier's series. W. Williams. Phil. Mag. Ser 5, XLII, 125.
360. On the general extension of Fourier's theorem. Thom. Preston. Phil. Mag. Sér. 5, XLIII, 281, 458. [Vergl. Nr. 316.)
361. Systeme von arithmetischen Reihen n^{ter} Ordnung. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 332.
362. Sur quelques progressions arithmétiques. Mathesis, Sér. 2, VII, 14.
363. Sur une formule de Newton. E. Lampe. Mathesis, Sér. 2, VII, 109.
364. Sur quelques formules qui représentent par approximation l'arc dont on connait les sinus et le cosinus. E. Lampe. Mathesis, Sér. 2, VII, 129, 153, 183.
365. Eine besondere Gattung goniometrischer Nulldarstellungen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XV, 431.
Vergl. Abelsche Transcendenten 5. Interpolation.

S.

Schwerpunkt.

366. Sur le centre de gravité de l'aire limitée par une courbe fermée donnée et une certaine autre courbe fermée variable. Gob. Mathesis, Sér. 2, VII, 229.
Vergl. Oberflächen 306.

Stereometrie.

367. Démonstration nouvelle relative à la perpendiculaire à un plan. Dubonis. Mathesis, Sér. 2, VII, 248.

Substitutionen.

368. The substitution group whose order is four. G. A. Miller. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 431.
369. The operation groups of order $8p$, p being any prime number. G. A. Miller. Phil. Mag. Sér. 5, XLII, 195.
370. The transitive substitution groups of order $8p$, p being any prime number. G. A. Miller. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 117.
371. Sur l'énumération des groupes primitifs dont le degré est inférieur à 17. J. A. Miller. Compt. Rend. CXXIV, 1505.
372. Sur une série de groupes primitifs holoédriquement isomorphes à des groupes plusieurs fois transitifs. Ed. Maillet. Compt. Rend. CXXIV, 351.

T.

Tetraeder.

373. Conditions auxquelles doivent satisfaire les arêtes d'un tétraèdre afin que certaines droites partant de quatre de ses angles soient les génératrices d'un hyperboloïde. R. B. Mathesis, Sér. 2, VII, 23.

Thetafunktionen.

374. Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni ϑ ellittiche per argomento zero. Ern. Pascal. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 23.

Transformationsgruppen.

375. Sur la détermination du groupe de transformation d'une équation différentielle linéaire. F. Marotte. Compt. Rend. CXXIV, 608.
376. Sulla teoria dei gruppi infiniti continui. P. Medolaghi. Annali mat. Ser. 2, XXV, 179.
377. Des groupes transitifs de classe ef (e et f étant premiers avec $5 \leq e \leq f$) et de degré $ef+k$ (k étant $< e$). Ed. Maillet. Annali mat. Sér. 2, XXV, 219.

Trigonometrie.

378. Relation entre les angles α, β, γ, δ se déduisant d'une équation entre les sinus et les cosinus de ces mêmes angles. A. Droz-Farny. Audibert. Mathesis, Sér. 2, VII, 260.
379. Über die pythagoreischen Dreiecke und ihre Anwendung auf die Teilung des Kreisumfangs. Graeber. Grun. Archiv 2. R. XV, 337, 439.
380. Relationen bei regulären, dem Kreise ein- und umbeschriebenen Polygonen. E. Dolezal. Grun. Archiv 2. R. XV, 172.
381. Sur une relation dans le triangle. E. Colart etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 26.
382. Si du pied D de la hauteur AD d'un triangle ABC on abaisse des perpendiculaires DE, DF sur les côtés AB, AC la distance EF est moitié du perimètre du triangle formé en joignant les pieds des hauteurs de ABC. Déprez. Mathesis, Sér. 2, VII, 271.
383. Calculer le côté d'un triangle équilatéral, connaissant les distances d'un point de son plan à ses sommets. Problème analogue pour un tétraèdre régulier. Retali. Mathesis, Sér. 2, VII, 207.
384. Relation ayant lieu dans un triangle sphérique. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, VII, 43. — J. Neuberg ibid. 44.
385. Théorème de trigonometrie sphérique. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, VII, 61.

Vergl. Reihen 363, 364.

U.

Umkehrungsproblem.

386. Sur un mode d'inversion des intégrales multiples. P. Appell. Compt. Rend. CXXIV, 213.
387. Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti. V. Volterra. Annali mat. Ser. 2, XXV, 139.

W.

Wärmelehre.

388. Über die mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper. G. H. Bryan und L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1125.
389. Über die Temperaturverteilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem konstanten Strome durchflossen wird. P. Czermak. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1107.
390. Sul problema della temperatura nell' ellissoide. C. Somigliana. Annali mat. Ser. 2, XXIV, 59.
391. Of the kinetic theory of gas regarded as illustrating nature. G. J. Stoney. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 362.
392. Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwellschen Gastheorie. H. Benndorf. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 646.

393. Sur les relations exprimant que les divers coëfficients considérés en Thermodynamique satisfont à la loi des états correspondents. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXXIV, 547.
394. Folgerungen aus Amagats Versuchen. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 343.
395. Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 809.
396. Bemerkungen über Wärmeleitung. C. Puschl. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 989.
397. Zur Theorie der Dissociation der Gase.. G. Jäger Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 671.
398. Die Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molekularvolums. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 15.
399. Über den Einfluss des Molekularvolumens auf die mittlere Weglänge der Gasmolekule. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 97.
400. Zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase. G. Jäger. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 791.
401. Die Erstarrungswärme in Lösungen. O. Tumlirz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 245.
402. Über die Verdampfungswärme von Lösungen. O. Tumlirz. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 827.
403. Thermal transpiration and radiometer motion. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 373, 476.
404. Thermal transpiration and radiometer motion. Osb. Reynolds. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 142.
405. Boyle's law at very low pressures. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 11.
406. Über die Berechnung der Abweichungen der Gase vom Boyle-Charlesschen Gesetz und der Dissociation derselben. L. Boltzmann. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CV, 695.
407. On the continuity of isothermal transformation from the liquid to the gaseous state. Th. Preston. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 231.
408. On the straining of the earth resulting from secular cooling. Ch. Davison. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 133.
409. Über die Zusammensetzung der gesättigten Dämpfe von Mischungen. M. Margules. Wien Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIV, 1243.
410. On the properties of a mixture of liquids. R A. Lehfeldt. Phil. Mag. Ser. 5, XL, 397.
411. Theoretical considerations respecting the separation of gases by diffusion and similar processes. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLII, 493.
412. Sur la dynamique des réactions chimiques homogènes avec dégagement ou absorption de chaleur. M. Petrovitch. Compt. Rend. CXXIV, 1344.

Vergl. Elektrizität 102.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

413. The asymmetrical probability-curve. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 90.
414. The compound law of error. F. Y. Edgeworth. Phil. Mag. Ser. 5, XLI, 207.

Wellenbewegung.

415. On the passage of waves through apertures in plane screens and allied problems. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLIII, 259.

Winkelteilung.

416. Über einen Mechanismus, durch den ein beliebiger Winkel in eine beliebige ungerade Anzahl gleicher Teile geteilt werden kann. A. Korselt. Zeitschr. Math. Phys. XLII, 276.
417. Eine approximative Winkeldreiteilung. C. F. E. Björling. Grun. Archiv 2. R. XV, 223.

Wurzelausziehung.

418. Sur l'extraction de la racine carrée des nombres. E. Barbette. Mathesis, Sér. 2, VII, 59.

419. Extraction de la racine carrée d'un nombre entier. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, VII, 161. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 413.]

Vergl. Geschichte der Mathematik 159, 160. Kettenbrüche 229, 230.

Z.

Zahlentheorie.

420. Zum Beweise des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 326. [Vergl. Bd. XL, Nr. 276.]

421. Lineare Relationen zwischen Mengen relativer Primzahlen. Fr. Rogel. Grun. Archiv 2. R. XV, 315.

422. Dyadische Koordination der bis 100000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen E. Suchanek. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 443.

423. Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen. R. Daublebsky v. Sterneck. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CV, 875.

424. Über die Zerlegung der Zahlen in Quadrate. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 328.

425. Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CIII, 115.

426. Über die Äquivalenz der reduzierten binären quadratischen Formen von positiver Determinante. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 995.

427. Einige Bemerkungen zum quadratischen Reziprozitätsgesetze. L. Gegenbauer. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CIII, 285.

428. Über den quadratischen Reziprozitätssatz und die Summen von Gauss. F. Mertens. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa) CIII, 1005.

429. Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Funktionen $n$ten Grades von x, welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen. K. Zsigmondy. Wien. Akad. Ber. (Abtlg. IIa), CIII, 135.

430. Über die Auflösung der Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 335.

431. Über Potenzreihen. G. Speckmann. Grun. Archiv 2. R. XV, 334.

432. Sur certains points de la théorie des résidus des puissances. Caractères distinctifs des nombres, ou racines, d'où proviement les residus générateurs. De Jonquières. Compt. Rend. CXXIV, 334.

433. Théorème sur les fractions décimales périodiques. Mathesis, Sér. 2, VII, 228. — Stuyvaert ibid. 249. — L. Meurice ibid. 268.

434. Le quotient de $(2m-1)!$ par $m!\ (m-1)!$ est un nombre pair excepté quand m est une puissance de 2. Brien, Colart, Soons. Mathesis, Sér. 2, VII, 231.

435. Questions d'arithmologie. De Rocquigny. Mathesis, Sér. 2, VII, 217.

436. Über rationale Richtungscosinus. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. XV, 323.

437. Forme des nombres qui, divisés par $a, b, c \ldots$ laissent respectivement les restes $a', b', c' \ldots$ E. Colart. Mathesis, Sér. 2, VII, 149.

438. Sur certains carrés parfaits. Van Deuren etc. Mathesis, Sér. 2, VII, 196.

439 Sur les nombres triangulaires carrés parfaits. L. Collette. Mathesis, Sér. 2, VII, 40.

440. Décomposition de $(a^2+b^2)^6$ en trois, quatre ou cinq carrés. G. de Rocquigny-Adanson. Mathesis, Sér. 2, VII, 18.

441. Sur l'équation $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{x(x+1)}{2} = y^2$, x et y étant des fonctions de n. A. Boutin. Mathesis, Sér. 2, VII, 269.

442. Tout cube est la différence de deux carrés, dont l'un au moins est divisible par 9. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VII, 50.

443. Solutions entières de l'équation $z_1{}^3+z_2{}^3+z_3{}^3+\cdots+z_n{}^3=(5n+z)z^3$. E. Fauquembergue. Mathesis, Sér. 2, VII, 27.

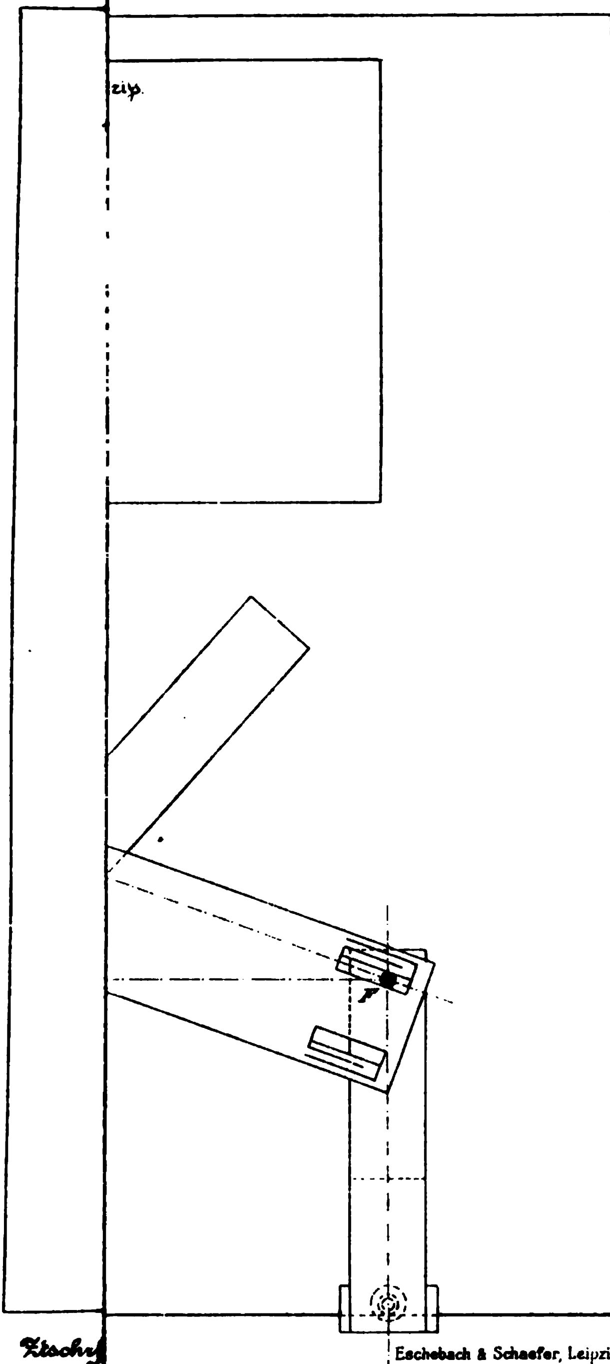
Vergl. Combinatorik 52. Formen. Funktionen 130. Geschichte der Mathematik 158. Gleichungen 188. Reihen 355, 356.

Zinseszins.

444. Sur les lois de l'intérêt. Enr. de Montel. Compt. Rend. CXXIV, 224.

Zum

Tafel V



Ztschr

Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Historisch-litterarische Abteilung.

Prix Lobatchefsky

(Premier Concours 1897).

La Société Physico-mathématique de Kasan a l'honneur d'informer qu'elle a décerné dans sa séance solennelle de 3 Novembre (22 Octobre) 1897 le prix de N. I. Lobatchefsky à M. Sophus Lie, professeur ordinaire à l'Université de Leipzig, pour son ouvrage: „Theorie der Transformationsgruppen. Band. III. Leipzig 1893.“

Les mentions honorables sont décernées

à M. L. Gérard, professeur au Lycée Ampère (Lyon), pour son ouvrage: „Thèse sur la géométrie non Euclidienne. Paris 1892“,

à M. E. Cesaro, professeur ordinaire à l'Université Royale de Naples, pour son ouvrage: „Lezioni di Geometria intrinseca. Napoli 1896“,

et à M. G. Fontené, professeur au collège Rollin, pour son ouvrage: „L'hyperespace à $n-1$ dimensions. Paris 1892“.

La medaille d'or de N. I. Lobatchefsky, destinée selon le § 16 du réglement du prix Lobatchefsky à recompenser le travail des personnes qui aident à la Société physico-mathématique de Kasan à examiner les ouvrages, présentés au concours à été décernée dans la même séance solennelle de 3 Novembre 1897 à M. Felix Klein, professeur ordinaire à l'Université de Gottingue, pour son rapport sur l'ouvrage de M. Lie. Le rapport de M. Klein vient d'être imprimé à Kasan sous le titre: „Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises (Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie).“

Les rapports sur les ouvrages de M. Gérard, Cesaro et Fontené ont été donnés par M-rs prof. T. Souvorof, D. Seiliger et P. Nasimof, membres de la commission. En outre ont pris part aux travaux de la commisson M-rs prof. D. Doubiago, A. Kotelnikof, D. Sintzof (secrétaire de la commission).

Le nombre total des ouvrages présentés au concours à été égal à neuf.

Extrait du Réglement du Prix Lobatchefsky.

Le prix Lobatchefsky est décerné tous les trois ans. Il est d'une valeur de 500 roubles papiers. Il reste à la volonté de la Société d'en augmenter avec le temps la valeur, si l'état du capital le lui permet (§ 4).

Le prix Lobatchefsky est destiné aux ouvrages relatifs à la géométrie, et de préférence à la géométrie non — Euclidienne (§ 5).

Sont admis à concourir à ce prix les ouvrages imprimés en russe, français, allemand, anglais, italien et latin, adressés à la Société Physico-mathématique par leurs auteurs et publiés dans le cours des six années qui auront précédé le jugement de la Société concernant le prix (§ 6).

Dans aucun cas le prix ne peut être partagé entre deux ou plusieurs auteurs concurrents. Dans le cas où se présenteront plusieurs ouvrages d'égale valeur, c'est le tirage au sort qui en décidera (§ 7).

Le prix sera décerné pour la seconde fois le 3 Novembre 1900. Selon le § 11 du réglement, les ouvrages destinés au concours doivent être adressés à la Société Physico-mathématique de Kasan jusqu'à 3 Novembre 1899.

Président de la Société Physico-mathématique

20 Decembre 1897. A. Vassilief.

Ein „Tractatus de Abaco" aus der Wende des XII. und XIII. Jahrhunderts.

Nach Codex Vindobonensis Palatinus 901, f. 87—96

herausgegeben von

Maximilian Curtze
in Thorn.

Der nachfolgend abgedruckte Tractatus de Abaco ist in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Er stammt aus jener Zeit, wo das Abacusrechnen mit dem Algorismus im Streite lag, und wo, das zeigt unsere Abhandlung deutlich, beide noch nebeneinander geübt und gelehrt wurden. Er zeigt ferner, dass der Verfasser wenigstens das Abacusrechnen auf die Römer zurückführt und dasselbe im Gegensatz zu dem arabischen Rechnen stellt. Er ist sich der Verschiedenheit beider Methoden ebenso bewusst als des Gemeinsamen derselben, und

erläutert das Verfahren der Araber durch das des Lateinischen Abacus. Bei dem arabischen Dividieren der Brüche benutzt er, so wenigstens glaube ich kann man seine Darlegung nur auffassen, Dezimalbrüche, während er auch das System der römischen Minutien genau auseinandersetzt. Die Zeichen des Abacus unterscheidet er von denen des Algorismus, und aus seinen Zeichen kann man sehen, wie die beiden Formen ʒ, ⊢ für 3 sich entwickelt haben. Dass die Form ⊢ statt ʒ der leichteren Schreibart halber in der spätern flüchtigeren Schrift das alleinige Recht behielt, ist nicht zu verwundern, aber gerade die Verwendung beider Zeichen nebeneinander spricht dafür, dass die Niederschrift dem Ende des XII. oder dem Anfange des XIII. Jahrhunderts angehört, da die Benutzung der Form ⊢ mit dem XIII. Jahrhundert absolut aufhört. Das Charakteristische des Abacusrechnens, dass nur Multiplikation und Division gelehrt werden, nirgends aber Addition und Subtraktion, findet sich auch hier, und zwar für beide Rechnungsarten. Von der komplementären Division ist keine Spur mehr vorhanden, wohl aber in dem arabischen Teile von der komplementären Multiplikation. Möge nun die Abhandlung für sich selber sprechen.

Tractatus de abaco.

| Quia de quantitate, que numerus est, acturi sumus, primo viden- 87
dum est, quid sit numerus, et que eius species. Est autem numerus,
per quem numeramus; sic diffinitur, sic autem dividitur. Numerus autem
alius digitus, alius articulus. Digitus appellatur omnis numerus ille,
qui continetur infra limitem[a], scilicet unus, duo, III, IIII, et ita usque
ad X. Ipsum autem X, primum scilicet limitem, appellamus articulum.
Et sciendum est, quod ultra predictum articulum[b] nullus est novus
numerus, sed predictos digitos cum predicto articulo iungimus[c], et numerando
dicimus: undecim, duodecim tredecim, et sic usque ad viginti, qui
est secundus articulus. Item sciendum est, quod ultra primum articulum[d]
non est novus articulus usque ad centum; scilicet ipsum primum diverso
modo multiplicantes[e] articulum facimus istos articulos viginti, triginta,
quadraginta et ceteros usque ad centum. Unde etiam dicitur viginti
quasi bis geniti, quia a bis X generatur, et triginta a ter decem. Item
supra C non est novus articulus usque ad miriadem, id est ad mille, | sed 87′
diversitates[f] multiplicationis centenarii faciunt istos articulos: ducenti,
trecenti et sic usque ad miriadem[g], super quam nec est aliquis novus
digitus, nec articulus, sed per adiunctionem miriadis tam cum digitis
quam cum articulis ascendimus numerando et facimus duo milia et
trecenta etc. Hic de numero, et quisquis pro suo ingenio plura
concipiet.

Nunc videndum est, quid sint arcus tabule cum nominibus et figuris ipsos representantes.[h] Appellantur autem sic: singularis, decenus, centenus, millenus. Nunc videndum est, quid arcus, ex quibus numeris, et qualiter ex illis formantur. Et nota, quod solus singu-

laris formatur tantum a digitis et non ab articulis, reliqui vero omnes
ab articulis tantum et non a digitis. Unde etiam evenit, caracteres in
singulari arcu positos nichil nisi tantum digitos representare,[i] in reli-
quis vero omnibus arcubus semper articulos et nunquam digitos signi-
88 ficare, si nullum super se habent arcuum caracterem. | Nam, si super
se habeat caracterem, digitum et non articulum significat collatus
superiori; si collatus ex latere, articulum et non digitum. Porro scien-
dum est forma, proprietates et continentie arcuum, que intellecte et
diligenter annotate, formas etiam arcuum nos videre facient, scilicet[k]
qualiter ipsi arcus inter se et a se ipsis formentur, scilicet qualiter
proximus[l] formetur a proximo, et tercius a tercio, et quartus a quarto,
et sic de ceteris. Est igitur proprietas quedam communis omnibus,
hec scilicet, quod proximus ad proximum est decenus, quia decies con-
tinet eum; et hinc est, quod proximus a proximo nascitur, quia quilibet
et inferiorum decuplatus facit suum superiorem, id est proximum. Item
alia proprietas, quod quilibet tercius ad tercium est centenus, quartus
ad quartum millenus; et sic proprietates assignando formas etiam
quorumlibet invenies.

Dehinc sciendum est nomina caracterum cum figuris et nominibus,
et quod quilibet caracter in quolibet arcu positus tociens significat
88′ superscriptum numerum, quotus ipse est. ¦ Verbi gratia. Unitas in
singulari arcu unum tantum, in deceno positus decem, in centeno C,
in milleno M significat, et sic de ceteris.

Porro his omnibus visis sciendum est, si quid multiplicare volueris, primo rem multiplicandam in suprema tabule linea, scilicet sub figuris arcuum, colloca, et id, per quod rem multiplicandam multiplicare volueris, scilicet multiplicatores, in infima tabule linea colloca. Deinde per inferiores numeros, quos multiplicatores constat esse, adverbialiter prolatos multiplica superiores, et numerum vel numeros, qui ex illa multiplicatione surgunt, in mediam lineam tabule compone secundum regulas arcuum, quarum prima de singulari talis est:

Si[m] singularis arcus quemcumque arcuum multiplicat, in eundem, quem multiplicat, pone digitum, in ulteriori articulum.

Item regula deceni:

Si[n] decenus arcus quemcumque arcum multiplicat, in secundum ab eo, quem multiplicat, pone digitum, in ulteriori articulum.

89 Item regula centeni ¦ et milleni. Hoc tamen diligenter observans,
quod quilibet arcus, quoto loco distat a singulari, in talem ab eo,
quem multiplicat, ponit digitum, in ulteriori articulum.

Ita dico, si[o] fiunt articuli, quia quandoque ex multiplicatione premissorum numerorum surgit digitus tantum, quandoque articulus tantum, quandoque digitus et articulus. Hec retenta et diligenter considerata sufficiant de multiplicatione dicta. Hec tamen adicimus, quod in collectione[p] facta multiplicatione[q] articuli sunt transferendi, digiti

relinquendi, unde sepe evenit, quod in medio arcus unus vel duo vel
tres relinquitur vacuus.

Cum vero multiplicandi scientiam habeamus, conveniens est, ut
etiam dividendi scientiam non ammittamus, cuius fit talis divisio.
Divisio alia simplex, alia multiplex. Simplex, in qua tantum unus
caracter est divisor; multiplex in qua plures divisores ponuntur. Item
mul|tiplex alia continua, alia interrupta. Continua, in qua divisores, 89'
in quibuscunque arcubus positi fuerunt, invicem continuantur; interrupta,
in qua non continuantur divisores, sed interrupti ponuntur, ita scilicet,
quod quandoque unus arcus, qui interiacet, vacuus est, quandoque
plures. Et notandum, quod continuatio sive interruptio dividendorum
non det nomen continue vel interrupte divisioni, sed continuatio vel
interruptio divisorum, sicut ètiam simplex divisio accipit nomen a
simplici divisore, id est ab uno caractere divisoris, id est divisorem[r]
representante, et non a caractere rem dividendam representante, quia[s]
in simplici divisione quandoque dividitur unus caracter, quandoque
plures, et possunt illi etiam esse continui vel interrupti, et tamen
simplex erit pro simplici divisore.

Porro divisurus aliquid divisores pone in superiore linea tabule,
res dividendas in medio, denomina|tiones autem, que ab his surgunt, 90
in extrema et infima linea compone. Cuius rei conversa observasti in
multiplicatione: ibi enim multiplicatores, id est, per quos multiplicatur,
in infimo; res multiplicandas, id est numerum, qui multiplicatur, in
supremo; et quod inde surrexit, in medio collocasti.

Ad dividenda igitur hec est generalis et communis regula: Divisor,
si minor vel equalis fuerit rei dividende, superponatur, si maior transferatur
in proximum. Collocato itaque divisore, ita scilicet, ut diligenter
annotes, unde transferatur divisor, scilicet a deceno vel a
centeno aut a milleno, et quod sequentes divisores etiam secum transferantur
servata continuatione eorum priori, si fuerint continui, vel
interruptione eorum priori, si fuerint interrupti, sicut et ubi hec regula
precipit, querere debes, quotiens divisor continebitur in dividendo;
et quotiens continebitur in eo, numerum illum appellabis denomina|- 90'
tionem, quam collocabis in diversis locis secundum diversas quarumlibet
arcuum regulas, quarum diversitatem subscriptam diligenter animum
adverte.

Singularis divisor, quocumque translatus fuerit, subponet sibi
denominationem, et qui remanet, sub eo ponetur; ita dico, si aliquid
remanet, quia quandoque nichil remanet. Verbi gratia: quotiens est
binarius in senario? Ter. Ecce nichil remanet.

Decenus divisor, quocumque translatus fuerit, secundabit a se
denominationem, et quod remanet, sub ipso ponetur; centenus terciabit;
millenus quartabit, et sic de ceteris: quoto loco distabit a singulari,
in totum arcum a se denominationem collocabit, post se tamen.
Quia, sicut in multiplicatione[t] numerando ascenditur ab inferioribus

et minoribus numeris ad superiores et maiores, ita converso in divisionibus de superioribus descenditur ad inferiores. In simplici autem, posita ita, sicut regula precipit, denominatione[u], si aliquid superest,
91' quod dividi potest | per integros, iterum dicas generalem regulam: Divisor, si minor vel equalis fuerit rei dividende, superponatur, si maior transferatur in proximum; et dividendum[v] sicut prius dividebis, usque dum nichil remaneat, vel dum non possit dividi. Et nota, divisores ante se vel sub se tantum dividere et in suum locum, si transferuntur, redire. Hec de simplici sufficiant.

In continua vero et interrupta aliter operabis. Posita enim denominatione primi divisioris[w] per eandem multiplica sequentes omnes, et numerum, qui[x] inde surgit, non pones, sicut in simplici solet fieri, sed auferes a re dividenda, que in medio locata est, et nota, quod[y] quandoque aufertur a re locata ante divisorem, qui multiplicatur per denominationem, quandoque sub ipso divisore, et digitus est transferendus, articulus relinquendus; ita dico, si erit ibi digitus et articulus. Hoc facto, si id, quod remanet, adhuc dividi potest, iterum dic generalem illam regulam: Divisor, si minor etc., et de nominatione posita per eandem multiplicabis divisores, qui sequuntur primum. Et sic
91' comple | ta divisione si scire volueris, si vera vel falsa fuerit, multiplica divisorem vel divisores superpositos per denominationes inferiores, et nota, quod unam pro pluribus ponas, que eundem representet numerum, et si res divisa redierit ad summam, vera erat divisio, sin autem, falsa. Hic notandum est, quod generalis illa regula, quam premisimus, necessitatis causa quandoque infringitur. Tunc videlicet, quando divisor par erit rei dividende, et quando per positam denominationem multiplicatis divisoribus nichil in medio remanet, unde multiplicatio illa auferri possit. Tunc demum divisor, qui par est rei dividende, contra regulam transfertur in proximum, si potest transferri. Nam infra proprium arcum non transfertur, ita ut centenus fiat decenus, vel decenus fiat singularis. Et si adhuc non habes, unde in medio auferatur multiplicatio, divisor, qui fit per denominationem, minuetur.
92 Videlicet si divisor sexies contineatur in re dividenda et nichil | aut par remansit, tu dic, eum quater vel quinquies contineri, ut remaneat, unde sequens multiplicatio auferri possit. Item notandum, si quandoque ipsa denominatio in articulum incidit, tunc minui debet, vel si excesserit articulum, videlicet si duodecies vel amplius divisor in re dividenda, tunc iterum minuetur denominatio infra articulum, et quod remanet, sub eo ponetur. (Siehe die Figur auf folgender Seite.)

92' Quando vidimus multiplicationem atque[z] divisio | nem latini abaci, nunc pulchrum est, atque utile videtur esse, multiplicationem atque divisionem cognoscere arabici abaci.[aa]

Multiplicaturus aliquid hunc ordinem debes observare. Numerum multiplicandum, cuius summam volueris scire per multiplicationem, pone quandoque in suo arcu pro libito, nam, quamvis non scribuntur,

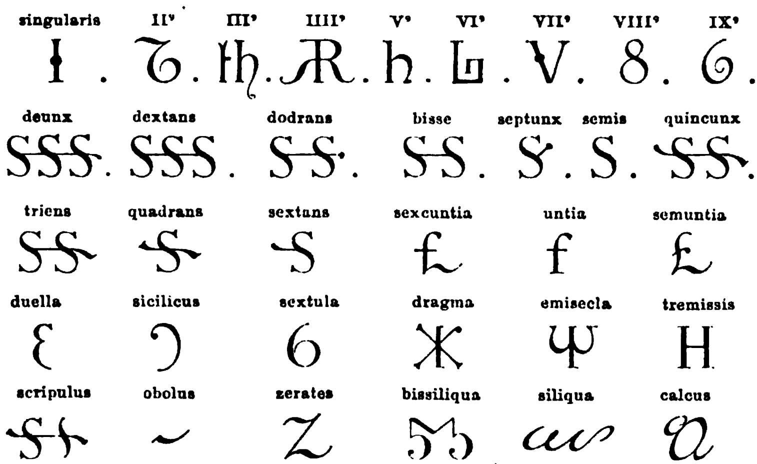
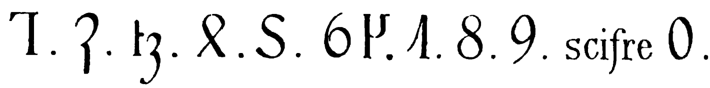


Figure et nomina caracterum latini abaci.

tamen intelliguntur. Quorum si aliquem eorum vacuum volueris relin-
quere, in loco eiusdem scifre debes ponere, ut notet arcum ibi esse.
Quo si post ex multiplicatione aliqua erit numerus ponendus, scifre
deletur et numerus inscribitur. Porro multiplicatores sub numerum
multiplicandum ponere debes tali ordine conservato, ut primus multi-
plicatorum, id est caracterum, ponatur sub ultimo caractere multipli-
candorum. Verbi gratia. Si singularis et decenus et centenus ponerentur
multiplicatores deceni, centeni, milleni, singularis, qui est primus, sub[bb]
decenum, et decenus sub centenum et[cc] centenus sub millenum, qui
est ultimus | deceni et centeni, ponatur[dd], et unusquisque superior 93
cum omnibus inferioribus conferatur hoc ordine servato, ut ultimus
multiplicandorum primo cum unoquoque multiplicatorum conferatur,
et si[ee] numerus, qui surgit de multiplicatione uniuscuiusque figure,
numerus est[ff] prime speciei, quod idem est, quasi diceret digitus,
super ipsum, qui est collatus, ponitur. Si vero numerus secunde
speciei, quod idem est, qui dicitur articulus, in secundo ab eo ponatur
loco, id est arcu. Ultimo multiplicandorum sic collato cum unoquoque
multiplicatorum deleatur, et in locum eius scifre ponatur, si nullus
ibi positus est numerus, et iterum multiplicatores apponunter multipli-
candis secundum regulam, et ultimus superiorum conferatur omnibus
inferioribus. Et hic ordo erit observandus in[gg] multiplicatione abaci
arabici inter quantosvis multiplicandos et multiplicatores, ut semper
primus multiplicatorum sub ultimo multiplicandorum ponatur, et unus-
quisque superiorum cum omnibus inferio | ribus primo conferatur. Hec 93′
dicta et diligenter considerata sufficiant de multiplicatione arabica.
Est tamen sciendum, hec omnia cum certis regulis esse ponenda,
quarum hec est una. Inferiorum differentiarum, id est numerorum[hh],

prima sub superioris numeri dispositionis ultima ponitur, et unaqueque superior cum omnibus inferioribus confertur. In qua collatione cum quis prime speciei creverit, super presentialiter collatam locetur, si vero secunde, ad secundam transferatur conveniat.



Si quis prime speciei aliquem eiusdem multiplicaverit, differentiam minoris de maiori demere, et de reliquo denominationem facere, et iterum differentias eorum ad denarium inter se ductas eidem addere oportet.

Visa multiplicatione restat de divisione pauca adiungere. Divisurus quemlibet numerum inter quantoscunque volueris, hoc ordine disponendi sunt caracteres dividendorum et dividentium. Verbi gratia. Divisurus quingentos sexaginta inter centum viginti, ultimus divisorum sub[ii] ultimo dividendorum ponitur, ita scilicet, ut centenus, qui est ultimus divisorum, locetur sub quingentis, qui ultimus est dividen-
94 dorum. Deinde restat querendum[kk], quotiens divisor sit in | dividendo. Inde denominatione facta super primam divisoris ponitur, et sequentes omnes per denominationem positam multiplicantur, et numerus consurgens inde non ponitur, sed aufertur, ut solet fieri in latino abaco et si adhuc restat, quod dividendum, fit dispositio divisorum et dividendorum secundum regulam dividendorum, que est talis: quotiens ultima divisoris in ultima vel ultimis dividendi fuerit, denominatione super primam divisoris posita tociens de reliquo sequentes auferuntur.[ll] Notandum est, quod in hoc abaco ut in latino divisores vel divisor transferendi sunt de suis arcubus ad superiores. Ut si sit aliquis centenarius et alter decenus, transfertur centenarius ad millenum, decenus ad centenum, et facta divisione redeunt, unde translati sunt. Nec hoc est negligendum, sed diligenter considerandum, in quo arcu ponatur denominatio, scilicet in centeno vel in deceno aut in singulari.

94′ Hoc[mm] superioribus adiciendum est, quod si divisor maior est dividendo, non ultima divisoris sub[nn] ultima dividendi ponitur, sed regula latini abaci servatur, que est: Divisor, si minor vel equalis fuerit rei dividende, superponatur, si maior transferatur in proximum. Notandum est in divisione, quod si divisor multiplicatus per denominationem non habuerit ex priori multiplicatione sufficientem quem[oo] possit auferre numerum, licet sibi numerum per denominationem multiplicatum subplere ex numero sub se posito, et tunc auferre; ita dico, si posteriori relinquitur, unde eius multiplicatio auferatur, si est posterior.

95 *De divisione | minutiarum.*

As quando dividendus est, vel etiam si plures sint asses dividendi, diligenter debes attendere, que partes eorum sint, quia semper per

decem partes suas transferendi erunt, et per pauciores nullo modo transferetur, quidquid per minutias dividendum erit. Sed quidquid illud erit, quod tali modo transtuleris, per superiores sursum multiplicatum in insequentem transponetur, et illud denominationem esse dicimus. Denominationem vero illam iterum cum suo superiori confer, et secundum consuetum modum multiplicationis, que fit per denominationem, quidquid inde surrexerit, auferes. Et nota, quod in minutiis a maiori ad minus semper quodammodo descendendo pervenimus; sed si in tantum descendimus, quod decem partes ex eo efficere non possumus, indivisibile remanet.

De continentiis minutiarum.

Uncia continet II semuncias; III duellas; IIII sicilicos; VI sextulas; VIII dracmas; XII emiseclas; XVI tremisses; XXIIII scripulos.

Semuncia duellam et dimidiam, | quod est sextula una; II sicilicos; 95′
III sextulas; IIII dracmas; VI emiseclas; VIII tremisses; XII scripulos.

Duëlla continet sicilicum et terciam eius partem, quod est emisecla; II sextulas; V dracmas et II scripulos, quod est una emisecla; IIII emiseclas; V tremisses et tertiam partem tremissis, quod est obolus; VIII scripulos.

Porro *sicilicus* continet unam sextulam et dimidiam, quod est una emisecla; II dracmas; III emiseclas; IIII tremisses; VI scripulos.

Sextula continet unam dracmam et sextam partem duarum, scilicet scripulum, quia due dracme continent VI scripulos; et continet II emiseclass; II tremisses et sextam partem IIII tremissium, scilicet scripulum tantum, quia valent due dracme quantum IIII tremisses; continet etiam IIII scripulos.

Porro *dracma* continet unam emiseclam et dimidiam, quod est scripulus; II tremisses; et III scripulos.

Porro *emi secla* continet tremissem et duodecimam partem IIII 96
tremissium, quod est unus obolus; et II scripulos.

Porro *tremissis* continet scripulum et obolum.

Scripulus continet duos obolos; III bissiliquas; IIII zerates; VI siliquas; VIII calcos.

Obolus continet bissiliquam et dimidiam, quod est siliqua; II zerates; III siliquas; IIII calcos.

Bissiliqua continet zeratem et eius terciam partem, cuius figuram et nomen non habemus; II siliquas; II caleos et duas tercias partes calci, cuius item figuram et nomen non habemus.

Zerates continet siliquam et dimidiam; et duos calcos.

---

a) *id est X* über der Zeile. — b) *id est X* über der Zeile. — c) *iunigimus* Mscpt. — d) *id est X* über der Zeile. — e) *multiplicans* Mscpt. — f) *diversitas* Mscpt. — g) *id est M* über der Zeile. — h) *presentantes* Mscpt. — i) *presentare* Mscpt. — k) *sed* Mscpt. — l) *proximum* Mscpt. — m) *Si* fehlt im Mscpt. — n) *Si*

fehlt im Mscpt. — o) *si* fehlt im Mscpt. — p) *Collutionem* Mscpt — q) *multiplicationem* Mscpt. — r) *divisores* Mscpt. — s) *presentante, qui* Mscpt. — t) *sicut multiplicationem* Mscpt. — u) *denominationem* Mscpt. — v) *dividendus* Mscpt. — w) *divisores* Mscpt. — x) *quod* Mscpt. — y) *qui* Mscpt. — z) *adque* Mscpt. — aa) *abici* Mscpt. — bb) *in* Mscpt. — cc) *et decenus sub centenum* fehlt im Mscpt. — dd) *ponatur* fehlt im Mscpt. — ee) *si* fehlt im Mscpt. — ff) *est* fehlt im Mscpt. — gg) *in* fehlt im Mscpt. — hh) *id est numerorum* über der Zeile. — ii) *in* Mscpt. — kk) *querendus* Mscpt. — ll) *sequentis aufertur* Mscpt. — mm) *Hec* Mscpt. — nn) *in* Mscpt. — oo) *quod* Mscpt.

Dénis Papin.

Von

Prof. Dr. E. Heydenreich

in Marburg i. H.

Eine Säkularerinnerung.

1698 studierte Dénis Papin eifrig an der Vervollkommnung seiner grossen Erfindung, der Dampfmaschine. Hatte er bis jetzt, seit 1690, das Wasser im Cylinder selbst zu Dampf verwandelt, so projektierte er nun einen besonderen Dampfkessel. Diese Erfindung hielt er, wie er sich 1698 brieflich äussert, für nützlich „pour produire les grands effets que j'attens de la force du feu"; „je suis persuadé que cette invention, si on la pousse comme il faut, pourra produire des utilitez tres considérables". Diese Prophezeiung fand ihre Erfüllung besonders seitdem J. Watt an Papin anknüpfte und den Dampf nicht bloss, wie das von Papin geschah, zur teilweise bewegenden, sondern zur alleinig treibenden Kraft machte.*

Dénis Papin wurde am 22. August 1647 zu Blois von reformierten Eltern geboren. Sein Vater war „conseiller de roi et receveur général des domaines du comté de Blois" und zugleich Ältester der reformierten

* Stegmann: Über den ersten Erfinder der vortrefflichen Feuermaschine. Kassel 1780 Progr. — B(annister): Dénis Papin. Blois 1847. — De la Saussaye et A. Péau: La vie et les ouvrages de Dénis Papin. Paris et Blois 1869. 2. Aufl. von Belenet. Blois 1894; bis jetzt erschienen Band I, III, IV, VII, VIII. — Ernouf: Dénis Papin. Sa vie et ses œuvres. Paris 1874. — De Félice: Dénis Papin de Blois. Blois 1879. — Gerland: Leibnizens und Huygens Briefwechsel mit Papin nebst einer Biographie Papins, bearbeitet auf Kosten der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1881. — Wintzer: Dénis Papins Erlebnisse in Marburg. Marburg, Elwert 1898. — Die umfangreiche Litteratur über Papin in Zeitschriften oder gelegentliche Notizen über ihn in Monographien über andere Gegenstände verzeichnet Gerland S. 140 flg.

Kirche. Über seine Jugend und wissenschaftliche Vorbildung ist fast nichts bekannt. 1661 oder 1662 bezog er die Universität Angers und promovierte 1669 daselbst zum Doktor der Medizin. 1671—74 lebte er in Paris mit Huygens zusammen. Dieser war seit der Gründung der Akademie der Wissenschaften ihr Mitglied und hatte seine Wohnung in den für die königliche Bibliothek bestimmten Räumlichkeiten. Dort, so erzählt Papin selbst, „je travaillay beaucoup à faire cette machine (gemeint ist eine Pulvermaschine) et ce fut moy qui en fis l'experience en presence de M. Colbert." Die ersten wichtigen Entdeckungen Papins betrafen Verbesserungen an der neuen Erfindung der Luftpumpe. 1674 veröffentlichte er eine Beschreibung der Huygenschen und der ersten von ihm. selbst angegebenen Luftpumpe und Versuche mit denselben in dem jetzt äusserst selten gewordenen Werke „Experiences du vuide avec la description des machines qui servent à les faire." Paris 1674. 4. Hubin legte dieselbe der académie des sciences vor und das journal des savants erwähnte sie zweimal mit grossen Lobeserhebungen. Kurz darauf ging Papin nach England „spe quadam inductus ut conditionem hîc loci genio suo accomodam nancisceretur", wie Boyle (Experimentorum novorum physico-mechanicorum continuatio IX Genevae 1682 praef.) hörte. Mit Freude begrüsste ihn dieser und nahm den geschickten Experimentator um so lieber als Hilfsarbeiter an, als er von schmerzhaftesten Steinbeschwerden befallen war. Ferner half Papin Boyle bei dessen Publikationen; doch arbeitete er auch selbständig und erfand eine neue Luftpumpe und eine Windbüchse. 1680 wurde Papin Mitglied der Royal Society. Er dankte, indem er ihr 1681 sein neues Werk „A new Digester" etc. widmete. Die hier bekannt gemachte Erfindung des Digestors oder Kochtopfes hat seinen Namen ganz besonders bekannt gemacht. Dieser Topf ist jetzt in Familien und Laboratorien längst bekannt und geschätzt. Ernouf nannte Papin um dieser Erfindung willen einen bienfaiteur de l'humanité und schon zu Lebzeiten Papins diente sein Digestor zur Erleichterung der Lage der Armen. Die französische Ausgabe des Jahres 1688 bezeichnete mit Recht als das Wesentliche der neuen Erfindung la manière d'amolir les os et de faire cuire toutes sortes de viandes en fort peu de temps et à peu de frais. Der Kochtopf machte schon damals Sensation. König Karl II. von England verlangte sofort einen für sein Laboratorium in Whitehall. Leibniz machte sich zum Echo der allgemeinen Bewunderung mit den Worten: „un de mes amis me mande avoir mangé un pâté de pigeonneaux, préparé de la sorte par le Digesteur et qui s'est trouvé excellent". Seitdem hat mit wechselnder Gunst aber immer wieder aufs neue diese Erfindung sich bewährt. Die Wissenschaftliche Gesellschaft zu Clermont-Ferrand veröffentlichte 1761 eine besondere Schrift Sur l'usage œconomique du digesteur de Papin, und die berühmte Erfindung Watts schloss sich auch an den Digestor an. „In 1761 or 1762", so erzählt Watt selbst, „i made some experiments

on the force of steam in a Papin's digester, and formed a species of the steam engine, by fixing upon it a syringe one third of an inch in diameter."

Der Sekretär Sarotti des Senates der Republik Venedig gründete damals eine „accademia publica di scienzo filosofiche e matematiche" und veranlasste Papin zu einem zweijährigen Aufenthalte in Venedig. Die Neuheit und das glückliche Ergebnis seiner Experimente schufen ihm auch in Italien einen grossen Namen. Ein Florentiner Physiker z. B. stützte sich auf seinen Digestor, um die Ursachen der Vulkane und Erdbeben zu ergründen.

Nach London zurückgekehrt, nahm er nicht wieder die frühere Stellung zu Boyle ein, sondern wurde am 2. April 1684 „temporary curator of experiments" und bezog dafür, dass er für jede Sitzung Experimente bereit hielt und im Bedarfsfall dem Sekretär behilflich war, 30 Pfund Sterling. Wie sehr ihm diese Stellung zusagte, ist aus der grossen Menge Experimente zu sehen, die in dieser Zeit in den Protokollen der Royal Society niedergelegt sind.

Die Aufhebung des Ediktes von Nantes, 18. Oktober 1685, beraubte ihn der Möglichkeit, in seine Heimat zurückzukehren. Wie der grosse Kurfürst von Brandenburg nahm sich auch Landgraf Karl von Hessen der vertriebenen Hugenotten an. Es bildeten sich aus ihnen daselbst reformierte Gemeinden mit der französischen Kirchenverfassung. Professor Maliverné, seit 1686 als Professor der Heraldik in Marburg angestellt, war es vermutlich, der zuerst die Aufmerksamkeit seines Beschützers, des Landgrafen, auf die bedeutenden Leistungen seines Cousin Papin gelenkt hat. Das Projekt einer Centrifugal-Saugpumpe, an dem Papin schon vorher in London gearbeitet hatte, interessierte den Landgrafen mächtig zum Zwecke der Entwässerung der neuangelegten Karlsau. 1688, 14. Februar, ernannte dieser Papin zum „professore matheseos" und verordnete „ihme auch zu jährlicher Besoldung Einhundert und fünffzig Gülden und was darbeneben an früchten die übrige professores philosophiae gegen bezahlung etwas an geld geniessen". Papin hielt seine Antrittsrede über den Nutzen der Mathematik namentlich für die Mechanik und die Hydraulik. Es heisst darin, die Hydraulik sei jetzt für ihn und seine patriotischen Zuhörer die wichtigste Wissenschaft, da es darauf ankomme, mit ihrer Hilfe die Anlage der Karlsaue durch Entwässerung durchführen zu helfen. Auch in den folgenden Semestern beschränkte er sich in seinen Vorlesungen nicht auf reine Mathematik, sondern zog auch die angewandte vielfach heran. So erbot er sich zu Vorträgen über Kriegsbaukunst, Astronomie, über das Werfen von mit Pulver gefüllten Kugeln, Chronologie, Geographie, Optik, Feldmesskunst u. a.

Der von Papin konstruierte Centrifugal-Ventilator, „hessischer Blasebalg" genannt, der sich drehte, „avec une fort grande facilité en sorte que avec le bout de doigt on luy donne un mouvement tres

rapide“, that in einem Kohlenbergwerk in Allendorf treffliche Dienste, indem er den Aufenthalt daselbst durch Zuführung frischer Luft wieder ermöglichte. War Papin bereits durch die Anerkennung eines Huygens, Boyle, Leibniz bestens empfohlen, so wurde er 1689 durch die Ernennung zum korrespondierenden Mitgliede der französischen Akademie der Wissenschaften in Paris ausgezeichnet.

Papin war mit seiner Stellung in Marburg nicht zufrieden. Les princes ont tant de sortes d'occupations qu'ils ne pensent gueres aux sciences et deplus la cour n'est presque jamais icy. Er kann also von dieser Seite wenig hoffen und ebensowenig von der Akademie. Der Professor der Mathematik findet, so klagt er weiter an Huygens, wenig Geltung hier, weil nur eine kleine Anzahl von Studenten herkommt und ihr Brotstudium der Theologie, Rechtswissenschaft und Medizin hier betreibt et de la manière, que ces sciences se traittent jusques à présent, les mathematiques n'ŷ sont point necessaires: ainsi cette jeunesse ne veut pas s'en embarrasser. Ferner sind die Einkünfte der Universität sehr mittelmässig und der Krieg macht ihre Zusammenbringung noch schwieriger, so dass er glaubt, es werde den Herren ein Vergnügen machen, ihnen ein Mittel zu zeigen, wie sie sich seiner ganz entledigen und sein Fach mit dem eines der anderen Professoren verbinden könnten, der dadurch eine nur geringe Vermehrung seines Gehaltes erhalten würde. Auch er würde sehr froh sein, an einem Orte zu leben, wo er an neuen Versuchen arbeiten könne, was in Marburg nicht zu hoffen sei, wo er kaum genug zu leben habe und wo man die meisten Annehmlichkeiten entbehren müsse, die sich mit Leichtigkeit in grossen Handelsstädten finden. So bat er Huygens, ihm in Holland eine Anstellung zu verschaffen. Die Bitte hatte keinen Erfolg. Aber der Kampf ums Dasein hatte zugleich Papins höchste Leistungsfähigkeit angespannt. Denn in demselben Jahre, in dem er sich verstimmt an Huygens wandte, hat er auch die Dampfmaschine erfunden, wodurch sein Name unsterblich geworden ist.

Papin war der erste, der auf Grund der Entdeckungen von Torricelli, Pascal, Otto von Guerike, Huygens und Boyle über den Luftdruck erkannte, dass der Wasserdampf ein einfaches und vorzügliches Mittel sei, um grosse luftleere Räume durch Kondensation herbeizuführen und vermittelst derselben die gewaltige Kraft der darüber befindlichen atmosphärischen Luft nutzbar zu machen. Er kam auf die Erfindung einer Maschine mit Dampf dadurch, dass er eine Pulvermaschine verbessern und namentlich den Übelstand beseitigen wollte, dass man damit nur einen sehr unvollkommen lüftleeren Raum erhalten konnte. Er brachte also statt des Schiesspulvers etwas Wasser in den Cylinder und war sich der weittragenden Folgen dessen, was er nunmehr beobachtete, voll bewusst. Als er in den Acta Eruditorum von 1690 seine „nova methodus ad vires motrices validissimas levi pretio comparandas“ veröffentlichte, gab er als Zweck einen

mannigfaltigen an: z. B. Wasser aus den Bergwerken auszupumpen, Bomben zu werfen, gegen den Wind zu rudern. Insbesondere bespricht er den Vorteil der Anwendung seiner Maschine bei Schiffen gegenüber der Verwendung von Galeerensklaven. Dieser ersten Maschine folgte die bereits 1693 ausgearbeitete, aber erst 1695 veröffentlichte Maschine zu dem besonderen Zweck, die Grubenwasser aus einem Bergwerk des Grafen von Sintzendorf zu entfernen. Diese Maschine wurde durch einen besonders konstruierten Sparofen und durch den Papinschen Blasebalg wirksamst unterstützt. Wohl gelungen war auch der Versuch mit einem Taucherschiff. Das Herabsinken und Emporsteigen mit Hilfe der in ledernen Ärmeln steckenden Ruder gelang vorzüglich. Ein von Papin mit herabgenommenes angezündetes Licht brachte er noch brennend wieder mit empor. Durchaus richtige Beobachtungen führten Papin fast 100 Jahre vor Entdeckung des Sauerstoffes auf Ofenkonstruktionen, welche noch gegenwärtig hochgeschätzt sind. Eine Reihe der wichtigsten Abhandlungen dieser Jahre vereinigte Papin 1695 in dem Buch: „Recueil de diverses Pieces touchant quelques nouvelles Machines“. Papins Maschinenerfindung beruht darauf, dass er vermittelst der Dampfkraft die Kräfte der atmosphärischen und der komprimierten Luft in Wirksamkeit setzt; Watt aber erfand die erste Dampfmaschine, an welcher die Dampfkraft zur alleinigen vollen Geltung gelangt.

Der Zweifel an allem und das Leugnen der Gewissheit der äusseren Sinne waren der Ausgangspunkt für die Angriffe der Theologen gegen den Cartesianismus, da dadurch auch die Wahrheit und Gewissheit der christlichen Religion in Gefahr gesetzt schien. Wie anderwärts, so trat auch in Marburg die theologische Fakultät unter ihrem Dekan Gautier gegen einige Professoren der philosophischen auf, deren Dekan damals Papin war, Klage führend, weil gewisse neophilosophie (darunter Papin selbst) gewisse neuerliche, der christlichen Religion zuwiderlaufende Grundsätze zu behaupten und zu lehren sich unterständen. Ein Erlass des Landgrafen an der Universität verfügte, dass den Philosophen nicht zu gestatten sei, dergleichen Ärgernis gebende Lehren vorzutragen und sich in theologische Dinge einzumischen, doch solle sich die theologische Fakultät mit der philosophischen vertragen. Es kamen persönliche Reibereien zwischen Gautier und Papin und namentlich zwischen den beiderseitigen Frauen hinzu und ein Streit zwischen Papins Frau und der eines französischen Perückenmachers. Papin liess für seine Familie eigenmächtig die Stühle in der Kirche höher hinaufrücken, es kam schliesslich so weit, dass Papin von seinem Ältestenamt in der französischen Gemeinde enthoben und von den Sakramenten ausgeschlossen wurde. Verschiedene Friedensversuche schlugen fehl. Der Vizekanzler beantragte aber die Ernennung einer Kommission zur Entscheidung der Sache und eine Entschliessung darüber, ob überhaupt von der französischen Gemeinde

nach Maßgabe der früher in Frankreich geltenden Kirchenordnung durch Presbyterien oder selbstgesetzte synodale Veranstaltungen bindende Beschlüsse gefasst werden dürften oder ob nach der hessischen Landeskirchenordnung verfahren werden müsse. Indem aber der Vizekanzler diese prinzipielle Frage zur Entscheidung stellte, erhielt die an sich unbedeutende persönliche Sache eine Bedeutung für die ganze Zukunft der französisch-reformierten Kirche in Hessen. Alle Instanzen der französischen Kirche Hessens schlossen sich, um diese Verfassung zu behaupten, fest zusammen, unterlagen aber dem monarchischen Staatskirchenregiment. Dieses erzwang die Wiederzulassung Papins zu den Sakramenten.

Der Landgraf Karl war damals voller Pläne. Ein neuer Hafen, ein Kanal, Wasserkünste und andere zahlreiche Projekte machten ihm die Anwesenheit Papins in Kassel erwünscht. Dieser blieb seit 1695 trotz wiederholten Einspruchs der Universität daselbst mit Gehalt und Titel des Universitäts-Professors, zu dem 1699 noch der eines Hessischen Rates hinzukam. Papin besprach alle seine wissenschaftlichen Pläne, insbesondere auch seine Versuche, die Dampfmaschine zu verbessern, mit Leibniz. Der Briefwechsel zwischen beiden gewährt einen Einblick auch in die technischen Leistungen dieses grossen Philosophen. Dieser überliess freilich die Ausführung der Experimente jenem, eignete sich aber die Resultate der Experimente sofort an und schlug neue vor, so dass bis zu einem gewissen Grade beide zusammenarbeiteten. Mit Staunen erkennen wir den Anteil, den der Mann, welchem die Naturwissenschaft die Erfindung der Infinitesimalrechnung verdankt, auch an der Erfindung der Dampfmaschine genommen hat. — Eine Reihe der verschiedenartigsten Versuche Papins lösten sich ab, so solche, Glas und andere Körper zu schmelzen, Schwefel zu verbrennen, Fleisch und Früchte zu konservieren. Auch Fische wollte er konservieren. „Si cela reussit, schrieb er 1697, il nous sera facile d'avoir en tout temps de la marée fraische à Cassell.“ Diese Versuche mussten auf Befehl des Landgrafen solchen weichen, die den Zweck verfolgten „tacher de penetrer les causes des effets surprenants de la poudre à canon.“ Dann wünschte der Landgraf zu wissen d'où vient la salure des fontaines salées. Zur Beantwortung dieser Frage waren grössere Wassermassen auf eine beträchtliche Höhe zu heben und dazu schien am geeignetsten la force du feu. Damit eröffneten sich für Papin die Aussichten zur Erfüllung längst gehegter Wünsche. Mit um so grösserem Eifer ging er ans Werk, als er wohl erkannte „les difficultez qui se rencontrent tousjours dans de telles entreprises et qui ne se peuvent surmonter que par une assiduité extraordinaire.“ Zunächst baute er einen Ofen zur Herstellung eiserner Retorten. Diese aber benötigte er für die Form, die er der Dampfmaschine nunmehr zu geben gedachte. Nicht allein der Saugkraft des sich niederschlagenden Dampfes wollte er sich bei derselben bedienen,

sondern er wollte nunmehr auch „la force de la pression que l'eau exerce sur les autres corps en se dilatant dont les effets ne sont pas borné comme sont ceux de la suction“ benutzen. Damit sprach er den Gedanken, der der Hochdruckmaschine zu Grunde liegt, zuerst aus. Mitten in diesem Schaffen und Planen erhielt Papin von den Mitgliedern der Londoner Royal Society die Berufung zum Kurator ihrer Experimente. Papin liess sich durch die Versprechungen des Landgrafen und dadurch, dass ihn dieser zu seinem Rate ernannte, in Kassel halten. Allein die günstigen Verhältnisse liessen für Papin bald nach. Zuerst trat eine Reise des Landgrafen nach Italien, dann eine Papins selbst nach Holland hindernd dazwischen. Dazu brachten Papins Versuche nach einer neuen Wurfmaschine diesen in den unverdienten Geruch des Schwindlers. Ferner wurde der Fürst nur allzusehr durch die äussere Politik von den Künsten des Friedens abgehalten. Schliesslich stellte Papin mit einer neuen Maschine im Treppenhause des vom Landgrafen Karl 1695 erbauten Kunsthauses Versuche an. Aber es war gegen seine ausdrückliche Vorhersage schlechter Kitt verwendet und es drang Wasser ein, dann liessen die Arbeiter das Rohr verstopfen. Abwesenheit des Landgrafen trat hindernd dazwischen, ein neugefertigtes Rohr wurde Papin wieder weggenommen — da riss ihm die mühsam bewahrte Geduld. Sein Entlassungsgesuch hatte diesmal Erfolg.

Mit Eifer begann er nun sofort die Vorbereitungen zu seiner Abreise. Doch hatte er noch mancherlei abzuwickeln. Glücksgüter hatte er ja nicht gesammelt. Aber sein wertvollstes Besitztum, ein kleines Schiff, auf welches er für sein Fortkommen in England die grössten Hoffnungen baute, musste er mitnehmen. Es ist dies ein Apparat, mit welchem Papin die letzten grösseren Versuche anstellte und der zu der ganz unbegründeten Annahme Veranlassung gegeben hat, Papin sei bereits im Besitz eines Dampfschiffes gewesen. Das Schiff war 1703—1704 für eine Belastung von 4000 Pfund erbaut. „Je n'ay point“, berichtet er 13. März 1704 ganz ausdrücklich, „préparé celuy ci pour ŷ emploier la force du feu parce que ce n'est pas à moy d'entreprendre trop de choses à la fois“. Um das Schiff nach England zu schaffen, wusste er keinen anderen Rat als mit ihm das Wasser herunter bis Bremen zu fahren, es dort auf ein Seeschiff laden und so über die Nordsee bringen zu lassen. Dazu waren aber einige weitere Vorbereitungen nötig. Zunächst war es auf der Fulda zu prüfen und dies auch schon deshalb, weil der Landgraf noch die Versuche damit zu sehen wünschte. Diese fielen höchst befriedigend aus. Die Ruderräder bewährten sich vortrefflich. Das Schiff fuhr mit gleicher Geschwindigkeit gegen den Strom wie mit demselben, und das Gelingen dieser Versuche war die letzte Freude, die Papin erlebte. Der misslichste Punkt der Vorbereitungen waren die Verhandlungen mit Münden. Die dortige Schiffergilde hatte vermöge ihres ausgedehnten Stapel-

rechtes die Befugnis, jedem fremden Schiff die Vorüberfahrt an ihrer Stadt zu verweigern. Der Versuch, einen Passierschein für Münden zu erlangen, schlug fehl. Auf die Erlaubnis des Drosten von Zeuner in Münden allein wagte Papin die Reise nicht; aber aus Münden selbst erhielt er die widersprechendsten Nachrichten: ein Mündener Schiffer Namens Lodwig erbot sich Papins Schiff ins Schlepptau zu nehmen. Die Akten des Amtes Münden bringen über das Weitere folgenden Bericht von Zeuners vom 27. September 1707: „Nachdem ein hiesiger Schiffer, nahmens Lodwig, vor etwa 3 Jahren bey mir angemeldet, dass ein gewißer Frantzoß zu Cassel eine kleine Maschine gemachet und inventirt, wornach große Schiffe ohne Mast und Segel könnten gebauet und mit bloßen Rädern regiret werden, dannenher sich bey mir erkundiget, ob er eß mit seinem Schiffe herunter bringen dürffte, hinzusetzend, daß es ein Werk von keiner Importanz und ein rein Kinderwerk wäre; habe ich es erlaubet. Ich habe auch als es vorgestern über der Schlacht angekommen und gedachter Schiffer es bei mir angezeiget, es selbst in Augenschein genommen, den Mann, welcher es inventirt und bisher Medicus zu Cassel gewesen, nahmens Papin gesprochen, seine Päße und einen Brieff von Hrn. Geheimen Hofrath Leibniz gesehen und wahrgenommen, daß es ein bloßes Model zu obgedachten Schiffbau und gar kein Schiff sey, mit welchen man ohne Gefahr nur bis Gimbte fahren können, auch daß sein Vorhaben, es danägst auf ein großes Schiff laden zu lassen und seine Kunst und Invention der Königin von Engelland dadurch sehen zu lassen und sich zu recommendiren. Ich habe darauf keine Gedanken mir machen können, dass diese Machine dem Privilegio so hiesige Schiffer-Gilde hat, praeiudiciren könne. Dehm ohngeachtet sind die von der Schiffer-Gilde ohnbefugt und ohne sich deßwegen beim Ambt anzumelden zugefahren, haben die Machine arrestiret und ist auch dem Medico Papin so wenig recht wiederfahren, dass er selbige zurücklassen und davon reisen müßen“. Es blieb auch nicht bei blosser Konfiskation des Fahrzeuges, es wurde auch „vorheert“; die Schiffer liessen sich wohl zu diesem Vorgehen, zu dem sie schwerlich berechtigt waren, durch den von Papin geleisteten Widerstand verleiten. Mit dem Verlust des Schiffes hat Papins Leben Schiffbruch gelitten.

Papin reiste nun zu Fuss weiter und kam schliesslich glücklich nach England. In London machte er die grössten Anstrengungen, durch neue Vorschläge oder durch Zurückgehen auf bereits früher bearbeitete Ideen nicht etwa seine Lage zu verbessern, sondern seine Existenz zu fristen. Es ist der härteste Kampf ums Dasein, den zu führen er gezwungen ist und in welchem er unterliegt. Einen sicheren Untergang sah er vor sich, wenn ihm die Royal Society nicht half, und diese verweigerte ihre Hilfe und bereitete ihm allerhand Demütigungen. So erfand Papin ein unaufschliessbares Schloss; nachdem aber die Handwerker aus Zorn die Kassette zerstört hatten, kam er um

seinen Lohn. Und ähnlich erging es ihm auch sonst. Papin scheint 1711 in London gestorben zu sein. In seinem letzten uns erhaltenen Brief sagt er: „Je suis dans une triste position puisque, même en faisant bien, je soulève des ennemis contre moi; cependant malgré tout cela je ne crains rien, parce que je me confie au Dieu tout-puissant."

Wenn wir bedenken, welcher Mut, welche enorme Ausdauer dazu gehörten, mit den Hilfsmitteln der damaligen Zeit, die ihm überdies meist nur unvollkommen zu Gebote standen, seine Experimente anzustellen, wenn wir weiter im Auge behalten, unter welchen schwierigen äusseren Verhältnissen dies geschehen musste, wie den Experimentator oft genug Nahrungssorgen, immer unverständiger Widerstand hemmte, dann werden wir wohl dem Urteil Gerlands beipflichten, dass es wenig Männer gegeben hat, die es ihm gleichzuthun im stande gewesen wären. Dabei ist keines seiner Resultate durch Zufall erhalten, alle sind Früchte angestrengter geistiger Arbeit. Es zog ihn nicht wie einen Abenteurer von einer Aufgabe beliebig zur anderen, in konsequenter Folge schloss sich die folgende Arbeit an die früheren an; wurde er dadurch auf theoretische Erörterungen geführt, so wich er ihnen nicht aus, kehrte aber sobald als möglich auf seinen eigentlichen Platz im Laboratorium zurück. In der Gesamtheit aller dieser Umstände lag gleichzeitig das tragische Moment seines Lebens. Der Standpunkt der Technik des 17. Jahrhunderts sowie die Unmöglichkeit der Verwirklichung seiner Ideen, für die sich erst unser Jahrhundert reif gezeigt hat, hätten ihm nie erlaubt sie so auszuführen, wie er sie im Geiste sah.

Rezensionen.

Über eine neue graphische Methode der Zusammensetzung von Kräften und ihre Anwendung zur graphischen Bestimmung von Inhalten, Schwerpunkten, Statischen Momenten und Trägheitsmomenten ebener Gebilde von Herm. Jos. Hollender. Mit vier lithographierten Tafeln. Leipzig 1896, Verlag von B. G. Teubner. 44 S.

Vielfach wird zur Bestimmung statischer Momente beliebig in der Ebene zerstreut liegender Kräfte eine Methode angewendet, wobei die Kräfte in Komponenten zerlegt werden, von denen die einen durch den Punkt der Ebene gehen, für welchen das Moment bestimmt werden soll, und von denen die anderen entweder in eine Gerade oder einen um jenen Momentenpunkt mit beliebig gewähltem Radius gezogenen Kreis berühren. Da nun die Summe der statischen Momente der durch den Momentenpunkt gehenden Kom-

ponenten Null ist, so ist die Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte gleich dem Produkte aus der Summe der übrigen Komponenten in die Entfernung des Momentenpunktes von der Geraden, oder von der Peripherie des Kreises. Diese Methode, allgemein angewendet auf beliebig in der Ebene zerstreut liegende Kräfte, liefert nun ein Kräfte- und ein sogenanntes „Komponentenpolygon", welche an Stelle des Kräfte- und Seilpolygons der graphischen Statik treten. Da die Polygonseiten den gegebenen Kräftekomponenten entsprechen, so wurde dafür der Name „Komponentenpolygon" gewählt. Das Übergewicht der neuen Methode gegenüber der graphischen Statik liegt in der konstanten Polentfernung auch für beliebig in der Ebene gerichtete Kräfte, was bei dem Seilpolygon nur bei parallel gerichteten Kräften stattfindet.

Im ersten Abschnitt werden die Hilfsmittel vorausgeschickt, die auch die graphische Statik bedarf. Statt aber auf diese einzugehen, setzt der Verfasser das Zustandekommen des Komponentenpolygons auseinander, und zwar unter Annahme verschiedener Bedingungen. In dem letzten Abschnitt wird die Nützlichkeit der neuen Methode an der Hand praktischer Beispiele dargethan. Wie gross der Wert solcher graphischer Methoden, das empfindet derjenige am besten, welcher sich lange damit beschäftigt hat.

B. Nebel.

Alessandro Sandrucci. **Le teorie su l'efflusso dei gas e gli esperimenti** di G. A. Hirn. Firenze 1895. Tipografia minori corrigendi. 60 S.

In dem kleinen Schriftchen wird die Theorie zu dem Hirnschen Experiment gegeben und sodann die Übereinstimmung der Theorie mit der Praxis geprüft.

B. Nebel.

Energie. — Arbeit. — Schnelles Arbeiten ist teurer als langsames Arbeiten. — Die Kräftediagramme. — Die spezifische Wärme der Luft (der Gase). — Der Vorgang, wenn Luft infolge von Erwärmung sich auf grösseres Volumen ausdehnt. — „Energie" im allgemeinen. Von Paul Käuffer. Mainz 1896, Verlag von Viktor von Zabern. 50 S.

Es handelt sich um eine populäre Darstellung der im Titel angegebenen Arbeitsvorgänge, insbesondere bei der Wärme, unter Ausschluss jedweder Mathematik.

B. Nebel.

Streiflichter auf eine neue Weltanschauung in Bezug auf die Beleuchtung, Erwärmung und Bewohnbarkeit der Himmelskörper, eine astrophysisch-metaphysische Hypothese über das innere Walten der Natur und die sich daraus ergebenden Konsequenzen auf die Ethik und Religion nebst einer Plauderei über die Möglichkeit eines „Weltunterganges". Von Wilhelm Zenker. Siebente (1000) erweiterte Auflage mit

einer Reihe offiziell wissenschaftlicher Zustimmungen. Braunschweig 1895, C. A. Schwetschke und Sohn. 88 S. Preis M. 1.

Bei dem grossen Titel kann sich die Rezension beschränken auf das Wesen der Theorie, welches in einer Annahme von positivem (Sonnen-) Magnetismus und negativem (Erd-)Magnetismus besteht.

B. Nebel.

Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. Par P. Appell et E. Lacour. Paris 1897, Gauthier-Villars. IX und 421 S.

Das Bedürfnis, ein in die Theorie der elliptischen Funktionen einführendes Buch zu besitzen, ist seit längerem oft wiederholt geäussert. Das seinerzeit vorzügliche Buch von Durège, welches dem Zwecke der elementaren Einführung in die genannte Theorie entsprach, ist heute nicht mehr recht brauchbar, nachdem sich jetzt Weierstrass' Theorie der elliptischen Funktionen allgemeiner eingebürgert hat. Eben deshalb sind neuerdings von verschiedenen Seiten Bücher geplant, welche einen den modernen Ansprüchen entsprechenden Ersatz des Durègeschen Werkes zum Ziele haben.

Diesseits gab vor wenigen Wochen Herr Burkhardt einen ersten Band seiner funktionentheoretischen Vorlesungen heraus, welcher eine Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen liefert, und zwar unter direktem Hinblick auf eine im zweiten Bande zu entwickelnde Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen. Ungefähr zu gleicher Zeit mit Burkhardts erstem Bande liessen die Herren Appell und Lacour in einem Bande ihre „Prinzipien der Theorie der elliptischen Funktionen" erscheinen. Die beiderseitigen Werke können aber sehr wohl neben einander bestehen; denn sie weichen in ihren Grundauffassungen und Methoden stark von einander ab.

Die Herren Appell und Lacour haben sich betreffs der allgemeinen funktionentheoretischen Sätze, welche sie beim Leser voraussetzen, auf das allernotwendigste beschränkt. Sie entwickeln diese Grundsätze im Kapitel I und grenzen dadurch die Mittel ab, mit denen die späteren Untersuchungen zu arbeiten haben. Das Charakteristische ist gänzliche Vermeidung der „konformen Abbildung" und alleiniger Aufbau der funktionentheoretischen Begriffe auf Grund der Potenzreihenentwickelungen. Es darf dieser Standpunkt in einem französischen Lehrbuche nicht Wunder nehmen, und er ist überdies bei dem didaktischen Zwecke des Buches (von dem gleich noch die Rede sein wird) gewiss zu verteidigen. Gleichwohl hat die Ausschaltung der konformen Abbildung (oder, wenn wir noch deutlicher sein sollen, der Riemannschen Anschauungsweisen) auch ihre fatalen Folgen; vornehmlich werden letztere fühlbar bei den Realitätsbetrachtungen, von denen noch berichtet werden wird. Als wichtiges funktionentheoretisches Werkzeug werden im Kapitel I die Sätze über Definition der Funktionen aus hinreichenden und notwendigen Bedingungen (z. B. Eindeutigkeit, singulären Punkten etc.) unabhängig vom analytischen Ausdruck entwickelt. Eben auf dieser Grundlage erwächst der später so häufig angewandte Schluss

auf die Identität zweier in verschiedenen Gestalten vorgelegten Funktionen. Beim Beweise der fraglichen Grundsätze benützen die Verfasser den Satz von der Existenz des wahren Konvergenzkreises einer Potenzreihe als wichtigstes Fundament. Aber diesen letzteren Satz geben sie einfach ohne Beweis an. Ich glaube nicht, dass die Mehrzahl der Leser diesem Verfahren an einer so wichtigen Stelle des Buches beistimmen werden. Es hätten doch, wenn die Darstellung des Kapitels I an dieser Stelle nicht unterbrochen werden sollte, dem späteren Brauche entsprechend in einer Note am Schlusse des Buches weitere Aufklärungen gegeben werden können.

Übrigens soll diese letztere Bemerkung die allgemeine Anerkennung nicht hindern, dass die Verfasser den didaktischen Zweck ihres Buches als vor allem maßgeblich angesehen haben. In dieser Hinsicht ist zu bemerken, dass das Buch nicht ausschliesslich, ja nicht einmal vornehmlich für die Studierenden der Mathematik im engeren Sinne bestimmt ist. Für solche kann das Buch nur eine Vorübung geben zum Studium ausführlicher Werke. Die Theorie der Teilung und Transformation mit allen ihren interessanten algebraischen und zahlentheoretischen Anwendungen bleibt hier fast ganz ausserhalb; denn was über die Landensche Transformation sowie über die lineare Transformation im zehnten und dreizehnten Kapitel ausgeführt wird, ist nur als Beigabe anzusehen und gehört nicht mehr dem inneren Wesen des Buches an. Auf der anderen Seite aber ist das Buch vornehmlich für solche Studierende bestimmt, welche die Kenntnis der elliptischen Funktionen bei Problemen der Geometrie, Physik, Mechanik etc. zu verwerten wünschen. Von hier rührt die starke Beschränkung in den theoretischen Grundlagen; und vor allem soll dem gedachten Zwecke auch die Beigabe zahlreicher und interessanter Beispiele aus den genannten Gebieten dienen. Auch ausführliche Berücksichtigung von Realitätsbetrachtungen entspricht den Zwecken der Anwendungen. Die Verfasser sprechen die Hoffnung aus, dass sich der Leser nach Studium des Buches der elliptischen Funktionen mit der gleichen Leichtigkeit bedienen könne, wie der trigonometrischen Funktionen. An Reichhaltigkeit der Beispiele wird unser Buch übrigens noch von Greenhills „Applications of elliptic functions“ übertroffen, wo sich Theorie und Praxis fast vollständig durchdringen. Endlich sei noch erwähnt, dass durch Übungsaufgaben, welche den grundlegenden Kapiteln jedesmal am Schlusse angefügt sind, Gewandtheit im Rechnen mit den elliptischen Funktionen erzielt werden soll.

Was den Entwickelungsgang des vorliegenden Buches im einzelnen angeht, so erwächst die Theorie der elliptischen Funktionen hier auf Grundlage des „Begriffs der doppelten Periodizität.“ Die Funktionen $\sigma(u)$, $p(u)$ und $p'(u)$ werden eben dieserhalb durch ihre Produkt- bez. Partialbruchentwickelungen definiert; und die im einleitenden Kapitel gesammelten funktionentheoretischen Hilfsmittel gestatten, weiter in die Natur dieser Funktionen, sowie allgemeiner der doppeltperiodischen Funktionen einzudringen. Dieser Eingang in die Theorie der elliptischen Funktionen hat etwas besonders Elegantes (obschon er die algebraische Seite und die Um-

kehrtheoreme stark zurückdrängt). Besonders zu bemerken ist noch, dass die Verfasser die Analogie zwischen den rationalen, trigonometrischen und elliptischen Funktionen in Ansehung ihrer Zerlegungen in Faktoren einerseits und Partialbrüche anderseits überall hervortreten lassen. Hierdurch wird für das einführende Studium die Auffassung sehr erleichtert.

Realitätsbetrachtungen werden erstlich für den Fall ausgeführt, dass das Periodenparallelogramm ein Rechteck ist, sodann aber auch (in einem sehr weit hinausgeschobenen Kapitel) für den Fall eines rhombischen Periodenparallelogramms. Die Werte von u, für welche $p(u)$ und $p'(u)$ reell ausfallen, werden der Grundanlage des Buches entsprechend, nicht ohne mühsame Betrachtungen, aus den Partialbruchentwickelungen der Funktionen entnommen. Hierbei wird überdies noch nicht einmal die Vollständigkeit der gemachten Angaben recht ersichtlich. Hier hätte sich die konforme Abbildung des Periodenparallelogramms auf eine symmetrische zweiblättrige Riemannsche Fläche als ein weit zugkräftigeres Hilfsmittel der Untersuchung erwiesen.

Ein besonderes Kapitel ist dem Studium der Jacobischen „Bezeichnungen" gewidmet. Man darf hier aber nicht ein tieferes Eingehen auf die wesentlichen Beziehungen der Theorien von Jacobi und Weierstrass erwarten. Dieser übrigens besonders interessante Gegenstand hätte sich nur durch ausführliche Heranziehung algebraischer Betrachtungen, sowie der Transformationstheorie durchführen lassen. Der erste Teil des in Rede stehenden Kapitels ist dadurch sehr beschwerlich geworden, dass Jacobis ursprüngliche in den „Fundamenta nova" gebrauchte Bezeichnungsweise und nicht (wie es Jacobi in den Vorlesungen that) die vier ϑ-Reihen an die Spitze gestellt werden.

Die Realitätsbetrachtungen der Jacobischen Funktionen beziehen sich auf den Fall eines rechtwinkligen Periodenparallelogramms.

An die bisher besprochenen Kapitel schliessen sich in der ganzen Anlage und Methode am engsten die Kapitel XI und XII an, welche die doppeltperiodischen Funktionen zweiter und dritter Art behandeln, d. h. diejenigen, welche bei Vermehrungen des Argumentes um Perioden sich um konstante Faktoren bez. Exponentialfaktoren ändern. Diese Funktionen werden ganz nach dem Vorbild der doppeltperiodischen Funktionen im engeren Sinne näher untersucht, in Produkte entwickelt, in Partialbruchreihen zerlegt u. s. w. Von den Funktionen zweiter Art wird eine sehr interessante Anwendung entwickelt auf die Integration der nach Lamé und Picard benannten Differentialgleichungen. Es sind dies homogene lineare Differentialgleichungen der zweiten bez. der n^{ten} Ordnung zwischen x und y, wo die von x abhängenden Koeffizienten der Differentialgleichungen doppeltperiodische Funktionen gewisser Bauart sind.

Etwas mehr für sich stehen die Kapitel VII und VIII, welche den elliptischen Integralen und speziell der Weierstrassschen Normalform (Kapitel VIII) gewidmet sind.

Endlich sollen hier noch die zum Teil sehr elegant entwickelten Anwendungen charakterisiert werden, welche die Herren Verfasser in ihrem Buche (und zwar jedesmal in unmittelbarem Anschluss an die zugehörigen theoretischen Entwickelungen) behandeln.

Um etwa die Anwendungen auf die analytische Geometrie voranzustellen, so ist die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, der Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies, sowie eine sehr interessante Theorie der Wellenfläche entwickelt. Die kurventheoretischen Untersuchungen schliessen sich jedesmal an die Realitätsdiskussionen, so dass den reellen Zügen der Kurven spezielle Beachtung geschenkt wird. Auch ist ein besonderer Abschnitt den konfokalen Flächen zweiten Grades und den elliptischen Koordinaten gewidmet.

Eine reichhaltige und sehr geschickte Auswahl ist aus den Problemen der analytischen Mechanik getroffen.

Neben den natürlich stets wiederkehrenden Beispielen des einfachen und des sphärischen Pendels finden wir hier eine Reihe von Aufgaben aus der Elastizitätstheorie behandelt; so wird vor allem die Theorie der elastischen Kurve sowie Fläche entwickelt.

Die elliptischen Koordinaten werden zu Betrachtungen aus der Theorie der Wärmeleitung in Anwendung gebracht.

Die vorstehenden kurzen Andeutungen werden genügen, um die Vielseitigkeit des hiermit angezeigten Werkes zu bezeugen.

R. Fricke.

Differenzenrechnung. Von A. A. Markoff, autorisierte deutsche Übersetzung von T. Friesendorf und E. Prümm, mit einem Vorwort von R. Mehmke. Leipzig 1896, B. G. Teubner. VI und 194 S.

Durch sinnreiche Kunstgriffe numerische Rechnungen zu kürzen, ist jedenfalls einer der ursprünglichsten Antriebe zum mathematischen Denken gewesen. Und wenn auch die Rechnung im Verfolg der Entwickelung weder die einzige noch die vornehmste Grundlage mathematischer Forschung blieb, so wird doch ein Werk, welches mit interessanten mathematischen Grundsätzen an die Technik des Zahlenrechnens herangeht, allgemeine Beachtung zumal in der gegenwärtigen Zeit gewinnen, in welcher die Mathematik ohnehin bestrebt ist, im Gebiete ihrer praktischen Verwendung an Wirksamkeit und Bedeutung zu steigen.

Die „Rechnung mit endlichen Differenzen“ des bekannten Petersburger Mathematikers wurde auf Anregung der Leiter des Göttinger Mathematischen Seminars durch die Herren Friesendorf und Prümm, welche diesem Seminar im Vorjahr angehörten, ins Deutsche übertragen. Und Herr Mehmke, welcher die Übersetzung mit dem Original verglichen hat, rühmt in einem dem Buche mitgegebenen Begleitwort die Güte und Korrektheit der Übersetzung.

Es ist der Begriff der „endlichen Differenzen der verschiedenen Ordnungen“ einer Funktion $f(z)$, welcher die Grundlage des vorliegenden

Werkes bildet. Diese Differenzen werden symbolisch durch $\Delta f(z)$, $\Delta^2 f(z), \ldots$ bezeichnet, und sie sind bekanntlich definiert durch

$$\Delta f(z) = f(z+h) - f(z),$$
$$\Delta^2 f(z) = \Delta f(z+h) - \Delta f(z), \ldots,$$

wo h ein endlicher Zuwachs des Argumentes ist. Die Verwendbarkeit dieses Begriffs der endlichen Differenz wird nach den verschiedensten Richtungen hin dargelegt. Dabei wird der ganze Stoff in zwei charakteristisch verschiedene Abschnitte zerlegt. Der erste Abschnitt enthält die Mehrzahl der Anwendungen auf die Technik des numerischen Rechnens, auf Interpolation, angenäherte Berechnung bestimmter Integrale, Herstellung und Benutzung mathematischer Tafeln etc. Der zweite Abschnitt wird dem grösseren Teile nach mehr den Theoretiker interessieren. Es wird hier von der „Summation der Differenzengleichungen" gehandelt, wobei die elementare Theorie der „Integration der Differentialgleichungen" bis in die Einzelheiten hinein vorbildlich gewesen ist.

Äusserlich wird nicht der Begriff der Differenzen $\Delta f(z)$, $\Delta^2 f(z), \ldots$ der Funktionen vorangestellt, sondern den Eingang bildet ein Kapitel über Interpolation.

Das Problem ist: Gegeben sind von einer Funktion $f(z)$ die Werte für m reelle Argumente $a_1, a_2, \ldots a_m$, sowie überdies die Werte der zugehörigen Ableitungen bis zu den Ordnungen

$$(\alpha_1 - 1), \quad (\alpha_2 - 1), \ldots (\alpha_m - 1);$$

hieraus ist die Funktion für ein neues reelles Argument x zu berechnen. Die Lösung wird in der Art vollzogen, dass man $f(z)$ durch eine ganze rationale Funktion $F(z)$ möglichst niederen Grades approximiert und alsdann $F(x)$ als Näherungswert von $f(x)$ angiebt. Die Taylorsche Reihe, die Lagrangesche Interpolationsformel und die Newtonsche Formel für die „Interpolation durch äquidistante Intervalle" ordnen sich dem allgemeinen Ansatze unter. Die letztere Formel giebt den Anlass ab zur Einführung der Differenzen $\Delta f(z)$, $\Delta^2 f(z), \ldots$, welche demnächst insbesondere für ganze und rationale Funktionen spezieller Bauart, sowie allgemein in ihrem Zusammenhange mit den Differentialquotienten der näheren Diskussion unterzogen werden.

Eine erste und besonders wichtige Anwendung der Differenzenrechnung, nämlich die auf Herstellung und Benutzung mathematischer Tabellen, entwickelt das vierte Kapitel. Eine ganze Funktion $f(z)$ vom n^{ten} Grade hat die Eigenschaft, dass für sie die Differenzen

$$\Delta^{n+1} f(z), \quad \Delta^{n+2} f(z), \ldots$$

sämtlich verschwinden. Gilt es eine Tabelle der Werte

$$f(a), \quad f(a \pm h), \quad f(a \pm 2h), \ldots$$

anzulegen, so braucht man nur die $(n+1)$ Werte $f(a)$, $\Delta f(a), \ldots \Delta^n f(a)$ zu kennen, um leicht ersichtlich durch einfache Additionen und Subtraktionen alle unbegrenzt vielen Werte $f(a)$, $f(a \pm h), \ldots$ zu berechnen. Hat man

eine Funktion, für welche $\Delta^{n+1}f, \ldots$ nicht verschwinden, so gelangt man durch die eben gekennzeichnete Methode nur erst zu Näherungswerten. Aber die Stärke der Differenzenrechnung besteht darin, dass sie in einem solchen Fall immer gleich durch einige wenige, und zwar ganz elementare algebraische Schlüsse eine Formel zur Kontrolle des Fehlers entwickelt, wobei im vorliegenden Falle Newtons Formel für die Interpolation durch äquidistante Intervalle die Grundlage abgiebt. Die gegebenen Entwickelungen, bei denen übrigens zugleich solche Fehler berücksichtigt werden, welche möglicherweise den primär gegebenen Werten

$$f(a),\ \Delta f(a), \ldots, \Delta^n f(a)$$

anhaften, dienen zugleich zur Kontrolle von Tabellen, welche auf anderem Wege berechnet sind, sowie anderseits zur Angabe von Funktionswerten für solche Argumente, welche nicht direkt in der Tabelle vertreten sind. Es sind dem Kapitel mehrere Beispiele angefügt, unter denen die Funktion:

$$f(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

die Hauptrolle spielt. Eine Tabelle der Werte dieses Integrals hat Herr Markoff bereits früher veröffentlicht. Das fünfte Kapitel handelt von der angenäherten Berechnung bestimmter Integrale $\int_c^d f(x)\,dx$. Der Grundgedanke ist, dass $f(x)$ nach den am Anfang des Werkes erörterten Methoden der Interpolation näherungsweise durch eine ganze rationale Funktion $F(x)$ dargestellt wird, welche letztere leicht integriert werden kann.

Das „Restglied" der Interpolationsformel ermöglicht auch hier die Angabe einer Fehlergrenze. Diese Methode der angenäherten Quadratur wird als „Methode der Parabeln" benannt; an die Stelle der Kurve $y = f(x)$ tritt nämlich $y = F(x)$, welche eine „Parabel n^{ten} Grades" darstellt, falls $F(x)$ eine ganze Funktion dieses Grades ist.

Benutzt man insbesondere die Lagrangesche Interpolationsformel:

$$F(x) = \frac{\omega(x)}{(x-a_1)\,\omega'(a_1)} f(a_1) + \frac{\omega(x)}{(x-a_2)\,\omega'(a_2)} f(a_2) + \cdots + \frac{\omega(x)}{(x-a_m)\,\omega'(a_m)} f(a_m),$$

unter $\omega(x)$ die ganze Funktion $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$ verstanden, so ergiebt sich die Formel:

$$1)\qquad \int_c^d f(x)\,dx = A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + \cdots + A_m f(a_m),$$

wo die von $f(x)$ unabhängigen „Quadraturkoeffizienten" A_k gegeben sind durch:

$$A_k = \int_c^d \frac{\omega(x)\,dx}{(x-a_k)\,\omega'(a_k)}.$$

Um die Genauigkeit zu erhöhen, kann man eine Unterteilung des Integrationsintervalls vornehmen, und zwar liegt es hier am nächsten, die Teilintervalle einander gleich zu wählen. Durch Kombination dieser Maßnahme mit den eben skizzierten Ansätzen finden sich die wohlbekannten Formeln ein, welche die „Methode der Trapeze" und die „Simpsonsche Regel" darstellen. Bezieht man anderseits die eben unter 1) angegebene Formel auf äquidistante Teilpunkte:

$$a_1 = c, \quad a_2 = c + \frac{d-c}{m-1}, \quad a_3 = c + 2\frac{d-c}{m-1}, \cdots, a_m = d,$$

so gelangt man zur „Methode von Cotes", welche diesen Namen trägt, weil Cotes die sich hier einstellenden Quadraturkoeffizienten für $m = 2$ bis 11 berechnet hat.

Gauss Methode der angenäherten Quadratur beruht nicht auf der Auswahl äquidistanter Teilpunkte $a_1, a_2, \cdots, a_m$; vielmehr erhöht man die Genauigkeit durch eine andere Auswahl der $a_1, \ldots, a_m$, und zwar ergiebt sich die Möglichkeit einer derartigen Auswahl der a_k, dass die Formel 1) für jede den Grad $(2m-1)$ nicht übersteigende ganze Funktion exakt giltig ist. Man hat zu diesem Zwecke die a_k mit den Nullpunkten der ganzen Funktion m^{ten} Grades:

$$\omega(z) = \frac{1}{2m(2m-1)\cdots(m+1)} \frac{d^m (z-c)^m (z-d)^m}{dz^m}$$

zu identifizieren, welche letztere bis auf einen numerischen Faktor und eine lineare Substitution des Argumentes die Kugelfunktion $P_m(x)$ vorstellt. Das interessante Eingreifen der Kugelfunktionen in die Lehre von den angenäherten Quadraturen giebt Gelegenheit, auf einige hier in Betracht kommende Eigenschaften der Funktionen $P_m(x)$ noch besonders zurückzukommen.

Übrigens werden die zuletzt skizzierten Entwickelungen noch verallgemeinert, indem an Stelle von $\int_c^d f(x)\,dx$ das Integral $\int_c^d g(x)\,f(x)\,dx$ untersucht wird, wobei $g(x)$ irgend eine Funktion von x ist und die Interpolationsformeln auf $f(x)$ in Anwendung gebracht werden.

Nach diesen ausführlicheren Darlegungen sei es erlaubt, über den Inhalt des zweiten Teiles des Markoffschen Werkes nur einige kurze Andeutungen zu geben.

Das Problem der Berechnung einer Funktion $F(x)$ bei gegebener Differenz $\Delta F(x)$ führt zur „Summation", dem Gegenstück der „Integration" der Differentiale; und es bestehen hier, wie die nächsten Ausführungen (achtes Kapitel) zeigen, mannigfache Analogien zwischen den beiderseitigen

Operationen. Eine Menge interessanter Reihensummationen bilden die nächsten Beispiele. Des weiteren tritt die Eulersche Formel:

$$f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(b)=\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx$$
$$+A_1[f(b)-f(a)]+A_2h[f'(b)-f'(a)]+\cdots$$
$$+A_{m-1}h^{m-2}[f^{(m-2)}(b)-f^{(m-2)}(a)]+R_m$$

in den Mittelpunkt der Betrachtung; hierbei ist $h=\frac{b-a}{n}$ und R_m bedeutet ein Restglied, welches zunächst in Integralgestalt erscheint; die Koeffizienten A sind numerisch, und zwar ist

$$A_{2k}=\frac{(-1)^{k-1}B_k}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k-1)2k},$$

wo B_k die k^{te} Bernoullische Zahl ist; die A mit ungeradem Index sind indes gleich Null bis auf A_1, welches gleich $-\frac{1}{2}$ ist. Die Eulersche Formel gestattet eine Reihe interessanter Anwendungen und zwar sowohl nach Seiten der Reihensummierung als zur Berechnung von Näherungswerten bestimmter Integrale.

Des weiteren folgen allgemeine Erörterungen über „Differenzengleichungen“, sowie spezielle Ausführungen über „lineare“ Differenzengleichungen mit oder ohne rechte Seite. Hier ist überall die Analogie zu den Differentialgleichungen leitend, wie schon oben angedeutet wurde.

Im letzten Kapitel wird von der Anwendung der Doppelsummen auf Umformung von Reihen gehandelt.

R. Fricke.

E. Pascal, **Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite.** Milano, U. Hoepli, XII und 330 S.

In dem neusten Doppelbändchen der Hoeplischen Sammlung behandelt Herr Pascal erstlich die Variationsrechnung und im zweiten Teile die Differenzenrechnung. Der erste Teil, die Darstellung der Variationsrechnung, dürfte als besonders wertvoll gelten. Es sind nämlich hier nicht nur die Grundprobleme und die Anwendungen der Variationsrechnung behandelt, sondern vor allem kommt die geschichtliche Entwickelung derselben des ausführlichen zur Geltung, wobei jedoch zu erwähnen ist, dass Weierstrass' Vorlesungen einigermassen ohne Wirkung bleiben. Auch hat Herr Pascal mit grosser Sorgfalt die Litteratur jedes einzelnen Gegenstandes nachgewiesen. Weniger wichtig (für das deutsche Bedürfnis) ist der zweite, die Differenzenrechnung betreffende Teil, nachdem erst vor kurzem das grundlegende Werk Markoffs über diesen Gegenstand in deutscher Übersetzung herausgegeben wurde. Mit letzterem Werke bleibt Herr Pascal im wesentlichen in Übereinstimmung. Zu erwähnen bleibt jedoch, dass die Litteraturnachweise etwas ausführlicher sind, als in dem genannten Markoffschen Werke.

R. Fricke.

Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Grösse. Von Dr. MARTIN KRAUSE, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Dresden. Zweiter Band. Leipzig 1897, B. G. Teubner. XII und 306 S.

Der Stoff, welchen Herr Krause im zweiten Bande seines in der Überschrift genannten Werkes behandelt, gruppiert sich um vier Hauptgesichtspunkte.

Erstlich gilt es, die bereits im 1. Bande entworfene Transformationstheorie weiter auszubauen. In der That bleibt noch übrig, die mannigfachen nur von den Perioden abhängenden Koeffizienten in den Transformationsgleichungen auf ihre gegenseitigen Beziehungen zu untersuchen. Die auf Grund des Hermiteschen Transformationsprinzips zu gewinnenden allgemeinen Additionstheoreme der ϑ-Funktionen sind die Quellen, aus denen der Herr Verfasser die gemeinten Beziehungen ableitet.

Die eleganten analytischen Entwickelungen des zweiten Abschnitts dürften, wie entsprechend im Referat über den ersten Band bereits angedeutet wurde, eine Hauptstärke des Buches ausmachen. Das Problem ist, die doppeltperiodischen Funktionen aller drei Arten in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Neben eigenen Untersuchungen des Herrn Verfassers kommen hier Arbeiten von Appell und Halphen zur Geltung.

Um seine Untersuchungen über die Picardschen Differentialgleichungen im Zusammenhange vortragen zu können, entwickelt Herr Krause an dritter Stelle die Grundsätze der Theorie der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Es handelt sich um die grundlegenden Untersuchungen von Herrn Fuchs, betreffend die Existenz und Anzahl der Integrale, die singulären Punkte, die determinierende Fundamentalgleichung u. s. w.

Endlich kehrt viertens der Herr Verfasser zu seinen eigenen Untersuchungen der letzten Jahre zurück, indem er die allgemeinen Ansätze der Fuchsschen Theorie am Spezialfalle der Picardschen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten eindeutige doppeltperiodische Funktionen sind, zur Durchführung bringt. Diese Differentialgleichungen werden zumal für die niedersten Ordnungen und für kleine Anzahlen der singulären Punkte nach allen Richtungen hin in interessanten Einzeluntersuchungen durchforscht.

In der Vorrede benutzt Herr Krause die Gelegenheit, gegenüber meiner Besprechung des ersten Bandes in gewissen drei Punkten seine Anschauungen nochmals zur Geltung zu bringen; und es ist diese Vorrede auszugsweise auch in dem 4. Hefte des 42. Bandes der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht worden. Die Ausführungen des Herrn Verfassers betreffen:

1. die Beziehung der Weierstrassschen zur Jacobischen Theorie;
2. den Gebrauch anschaulicher Hilfsmittel bei funktionentheoretischen Deduktionen;
3. die Methoden zur Ableitung von Transformationsgleichungen und ϑ-Relationen.

Der Gebrauch geometrischer Methoden für wissenschaftliche oder unterrichtliche Zwecke ist neuerdings so oft zum Gegenstand der Diskussion gemacht, dass sich nachgerade ein Jeder seine feste Meinung in dieser Hinsicht gebildet haben wird. Während ich demnach den zweiten Fragepunkt hier übergehe, glaube ich beim ersten und dritten noch durch ein paar Zeilen zur Klärung der Diskussion beitragen zu können.

Die Beziehung von Weierstrass zu Jacobi möchte ich weniger von der historischen als sachlichen Seite fassen. Die Funktionen der Weierstrassschen Theorie sind gegenüber allen linearen Transformationen invariant, diejenigen der Jacobischen nur gegenüber einem Teile aller linearen Transformationen, während sie sich bei Ausführung anderer ändern. Diese Änderungen sind hinderlich bei der Exposition der Transformationen höherer Ordnung, welche sich demnach im Anschluss an Weierstrass weit durchsichtiger gestaltet. Durch gewisse rationale Verbindungen der Grössen der Jacobischen Theorie entspringen diejenigen der Weierstrassschen (man denke z. B an die Herstellung der Modulformen erster Stufe aus den drei ϑ-Nullwerten ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3). Bei dergleichen rationalen Rechnungen werden die numerischen Koeffizienten in den Potenzreihen nach q für die Grössen der Weierstrassschen Theorie vergleichsweise komplizierter als für diejenigen der Jacobischen. Bei der bekannten Rolle, welche diese Potenzreihen für die Aufstellung der Transformationsgleichungen spielen, tritt die gleiche Erscheinung für die numerischen Koeffizienten dieser letzteren Gleichungen in Kraft. Aus dieser Sachlage entspringt grössere Durchsichtigkeit des prinzipiellen Einblicks bei Weierstrass, grössere formale Einfachheit der Transformationsgleichungen bei Jacobi.

Im dritten Fragepunkte glaube ich durch Ausführung eines Beispiels helfen zu können. Durch die Transformation dritter Ordnung $\omega' = 3\omega$ mögen die drei ϑ-Nullwerte ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 in Θ_0, Θ_2, Θ_3 übergehen. Die Quotienten dieser sechs Grössen mögen alsdann als Funktionen des Periodenquotienten ω in ihrem Verhalten gegenüber linearen Transformationen der Perioden untersucht werden. Sie bleiben bis auf das Zeichen oder bis auf einen Faktor $\pm i$ unverändert bei solchen Transformationen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

in welchen $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 6$ ist. Nun lehrt die Theorie der Modulfunktionen, dass die bei jenen Transformationen invarianten Funktionen von ω sämtlich als algebraische Funktionen eines Gebildes vom Geschlechte $p = 1$ aufgefasst werden können, welches äquianharmonisch und demnach durch eine Gleichung $y^2 = x^3 + 1$ darstellbar ist. In diesen x und y würden dann alle jene Funktionen rational darstellbar sein. Speziell lehrt das Periodenverhalten einer ganzen Reihe von ϑ-Quotienten, dass dieselben bereits rational in y allein sind; hierher gehören Formeln wie:

$$\frac{\vartheta_2\Theta_2}{\vartheta_3\Theta_3} = \frac{4y}{(y+3)(y-1)}, \qquad \left(\frac{\vartheta_3\Theta_2}{\vartheta_2\Theta_3}\right)^2 = \frac{y+3}{y(y-1)},$$

$$\sqrt{\frac{\vartheta_3\Theta_2^3}{\vartheta_2\Theta_3^3}} = \frac{2}{y-1}, \qquad \left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2}\right)^2 = y, \cdots$$

Die zwischen $\vartheta_0, \vartheta_2, \vartheta_3$ $\Theta_0, \Theta_2, \Theta_3$ bestehenden Relationen werden nun identische Gleichungen in y; und die allgemeinste solche Gleichung (wenn anders man diesen Begriff zulässig finden will) liefert die allgemeinste ϑ-Relation unserer Art, deren Gesamtmannigfaltigkeit hier begrifflich übersehen wird. Eine entsprechende Theorie besteht für alle übrigen Transformationsgrade, wobei das Interesse weiterhin durch Eingreifen der Korrespondenztheorie sich noch erheblich steigert. Über den Wert dieser Auffassung habe ich mich nicht nur beim Referat über den ersten Band des Krauseschen Werkes, sondern auch bereits bei verschiedenen früheren Gelegenheiten geäussert; ich möchte mich demnach in dieser Hinsicht keiner Wiederholungen schuldig machen.

R. Fricke.

Grundzüge der Geschichte der Naturwissenschaften. Von Otto Jaeger, Rektor der Königl. Realanstalt in Cannstatt. Stuttgart 1897, Paul Neff Verlag, VIII u. 120 S.

Wir können es nicht anders denn als kühn bezeichnen, wenn ein Schriftsteller es wagt, auf $7\frac{1}{2}$ Druckbogen Grundzüge der Geschichte der Naturwissenschaften zu veröffentlichen. Es gehört dazu entweder ein von der Geschichte der Mathematik bis zur Geschichte der Medizin sich ausdehnendes mehr als unheimliches eigenes Wissen, oder ein unbedingter Glaube an die Unfehlbarkeit der benutzten Geschichtswerke für einzelne Gebiete. Ähnliche Anforderungen wären an einen Berichterstatter zu stellen, welcher sich erlauben wollte, alle Kapitel der kleinen Schrift zu beurteilen, und da wir persönlich diesen Anforderungen nicht zu genügen vermögen, so verwahren wir uns dagegen, als ob diesen Zeilen auch Giltigkeit für die nichtmathematischen Kapitel beigelegt werden wollte. Über die Geschichte der Mathematik handeln aber fünf Kapitel S. 2—6, 20—21, 28—32, 49—50, 74—76, im ganzen etwa 13 Seiten, wovon die letzten $2\frac{1}{2}$ der Geschichte der Mathematik im XIX. Jahrhunderte gewidmet sind. Wir müssen zugestehen, dass uns in dem ersten Kapitel nur eine, allerdings ziemlich kräftige Unrichtigkeit aufgefallen ist: der Mathematiker Hippokrates von Chios wird mit dem Arzte Hippokrates von Kos für eine und dieselbe Person gehalten. Eine Unrichtigkeit gleicher Bedeutung ist es, wenn im vierten mathematischen Kapitel von der Taylorschen Reihe gesagt wird, sie gehe auf Johann Bernoulli zurück. Taylor hat allerdings in seinem Buche auch Bernoullis Reihe benutzt, ohne deren Urheber zu nennen, aber die sogenannte Taylorsche Reihe ist eine ganz andere. Über das fünfte mathematische Kapitel mag die Bemerkung genügen, dass in ihm das Wort Funktionentheorie nicht vorkommt, es sei denn, man wolle als genügenden Ersatz den Ausspruch betrachten: „Charakteristisch für die Fortschritte der Analysis in unserem Jahrhundert ist die von Legendre, Jacobi und Abel gegründete Theorie der elliptischen Funktionen und der Thetafunktionen, welche durch Georg Riemann (1826 bis 1866, aus Breselenz, Lüneburger Heide) und andere zum Teil jetzt noch lebende Mathematiker nach verschiedenen Richtungen hin weiter ausgebildet

wurde." Was soll der Professor der Mathematik oder gar der der Geschichte an einer Mittelschule mit solchen Grundzügen machen?

CANTOR.

Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Begründung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Österreich. Von Prof. FERDINAND JOSEF OBENRAUCH. Brünn 1897, Carl Winiker, 442 S.

In Gestalt von drei aufeinanderfolgenden Programmabhandlungen von 1893, 1894, 1895, welche in der Histor.-litter. Abteilung dieser Zeitschrift Band 39 (S. 187—188), Band 40 (S. 106), Band 41 (S. 77—78) angezeigt worden sind, hat Herr Obenrauch nach einer weit ausgreifenden Einleitung Monges *Géométrie déscriptive* und dessen *Applications de l'Analyse à la Géométrie* geschildert und eine besondere Abhandlung über die wissenschaftliche Pflege der darstellenden und der projektiven Geometrie in Aussicht gestellt. Jene drei Programme, von 97 S. auf 164 S. angewachsen, bilden ein starkes Drittel des uns vorliegenden Bandes. Man erkennt aus dieser stattlichen Vermehrung, dass Herr Obenrauch, weit entfernt davon sich unserer Meinung anzuschliessen, ein Weniger wäre mehr gewesen und hätte Monges Grösse deutlicher hervortreten lassen, nur noch ausführlicher auf die Bücher und Abhandlungen, welche Monges Gedanken bis in unseren Tagen erweitert, vervollkommnet, zum entfernten Ausgangspunkte genommen haben, eingegangen ist. Der Leser findet hier eine mit erstaunlichem Fleisse, welchem Lorias bekanntes Buch über die Entwickelung der geometrischen Lehren einigermaßen vorgearbeitet hat, zusammengetragene Bibliographie. Wir sagen absichtlich er findet sie, denn die Bibliographie eines bestimmten geometrischen Gegenstandes hier unmittelbar aufzusuchen dürfte sich als sehr schwierig erweisen. Nach den fünf ersten Abschnitten: 1. Einleitung, 2. Die Gründung der École normale, 3. Die Gründung der École polytechnique, 4. Monge als Begründer der Infinitesimalgeometrie, 5. Monges soziale Stellung und sein Lebensende, welche wir im Vorstehenden kurz gekennzeichnet haben, beginnt auf S. 165 ein letzter und längster Abschnitt: 6. Die wissenschaftliche Pflege der darstellenden und projektiven Geometrie in Österreich. Es ist die 1895 zum voraus angekündigte besondere Abhandlung, jetzt den Hauptteil des Bandes bildend. Was wir den früheren Abschnitten zum Lobe nachsagen durften, aber auch was wir an ihnen aussetzten, das zeigt sich aufs Neue in diesem sechsten Abschnitte. Herr Obenrauch legt in demselben eine erstaunliche Belesenheit an den Tag. Es ist ihm gelungen, eine Fülle von Stoff aus den verschiedensten Gebieten zusammenzubringen, der uns persönlich und vermutlich gleich uns den meisten Mathematikern fremd war, so z. B. eine eingehende Schilderung des mittelalterlichen Bauwesens, eine Übersicht über die Gründung technischer Hochschulen, eine österreichische Bibliographie der darstellenden Geometrie, wenn wir dieser Wortverbindung uns bedienen dürfen. Wir haben sehr vieles aus dem Buche gelernt, wovon wir in unseren eigenen

Schriften Gebrauch machen können und gern Gebrauch machen werden. Aber nun kommt die Kehrseite. Wir vermissen bei Herrn Obenrauch die Übersichtlichkeit, die zweckbewusste und zweckerfüllende Anordnung. Herüber und hinüber werden wir durch die Jahrhunderte geschleift, ohne dass ein Grund dieses Zickzackweges deutlich hervorträte, und wir fürchten, der Verfasser könnte dadurch die Lesbarkeit seines Buches etwas beeinträchtigt haben. Auf einzelne unbedeutende Unrichtigkeiten hinzuweisen unterlassen wir. Es wäre kleinlich herumnörgeln zu wollen, wo etwa ein unzutreffender Ausdruck sich einschlich, aber jene allgemeine Bemerkung über die Darstellungsweise glaubten wir nicht unterdrücken zu dürfen.

Cantor.

G. Darboux. **Leçon sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal.** Troisième partie. Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres differentiels. Déformation des surfaces. Paris 1894, Gauthier-Villars et fils. 512 S. 15 Frcs.

Entgegen der ursprünglichen Absicht des Herrn Verfassers, das Werk in drei Bänden abzuschliessen, erscheint die Theorie der unendlich kleinen. Deformation in einem besonderen vierten Bande, und es schliesst der dritte Band, dessen grösster Teil (S. 1—444) in dieser Zeitschrift Bd. 39 (1894) S. 74 flg. besprochen ist, mit zwei im Jahre 1894 herausgegebenen Kapiteln (S. 445—512).

In dem ersten derselben werden die Studien über die Flächen konstanter Krümmung abgeschlossen, „indem die Mittel angegeben werden, einige von ihnen zu bestimmen, d. h. indem die Anwendung der vorhergehenden Transformationsmethoden auf die einfachsten Fälle gemacht wird“. Es werden diejenigen Flächen konstanter Krümmung gesucht, deren Krümmungslinien eben oder sphärisch sind, also diejenigen, mit denen sich wohl Enneper zuerst eingehender beschäftigt hat. Auch hier wird von der Voraussetzung ausgegangen, dass zunächst nur die Krümmungslinien der einen Schar sphärisch sind. Anstatt dass aber, wie von Herrn Dobriner, der die Aufgabe in den Acta mathematica IX, 73—104 vollständig gelöst hat, die Koordinaten der Flächen bestimmt werden, wird nur gezeigt, dass man dieselben durch einfache Quadraturen finden kann. Um aus diesen Flächen neue zu erhalten, werden auf dieselben die Transformationsmethoden der Herren Lie und Bianchi angewendet. Es werden zunächst zwei Differentialgleichungen aufgestellt, von denen gezeigt wird, dass, wenn eine derselben sich allgemein lösen lässt, die Anwendung der Bianchischen Transformationsmethode nur noch algebraische Rechnungen ohne Quadraturen erfordert, so z. B. bei der Pseudosphäre. Ausserdem findet sich das bemerkenswerte Resultat: Wenn man durch einfache Quadraturen eine Fläche konstanter Krümmung nebst ihren Derivierten nach der Lieschen Transformationsmethode finden kann, so fordert die successive Anwendung

der Transformationen der Herren Bianchi, Bäcklund und Lie keine neue Quadratur.

Im letzten Kapitel des dritten Bandes werden gewisse Analogien und Beziehungen zwischen den Flächen konstanter Krümmung und den Minimalflächen aufgestellt, indem daran angeknüpft wird, dass die Minimalflächen diejenigen Flächen sind, bei welchen die Tangenten von der Länge Null in jedem Punkte der Fläche konjugierte Tangenten sein müssen. Verallgemeinert man dies und sucht diejenigen Flächen M, bei welchen von jedem Punkte aus die Tangenten, die zugleich eine gegebene Fläche zweiten Grades berühren, konjugierte Tangenten sind, so erhält man im allgemeinen Flächen, die durch dieselbe Differentialgleichung bestimmt sind wie die Flächen konstanter Krümmung. Reduziert sich die Fläche zweiten Grades auf den unendlich fernen Kreis, so erhält man die Minimalflächen. Die allgemeinen Flächen M haben in der nicht-euclidischen Geometrie Cayleys, auf welche genauer eingegangen wird, gleiche Krümmungsradien mit entgegengesetzten Vorzeichen und haben ferner mit den Minimalflächen der euclidischen Geometrie gemeinsam, dass sie innerhalb einer gegebenen Umgrenzung den Flächeninhalt, in Cayleyscher Geometrie gemessen, zu einem Minimum machen.

G. Darboux. **Quatrième partie.** Deformation infiniment petite et représentation sphérique. (Premier fascicule, 1895, p. 1—352.)

Der letzte Band des Werkes beschäftigt sich mit der Theorie der unendlich kleinen Deformation und dem sphärischen Bilde der Flächen. — Vielleicht dürfte es angebracht sein, zunächst den Begriff der unendlich kleinen Deformation klarzulegen. Denken wir uns aus der Gesamtheit der Flächen, die durch Biegung einer Fläche S entstehen, eine Schar herausgenommen, deren einzelne Flächen in einander stetig übergehen, so können wir dieselben durch die Gleichung

1) $$\varphi(X, Y, Z, t) = 0$$

darstellen. Sind für $t = 0$ die Koordinaten der Fläche x, y, z, so ist

2) $$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz,$$

und da wir weiter annehmen können, dass X, Y, Z sich nach Potenzen von t entwickeln lassen, so können wir, weil für $t = 0$. X, Y, Z bez. in x, y, z übergehen, setzen:

3) $$\begin{cases} X = x + tx_1 + t^2x_2 + \cdots \\ Y = y + ty_1 + t^2y_2 + \cdots \\ Z = z + tz_1 + t^2z_2 + \cdots \end{cases}$$

wo $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ Funktionen sind, die von t unabhängig sind und die von den beiden Variabeln abhängen, durch welche die Fläche bestimmt ist. Beschränken wir uns auf die erste Potenz von t, so ist nach 2):

4) $$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$$

und die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung giebt uns die Lösung dessen, was wir das Problem der unendlich kleinen Deformation nennen. Es ist nun

$$X' = x + tx_1;\ Y' = y + ty_1;\ Z' = z + tz_1$$

und daraus $dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + t^2(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2)$. so dass, wenn der Parameter t unendlich klein ist, sich die beiden Flächen S und S' in der Weise Punkt für Punkt entsprechen, dass die Längen entsprechender Kurven sich nur um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf t unterscheiden.

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte M und M_1 der beiden Flächen bilden eine Kongruenz von Geraden, welche man die Leitlinien der unendlich kleinen Deformation nennt. Eine Grösse proportional MM' nennen wir den Modul der Deformation

$$M = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

so dass durch Modul und Direktrix eine unendlich kleine Deformation gegeben ist. Ist übrigens die Frage der unendlich kleinen Deformation für eine Fläche vollständig gelöst, so ist durch einfache Quadraturen die Deformation desselben mit einer Annäherung beliebig hohen Grades zu finden.

Aus Gleichung 4) ist ersichtlich, dass das Problem der unendlich kleinen Deformation gleichkommt der Bestimmung von Flächen, die sich so entsprechen, dass ihre entsprechenden Linienelemente aufeinander normal sind. Daraus ergiebt sich, dass, wenn man eine unendlich kleine Deformation der Fläche S kennt und von jedem Punkte von S auf der Leitlinie der Deformation zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Längen abträgt, die dem Modul der Deformation proportional sind, man ein Paar aufeinander abwickelbarer Flächen erhält. Die Gleichung 4) wird nun dadurch transformiert, dass man $z = p\,dx + q\,dy$ setzt, und man erhält dann durch die Integrabilitätsbedingung zur Bestimmung von z_1 die Gleichung

$$rt_1 + tr_1 = 2ss_1 = 0,$$

wo r, s, t die zweiten Differentialquotienten von z sind. Danach sind dann auch x_1 und y_1 zu bestimmen. Diese Methode wird auf das Paraboloid und die Kugel angewendet.

Im allgemeinen zeigt sich, dass die Charakteristiken der linearen Differentialgleichung, von welcher die Lösung abhängt, die Asymptotenlinien der gegebenen Fläche sind. Besonders einfach wird daher die Gleichung 4), wenn man die Parameter der Asymptotenlinien als unabhängige Variabele einführt. Kann man in dem erhaltenen Systeme

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\lambda \frac{\partial v}{\partial \alpha}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \lambda \frac{\partial v}{\partial \beta}$$

wo λ, wie sich später herausstellt, das negative Produkt der Hauptkrümmungsradien ist und α, β die Parameter der Asymptotenlinien sind,

λ so bestimmen, dass sich das vollständige Integral angeben lässt, so erhalten wir unendlich viele Flächen, deren Asymptotenlinien wir bestimmen und für welche wir das Problem der unendlich kleinen Deformation lösen können. Bringt man die Gleichung der Fläche S auf die Form

$$x = \int\left(\Theta_2 \cdot \frac{\partial \Theta_3}{\partial \alpha} - \Theta_3 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_2 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \beta} - \Theta_3 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

$$y = \int\left(\Theta_3 \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} - \Theta_1 \cdot \frac{\partial \Theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_3 \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} - \Theta_1 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

$$z = \int\left(\Theta_1 \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} - \Theta_2 \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_1 \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta} - \Theta_2 \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

wo Θ_1, Θ_2, Θ_3 Lösungen derselben partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha \partial \beta} = k\Theta$$

und proportional den Richtungskosinus der Normalen zur Fläche S sind, so sind die Koordinaten der allgemeinsten Fläche S_1, die der gegebenen durch Orthogonalität der Linienelemente entspricht, durch die zuerst von Herrn Lelieuvre aufgestellten Formeln bestimmt:

$$x_1 = \int\left(\Theta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

$$y_1 = \int\left(\Theta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

$$z_1 = \int\left(\Theta_3 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \Theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\Theta_3 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \Theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

wo ω die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = k\omega$$

ist. Auch diesen Formeln entsprechende andere für beliebig gewählte unabhängige Variabele werden von Herrn Verfasser abgeleitet.

Aus der vorigen Lösung des Problems ergiebt sich eine Reihe geometrischer Eigenschaften, unter denen hervorzuheben ist, dass den beiden Scharen der Asymptotenlinien auf jeder der beiden sich entsprechenden Flächen auf der anderen ein konjugiertes System entspricht, und dass die Punktgleichung in Beziehung auf dieses konjugierte System gleiche Invarianten hat. Jedem konjugierten System auf einer Fläche mit gleichen Invarianten entspricht sonach eine völlig bestimmte unendlich kleine Deformation der Fläche. Legt man durch alle Punkte von S Ebenen, welche zu den Leitlinien der Deformation senkrecht sind, so umhüllen diese eine Fläche Σ für welche man das Problem lösen kann, wenn es sich für S lösen lässt. Da sich die Asymptoten von S und Σ entsprechen, so entspricht auch jedem konjugierten System auf der einen ein konjugiertes System auf der anderen Fläche. Die der Fläche Σ durch Orthogonalität der Linienelemente entsprechende Fläche A ist mit der Fläche S_1 durch die Eigenschaften verbunden, dass die Tangentialebenen in entsprechenden

Punkten parallel sind und das gemeinsame konjugierte System auf beiden Flächen gleiche Invarianten hat. Wie die Fläche Σ aus S entstanden ist, so kann man aus S_1 eine neue Fläche Σ_1 entstehen lassen, der eine Fläche A_1 mit Orthogonalität entsprechender Linienelemente entspricht. Es stellt sich dann heraus, dass A und A_1 polarreziprok sind in Bezug auf eine Kugel vom Radius $\sqrt{-1}$ mit dem Anfangspunkt der Koordinaten als Mittelpunkt. Zu diesen 6 Flächen erhält man durch gleiche Methoden noch 6 andere Flächen, so dass man im ganzen 12 Flächen hat, die sich in verschiedener Weise paarig entsprechen: 1) mit Orthogonalität der Linienelemente, 2) mit parallelen Tangentialebenen, 3) durch reziproke Polare und 4) als Brennflächen einer und derselben geradlinigen Kongruenz. Aus diesen Zusammenhängen ergeben sich verschiedene Eigenschaften und Beziehungen.

Als Beispiel wird zunächst der Fall untersucht, dass S_1 eine Ebene ist, wobei sich 4 Flächen auf Punkte reduzieren und 4 Ebenen sind. Da hierbei die Fläche Σ die Polarreziproke von S ist in Beziehung auf einen linearen Komplex, so wird anschliessend die Aufgabe behandelt: Alle geradlinigen Kongruenzen zu bestimmen, für welche die Mittelfläche eine Ebene ist. Dieselbe wird dahin specialisiert, dass die Kongruenz von den Normalen einer Fläche gebildet wird. Stellt man eine Beziehung durch Orthogonalität der Linienelemente zwischen einer beliebigen Minimalfläche und einer Ebene her und führt durch jeden Punkt der Ebene eine Parallele zur Normale des entsprechenden Punktes der Minimalfläche, so erhält man die verlangte Kongruenz. Allgemeiner ist die Aufgabe: Alle Flächen zu bestimmen, für welche die Abwickelbaren, die von den Normalen gebildet werden, auf der Evolutenmittenfläche ein konjugiertes System bilden. Die Evolutenmittenfläche wird diejenige genannt, welche der Mittelpunkt des Normalenstückes zwischen den beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten beschreibt. Auch hier muss man von einer Minimalfläche ausgehen und dieses giebt Anlass auf die unendlich kleine Deformation der Minimalflächen einzugehen, welche auf die Integration der allgemeinsten harmonischen linearen Differentialgleichung zurückgeführt wird. Als weitere Beispiele für die Aufsuchung der 12 Flächen werden für S die Kugel vom Radius 1 und die Flächen konstanter negativer Krümmung genommen. Ohne auf die Einzelheiten einzugehen, sei bemerkt, dass im zweiten Falle auf den Flächen A_1 zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden, Flächen, die von den Herren Noss (1888) und Guichard (1890) untersucht worden sind, und zwar entstehen auf die angegebene Art alle Flächen dieser Eigenschaft.

Um in die Theorie der aufeinander abwickelbaren Flächen tiefer einzudringen, lässt der Herr Verfasser nun eine von zwei auf einander abwickelbaren Flächen auf der anderen rollen, so dass je zwei einander entsprechende Punkte zur Deckung kommen. Dabei dreht sich die Fläche um eine durch den Berührungspunkt gehende und in der Tangentialebene

liegende Gerade, und diese aufeinander folgenden Geraden bilden eine Kongruenz, von der eine Reihe von Eigenschaften abgeleitet wird. Das wichtigste Ergebnis ist, dass sich aus einem Paar Flächen, die aufeinander abwickelbar sind, unendlich viele Paare ableiten lassen, die dasselbe sphärische Bild haben. Und umgekehrt liefert jedes Paar von Flächen, die dasselbe sphärische Bild haben, unendlich viele Paare aufeinander abwickelbarer Flächen, und zwar wird das Band zwischen den beiden einander so entfernt scheinenden Theorien der Biegung der Flächen und des sphärischen Bildes durch die cyklischen Systeme gebildet, deren Betrachtung infolgedessen ein besonderes Kapitel gewidmet ist.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Theorien ergiebt sich auch auf analytischem Wege. Sucht man alle Flächen, die ein bestimmtes sphärisches Bild haben, so wird man auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt, wie bei dem Problem der unendlich kleinen Deformation, mit dem Unterschiede, dass im letzteren Falle die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung die Asymptotenlinien der Fläche sind, während sie hier die Krümmungslinien darstellen. Bezieht man die beiden Flächen, welche in den beiden verschiedenen Problemen zu derselben partiellen Differentialgleichung führen, aufeinander, so erhält man die Berührungstransformation Lies, von der schon bei der Besprechung des ersten Bandes die Rede war. Die Übergangsformeln von der einen Fläche zur anderen und einige wenige Eigenschaften der Transformation werden abgeleitet, insbesondere die für die Anwendung wichtigste, dass einer Geraden in dem ersten Raume eine Kugel in dem zweiten, einer geradlinigen Kongruenz ein zweifach unendliches System von Kugeln entspricht. Es ergiebt sich daraus sogleich, dass, wenn man das Problem des sphärischen Bildes für eine Fläche lösen kann, man es auch mit Hilfe einer einfachen Quadratur für alle Flächen lösen kann, die sich aus der ersten durch Inversion ergeben. Wendet man dieses Verfahren auf diejenigen Flächen an, die der Gleichung $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \, \partial y} = 0$ entsprechen, so erhält man alle reellen Flächen, für welche man die vollständige Lösung des Problems finden kann.

Die Flächen, die derselben Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \, \partial y} = k\Theta$$

genügen und für welche man das Problem der sphärischen Abbildungen lösen kann, können auf folgende Weise definiert werden. Wenn man mit z, z' zwei beliebige Lösungen der Gleichung bezeichnet, in eine Form gebracht, für welche die konjugierten imaginären Funktionen σ, σ' definiert sind durch die Quadraturen

$$\omega\sigma = \int \left(\omega \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) dx - \left(\omega \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) dy,$$

$$\omega\sigma' = \int \left(\omega \frac{\partial z'}{\partial x} - z' \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) dx - \left(\omega \frac{\partial z'}{\partial y} - z' \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) dy,$$

wobei ω immer die Lösung vom Modul 1 ist, so kann man, wenn man die Fläche auf das System der Tangential-Koordinaten α, β, ξ bezieht, setzen:

$$\alpha = \frac{z'}{\omega}; \ \beta = \omega\sigma'.$$

Diese beiden Formeln definieren das sphärische Bild der Krümmungslinien. Dann kann man ebenso nehmen:

$$p' = \omega\sigma; \ q' = \frac{z}{\omega}$$

$$\xi = \int (p'd\alpha - q'd\beta) = z\sigma' + \int \left(z'\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial z'}{\partial x}\right)dx - \left(z'\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial z'}{\partial y}\right)dy.$$

Da die Variabeln α und β wie p' und q' konjugiert sind, so kann man unendlich viele reelle Lösungen für ξ erhalten und die Fläche ist die Enveloppe der Ebene

$$(\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0.$$

Die einfachste Form der Gleichung $\frac{\partial^2\Theta}{\partial x \partial y} = k\Theta$ entspricht denjenigen Flächen mit ebenen Krümmungslinien, bei denen die den ebenen Krümmungslinien auf der Einheitskugel entsprechenden Kreise durch einen festen Punkt gehen. Es werden nun die allgemeinsten Flächen mit ebenen Krümmungslinien bestimmt. Um alle Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien zu erhalten, konstruiert man eine beliebige isotrope abwickelbare Fläche Δ und eine nicht-isotrope D_1. Man biegt dann D_1 so, dass ihre Erzeugenden geradlinig bleiben und dass ihre Tangentialebenen die Kurven mit sich führen, längs welcher sie die Abwickelbare Δ schneiden. Die Gesamtheit der so fortgeführten Kurven erzeugt die allgemeinste Fläche mit einem System ebener Krümmungslinien. Wenn man daraus auch nicht auf einfache Weise diese Flächen finden kann, so ergeben sich doch einige Sätze, so z. B. wenn eine der ebenen Krümmungslinien ein Kreis ist, so sind alle Kreise, ist eine dieser Kurven algebraisch, so sind alle algebraisch, wenn die ebenen Krümmungslinien Kegelschnitte sind, so müssen es Kreise sein.

Von den Flächen mit einem System ebener Krümmungslinien werden nun diejenigen völlig bestimmt, welche isotherm sind, und zwar hängt die Lösung von elliptischen Funktionen ab und enthält eine willkürliche Funktion. Es ergiebt sich:

$$X = \frac{\Theta^2(\omega)[x - i(yz' - zy')]}{\mathrm{H}(2\omega)\mathrm{H}'(0)} \cdot \frac{\mathrm{H}\left(\frac{u + iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u + iv_1 + \omega}{2}\right)} \cdot e^{(u + iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

$$+ \frac{\Theta^2(\omega)[x + i(yz' - zy')]}{\mathrm{H}(2\omega)\mathrm{H}'(0)} \cdot \frac{\mathrm{H}\left(\frac{u - iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u - iv_1 + \omega}{2}\right)} \cdot e^{(u - iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

und für Y und Z erhält man ähnliche Formeln. Von diesen Flächen wird eine Reihe von Eigenschaften abgeleitet.

Der nächst einfache Fall ist derjenige, dass das eine System der Krümmungslinien aus sphärischen Kurven besteht. Zur Bestimmung derselben wird von dem Satze Joachimsthals ausgegangen: „Wenn eine Krümmungslinie sphärisch ist, so muss die Abwickelbare, welche der Fläche längs dieser Krümmungslinie umschrieben ist, auch einer Kugel umschrieben sein und umgekehrt." Aus einer gegebenen Fläche mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien werden unendlich viele derselben Art abgeleitet, die dasselbe sphärische Bild haben. Sodann wird gezeigt, dass man alle Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien aus denen mit ebenen Krümmungslinien ableiten kann: 1) indem man die Inversen dieser nimmt, 2) indem man die Flächen mit sphärischen Krümmungslinien konstruiert, die dasselbe sphärische Bild haben wie die vorher gefundenen. Die allgemeinste Fläche mit sphärischen Krümmungslinien kann man auch erhalten, indem man eine isotrope Abwickelbare Δ durch eine Schar S von Kugeln schneidet und diese Kugeln und ihre Enveloppe Σ einer bestimmten Biegung unterwirft. Die Schnitte der Abwickelbaren Δ mit den Kugeln S bilden so eine Familie von Kurven, welche die gesuchte Fläche erzeugen. Genauer werden diejenigen Flächen bestimmt, deren beide Systeme von Krümmungslinien eben oder sphärisch sind. Zu dem Zwecke sucht man auf die allgemeinste Weise 6 Funktionen A_i von α und 6 Funktionen B_i von β, welche die Relation

$$\sum_1^6 (A_i + B_i)^2 = 0$$

identisch befriedigen. Dann sind die beiden Schalen der Enveloppe der variabeln Kugel

$$\sum_1^5 (A_i + B_i) x_i = 0$$

zwei der gesuchten Flächen, wenn x_i pentasphärische Koordinaten bezeichnen. Es ergiebt sich weiter, dass die gesuchten Flächen auf einfache Weise aus einem Kegel entstehen oder aus der Fläche, deren Normalen Tangenten an einen Kegel sind.

Ohne auf die Verallgemeinerungen einzugehen, welche sich daran anschliessend besonders auf die orthogonalen Systeme mit demselben sphärischen Bilde beziehen, sei noch der letzten beiden Kapitel gedacht, die den neuen Resultaten gewidmet sind, die wir Herrn Weingarten in betreff der Abwickelbarkeit der Flächen verdanken. Wir haben früher gesehen, dass die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung der auf eine Fläche abwickelbaren Flächen die Asymptotenlinien dieser Flächen sind. Kann man also gewisse besondere Eigenschaften dieser Asymptotenlinien angeben, so kann das Problem auf eine neue Art formuliert und dadurch können neue Resultate gefunden werden. Die Betrachtung des zwei aufeinander abwickelbaren Flächen gemeinsamen konjugierten Systems erlaubt diese allgemeine Bemerkung anzuwenden. Sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines Punktes der gegebenen Fläche Θ_1 und setzen wir

$$x_1 = u;\; y_1 + iz_1 = v;\; y_1 - iz_1 = 2w,$$

so kann w als Funktion von u und v betrachtet werden, und wenn wir schreiben:

$$div = p\,du + q\,dv,$$

so nimmt das Linienelement der Fläche die Form an:

$$ds^2 = du^2 + 2dv\,dw = du^2 + 2p\,du\,dv + 2q\,dv^2,$$

und von diesem geht Herr Weingarten aus. Die Methode Weingartens lässt die Bestimmung aller Flächen Θ, die auf diese Fläche Θ_1 abwickelbar sind, abhängen von derjenigen einer anderen Fläche Σ, die einer gewissen Differentialgleichung genügt, welche eine Beziehung zwischen den Hauptkrümmungsradien, den Entfernungen eines festen Punktes von der Tangentialebene und dem Berührungspunkte feststellt. Setzt man

$$\varphi = up + vq - w,$$

so ergeben sich die Koordinaten x, y, z der Fläche Θ aus

$$x = \int C d\frac{\partial\varphi}{\partial p} + X d\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

$$y = \int C' d\frac{\partial\varphi}{\partial p} + Y d\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

$$z = \int C'' d\frac{\partial\varphi}{\partial p} + Z d\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

wo X, Y, Z die Koordinaten und C, C', C'' die Richtungskosinus der Normalen von Σ sind. Das Linienelement von Θ wird ausgedrückt durch:

$$ds^2 = \left(d\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2 + 2pd\frac{\partial\varphi}{\partial p}\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + 2q\left(d\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2$$

und die Fläche Σ genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} - (\varrho' + \varrho'')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + \varrho'\varrho''\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0.$$

Unter den Anwendungen ist besonders interessant die Aufsuchung aller Flächen, die auf ein Paraboloid zweiten Grades abwickelbar sind, bei welchem eine der geradlinigen Erzeugenden den unendlich fernen Kreis berührt. Weitere Untersuchungen führen zu dem Schlusssatz: Ist eine beliebige Schar von Kurven K auf einer Fläche Θ gegeben, so kann man immer durch einfache Quadraturen alle Kongruenzen G bestimmen, die durch Tangenten an Θ so erzeugt sind, dass die Regelflächen, deren Erzeugende durch eine der Kurven K gehen, diese Kurve als Striktionslinie besitzen. Die Relation zwischen der Kongruenz und der Fläche bleibt bestehen, wenn die Fläche unter Mitführung der Geraden gebogen wird. Wenn man zwei unabhängige Variabele nimmt, um die Richtung jeder Geraden der Kongruenz zu bestimmen, so muss der Parameter der Schar von Kurven K einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, welche ausschliesslich vom Linienelemente von Θ abhängt und deren Integration infolgedessen gestattet, durch einfache Quadraturen alle Flächen zu bestimmen, die auf Θ abwickelbar sind.

Mit diesen Untersuchungen schliesst das eigentliche Werk ab und es folgen nun noch 11 im Jahre 1896 erschienene Zusätze, welche die Seiten 353—516 des vierten Bandes einnehmen. Die drei ersten derselben sind Beiträge der Herren Picard, Königs und Cosserat, während die übrigen von Herrn Darboux selbst geschrieben sind.

I. Über die Näherungsmethoden in der Theorie der Differentialgleichungen. Herr E. Picard beschäftigt sich in dieser Note mit partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von hyperbolischem Typus, wie sie in der Flächentheorie vorkommen und als deren allgemeinste Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

angenommen wird. Bei der Bestimmung des Integrales durch Reihen wird auch der Grösse des Geltungsbereiches ausgedehnte Beachtung zu teil.

In dem zweiten Zusatze:

II. Über die geodätischen Linien mit quadratischen Integralen sucht Herr G. Königs die vollständige Lösung des Problems der geodätischen Linien, welche mehrere quadratische Integrale zulassen, und schliesst so an ein Kapitel des III. Bandes des Werkes an. Er findet zunächst, dass, wenn ein ds^2 mehr als drei von einander unabhängige quadratische Integrale in Bezug auf seine geodätischen Linien zulässt, es fünf quadratische Integrale hat, die Fläche also konstant ist. Da sich weiter ergiebt, dass die ds^2 mit drei quadratischen Integralen für die geodätischen Linien auf Rotationsflächen führen, so kehrt H. Königs die Aufgabe um und sucht alle Formen ds^2 von Rotationsflächen mit quadratischen Integralen auf, die in einer Tabelle zusammengestellt werden. In einer zweiten Tabelle werden die Lionvilleschen Formen des Flächenelementes für Flächen konstanter Krümmung gegeben, bei denen die Krümmung nicht Null ist. Aus diesen werden dann noch verschiedene Tabellen abgeleitet, die aus seiner Abhandlung im XXXI. Band des Savants étrangers genommen sind, und dann wird nachgewiesen, dass in diesen Tabellen die vollständige Lösung des Problems enthalten ist.

III. Über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Herr Cosserat beweist darin einen Satz, welcher aus einer Arbeit des Herrn Moutard herrührt, die beim Aufstande der Kommune im Jahre 1871 verloren gegangen ist. Dieselbe beschäftigte sich mit dem eingehenden Studium der einfachsten Form, deren das allgemeine Integral partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln fähig ist, die Form, welche besteht aus einer einzigen Relation zwischen den drei Variabeln, zwei expliziten willkürlichen Funktionen derselben, die aber nicht unter einem Integralzeichen vorkommen dürfen, und den Derivierten dieser Funktionen in beschränkter Zahl. Der Satz nun, welcher hier abgeleitet wird, heisst: Diejenigen der gesuchten Gleichungen, welche durch eine Veränderung der Variabeln weder auf lineare Laplacesche Gleichungen, noch auf die Lionvillesche Gleichung zurückführbar sind,

lassen sich, ausgenommen in zwei besonders einfachen Fällen, zurückführen auf die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(Ae^z) - \frac{\partial}{\partial y}(Be^{-z}),$$

wo A und B zwei Funktionen der unabhängigen Variabeln sind, die gewissen Bedingungen genügen müssen; ferner kann die Integration dieser Gleichung zurückgeführt werden auf diejenige einer solchen von Laplace, nämlich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \lg A}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + ABz.$$

IV. Über die Torsion der Linien doppelter Krümmung und die Kurven konstanter Torsion. Nachdem Herr Darboux auf die wichtigen Unterschiede zwischen der Krümmung und der Torsion der Kurven doppelter Krümmung aufmerksam gemacht und insbesondere auf die Bedeutung des Vorzeichens der Torsion hingewiesen hat, giebt er die Resultate, die infolge seiner Anregung im I. Bande dieses Werkes, algebraische Kurven mit konstanter Torsion aufzusuchen, erhalten worden sind. So verdankt man den Herren Fabry und Fouché eine Kenntnis mehrerer solcher Kurven, wenn es bis jetzt auch noch nicht gelungen ist, alle aufzufinden.

V. Über die Eulerschen Formeln und die Bewegung eines festen Körpers. Die Eulerschen Formeln werden auf geometrischem Wege in sehr einfacher Weise abgeleitet, wobei sich zugleich unmittelbar die geometrische Bedeutung der in ihnen vorkommenden Grössen ergiebt. Die verschiedenen endlichen Bewegungen werden sodann zurückgeführt auf Drehungen um 180° (renversement) verbunden mit ebenen Inversionen; jede Bewegung einer endlichen Figur lässt sich zusammensetzen aus zwei solcher Drehungen um zwei Gerade.

VI. Note über eine Differentialgleichung und über die Spiralflächen. Aus den Gleichungen der Spiralflächen wird deren Differentialgleichung abgeleitet und an Stelle derselben die allgemeinere

$$My^2 + 2Nyy' + Ty'^2 = 1$$

betrachtet und gezeigt, wie man sie in verschiedenen Fällen integrieren kann.

VII. Über die Form der Krümmungslinien in der Nähe eines Nabelpunktes. Die Resultate dieser Note sind vom Verfasser im Jahre 1883 der Akademie mitgeteilt worden. Nimmt man den Nabelpunkt als Koordinaten-Anfang und die Tangentialebene in diesem Punkte als XY-Ebene, so lässt sich die entstehende Differentialgleichung dadurch vereinfachen, dass man zu den Polarreziproken der Integralkurven übergeht. Diese genügen der Gleichung

$$\frac{du'}{u'} = \frac{b'p^2 + (b - a')p - b}{b'p^3 + (2b - a')p^2 + (a - 2b')p - b}\,dp.$$

Der besondere Fall, dass der Nenner $= 0$ ist, wird zunächst ausgeschlossen, die sich ergebenden Unterfälle werden diskutiert und die gefundenen Resultate auf die Wellenfläche angewendet, wobei sich ergiebt, dass die

Krümmungslinien derselben in der Nähe eines Nabelpunktes einer Kurve 10. Grades und 5. Klasse ähnlich sind. Sodann erfährt auch der besondere Fall eine eingehende Behandlung.

VIII. Über die Asymptotenlinien und die Krümmungslinien der Fresnelschen Wellenfläche. Die Wellenfläche wird als Apsidalfläche eines Ellipsoids betrachtet. Werden entsprechende Punkte beider Flächen analytisch in Verbindung gebracht, so erhält man die apsidale Transformation, deren Eigenschaften entwickelt werden. Nach Ableitung bekannterer Eigenschaften wird gezeigt, dass die Asymptotenlinien der Wellenfläche algebraische Kurven sind (Sophus Lie, 1870, Comptes rendus) und dass man auf ähnliche Weise auch die Asymptotenlinien der tetraedralen Flächen erhalten kann. Die Gleichung der Krümmungslinien der allgemeinen Wellenfläche ist bis jetzt noch nicht gefunden, doch wird hier die Bestimmung derselben für die beiden Spezialfälle durchgeführt: 1. dass die Wellenfläche die Apsidalfläche eines elliptischen Cylinders ist und 2. dass sie wenig von der Kugel abweicht. Da die Wellenflächen der Kristalle von der Kugel wenig verschieden sind, so können wir ihre Krümmungslinien mit genügender Genauigkeit berechnen. Aus diesen beiden Spezialfällen ergiebt sich zugleich, dass die Krümmungslinien nicht algebraische Kurven sind.

IX. Über die Cayleysche Geometrie und über eine Eigenschaft der Flächen mit kreisförmigen Erzeugenden. Schon aus der Form des Linienelementes in Cayleyscher Geometrie erkennt man, dass man in ihr die geodätischen Linien jeder Fläche zweiten Grades finden kann. Das Linienelement der Regelflächen in dieser Geometrie hat die Form

$$dS^2 = du^2 + (V\cos^2 u + 2V_1 \cos u \sin u + V_2 \sin^2 u)dv.$$

Da die Regelflächen durch eine Punkt-Transformation, die schon am Schlusse des 3. Bandes behandelt wurde, in solche cyklische Flächen übergehen, bei denen die erzeugenden Kreise auf einer festen Kugel senkrecht stehen, so können von diesen gewisse Eigenschaften abgeleitet werden, von denen einige auf alle Flächen mit kreisförmigen Erzeugenden erweitert werden.

X. Über die partiellen Differentialgleichungen. Diese Note enthält die wesentlichsten Punkte einer Arbeit, welche der Herr Verfasser im VII. Bande (1. Serie) der Annales de l'Ecole Normale im Jahre 1870 veröffentlicht hat und ist eine Erweiterung der Cauchyschen Methode der Veränderung der Variabeln in Verbindung mit der Jacobischen Integrationsmethode. Das Wesentliche ist also, dass für x, y, x, y_0 $[y_0 = f(x, y)]$ gesetzt wird, wo y_0 passend zu wählen ist. Während durch Differentiation diese Methode bei Differentialgleichungen erster Ordnung immer zum Ziele führt, d. h. man ebensoviel Gleichungen wie Unbekannte erhält, ist bei Gleichungen höherer Ordnung die Zahl der Gleichungen immer um eine kleiner als die der Unbekannten. Man kommt jedoch auch hier zur Lösung, wenn eines der Gleichungssysteme zu zwei integrabeln Gleichungen führt, die kombiniert werden.

XI. **Über die Hilfsgleichung.** In einem Artikel in den Comptes rendus (XCVI. Band) vom Jahre 1883 hat Herr Darboux den Begriff der Hilfsgleichung eingeführt, von dem hier das Wesentliche angegeben wird. Wenn man in einer beliebigen totalen oder partiellen Differentialgleichung, die eine Funktion z einer oder mehrerer unabhängigen Variabeln definiert, z durch $z + Ez'$ ersetzt, die erhaltene Gleichung nach Potenzen von E entwickelt und den Koeffizienten von E gleich Null setzt, so erhält man eine lineare und homogene Differentialgleichung in Beziehung auf z', welche Herr Darboux die Hilfsgleichung der gegebenen nennt. Dieser Begriff lässt sich auch auf jedes System von Differentialgleichungen ausdehnen. Man erhält ein Hilfssystem, welches die einer Lösung unendlich benachbarten Lösungen definiert. Mit Hilfe dieser Einführung werden zwei geometrische Probleme behandelt: zu einer Fläche alle unendlich benachbarten zu suchen, die mit der gegebenen eine Familie eines dreifach orthogonalen Systems bilden, und alle Flächen zu suchen, die auf eine gegebene Fläche abwickelbar sind.

WILLGROD.

Leopold Kroneckers Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von K. HENSEL. Zweiter Band. Leipzig 1897. 540 S.

Über Plan und Anlage des hier vorliegenden Unternehmens ist bei Gelegenheit der Besprechung des ersten Bandes berichtet worden. Die erste der drei Abteilungen, in welche nach dem Willen Kroneckers seine zahlreichen Abhandlungen bei der Gesamtausgabe eingegliedert werden sollten, enthält die zum Gebiete der „allgemeinen Arithmetik" gehörigen Untersuchungen; der nunmehr erschienene zweite Band bringt diejenigen Aufsätze dieses Gebietes zum Abdruck, welche in die Jahre 1875 bis 1885 fallen, während ein dritter Band die erste Abteilung der Werke abschliessen und die ihr beigegebenen Zusätze vereinigen wird.

Was den Inhalt der hier aufs neue publizierten Abhandlungen angeht, so beziehen sie sich zu einem Teile auf Einzelprobleme; so enthält der Band z. B. acht Aufsätze über das quadratische Reziprozitätsgesetz, dessen verschiedenartige Beweise zu ergänzen, zu verbinden und zu sichten Kronecker bis in seine letzten Lebensjahre nicht müde wurde, und die grosse Abhandlung über bilineare Formen mit vier Variabelen, in welcher er seine neuen Klassenzahlrelationen von der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen loslöste und auf rein arithmetischem Wege begründete. Im Mittelpunkte aber des Bandes steht die Festschrift zu Kummers fünfzigjährigem Doktorjubiläum (1881), die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen, in welcher Kronecker das Fazit seiner Forscherthätigkeit zog und die allgemeinen Grundlagen schuf, auf denen es möglich wird, die durch ihre Einfachheit und Strenge ausgezeichneten Methoden der Zahlentheorie zur Ergründung der Eigenschaften algebraischer Zahlen und Funktionen anzuwenden; seitdem haben zahlreiche Arbeiten, die teils an diese Festschrift, teils an die anders geprägten, aber gleich gearteten

Gedankenreihen Dedekinds und Webers anknüpfen, die Fruchtbarkeit dieser Methoden erwiesen. In unmittelbarem Zusammenhange mit der Festschrift stehen schliesslich eine Reihe kleinerer in dem Bande enthaltener Abhandlungen, teils vorbereitenden, teils ergänzenden Inhalts, unter anderen auch die merkwürdige Abhandlung „Zur Theorie der Formen höherer Stufen", deren wahre Bedeutung neuerdings durch Arbeiten von Dedekind (1892) und Hurwitz (1894) in helles Licht gerückt worden ist.

GEORG LANDSBERG.

S. GUNDELFINGER. **Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen.** Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtractions- und Briggische Logarithmen, sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. Leipzig 1897, B. G. Teubner.

Die für Astronomen und Techniker bestimmten Tafeln sind durch Ausbau der Gaussschen Methode entstanden.

Wenn es sich um die Berechnung der reellen Wurzeln einer trinomischen Gleichung:
$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$$
(e und f positive Konstanten) handelt, so genügt es offenbar, die positiven Wurzeln aufzusuchen. Trinomische Gleichungen mit positiven Wurzeln giebt es demnach nur zwei Arten:

Geichungen mit einem Zeichenwechsel
$$\text{I)}\quad x^{m+n} + ex^m - f = 0, \qquad \text{II)}\quad x^{m+n} - ex^m - f = 0,$$
Gleichungen mit zwei Zeichenwechseln
$$x^{m+n} - ex^m + f = 0.$$

Die hier gegebene Methode unterscheidet sich wesentlich von der Gaussschen. Schreibt Gauss vor, mit dem isoliert stehenden Gliede zu dividieren und die so entstehende Relation mit der Identität $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ zu vergleichen, so stellt der Verfasser die Regel auf, „das Glied, welches nicht dasselbe Vorzeichen wie die beiden anderen hat, zu isolieren, mit irgend einem dieser beiden anderen Glieder zu dividieren und die so entstehende Relation mit $1 + 10^A = 10^B$ zu vergleichen."

Beispielsweise giebt
$$x^{m+n} + f = ex^m$$
nach Division mit x^{m+n}:
$$1 + fx^{-(m+n)} = ex^{-n}.$$
Setzt man
$$fx^{-(m+n)} = 10^A, \quad ex^{-n} = 10^B,$$
so wird:
$$-(m+n)\log x + \log f = A,$$
$$-\;n\;\log x + \log e = B,$$
woraus
$$B - \frac{n}{m+n}A = \log e - \frac{n}{m+n}\log f$$
und
$$\log x = \frac{\log f - A}{m+n} = \frac{\log e - B}{n}.$$

Es kommt also lediglich darauf an, zwei zusammengehörige Werte für A und B derart zu bestimmen, dass eine Gleichung der Form $A - \mu B = c$ oder $B - \mu A = c$ befriedigt wird, wobei μ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Diesem Zwecke dienen die vier Tafeln S. 4—7.

Vorausgeschickt ist auf S. 1 eine Tafel, vermöge deren sich unmittelbar die Aufgaben lösen lassen:

1. Gegeben $A = \log \xi$, gesucht $B = \log(1 + \xi)$ oder
$$B - A = \log\left(1 + \frac{1}{\xi}\right);$$
2. Gegeben $B = \log(1 + \xi)$, gesucht $A = \log \xi$.

Auf S. 2—3 ist eine Entwickelung aller echten Brüche, deren Nenner kleiner als Hundert, in Dezimalbrüche auf zwei Stellen gegeben.

Die Methode wird noch an den Zahlenbeispielen:
$$x^5 - 5x - 4 = 0,$$
$$x^3 - 7x - 7 = 0,$$
$$x^3 + 3x = \frac{M}{25}$$
des näheren erläutert.

E. Jahnke.

B. Sporer. **Niedere Analysis.** Sammlung Göschen. Göschen, Leipzig 1896. 173 S. M. 0.80.

Knapp und klar geschrieben, bietet das Buch auf engem Raume die Grundlagen einer Reihe ausgewählter Kapitel der niederen Analysis.

Im ersten Abschnitt behandelt der Verfasser die Theorie der Kettenbrüche und benutzt sie zur Auflösung der diophantischen Gleichungen ersten Grades. Auch diophantische Gleichungen zweiten Grades werden behandelt und die Pellsche Gleichung an einigen Beispielen erläutert.

Der zweite Abschnitt bringt das Wesentliche aus der Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ausser den bekannten, dem Würfelspiel entlehnten Aufgaben hätten passend noch Beispiele aus der kinetischen Gastheorie hier Platz finden können.

Der Verfasser geht dann zu den Reihen über und bespricht im dritten Abschnitt die arithmetischen Reihen höherer Ordnung, die verschiedenen Arten figurierter Zahlen und den Begriff der Interpolation, wo die Lagrangesche Interpolationsformel ihre Stellung findet. Im nächsten Abschnitt folgen die Konvergenzbetrachtungen für unendliche Reihen, die Methode der unbestimmten Koeffizienten, der allgemeine binomische Lehrsatz, die Exponentialreihe, die trigonometrischen, hyperbolischen und cyklometrischen Funktionen, unendliche Reihen für die Ludolphsche Zahl, unendliche Produkte für $\sin x$ und $\cos x$, der Cotessche Satz und interessante trigonometrische Reihen, auf deren Bedeutung für die Theorie des Drehstroms der Verfasser hätte hinweisen können.

Der letzte Abschnitt bringt die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, sowie mehrere Methoden für die algebraische Auf-

lösung der Gleichungen vierten Grades, von denen allerdings eine genügt hätte, und endlich die bekanntesten Methoden zur näherungsweisen Auflösung der Gleichungen.

Das Buch eignet sich für den Schulgebrauch sowohl wie für das Einzelstudium, insbesondere dürfte es dem angehenden Techniker, dessen mathematische Kenntnisse an das Niveau der Untersekunda einer Vollanstalt bezw. Prima einer Realschule heranreichen, zur Weiterbildung zu empfehlen sein.

E. Jahnke.

F. Bendt. **Katechismus der Differential- und Integralrechnung.** Leipzig 1896, J. Weber. 267 S. M. 3.

Der Verfasser hat den Versuch gemacht, ein Mittelding zu schaffen zwischen den vollständigen Lehrbüchern, welche die Elemente der Differential- und Integralrechnung in mathematischer Strenge entwickelt darbieten, und jenen Schriften, die auf wenigen Bogen eine Vorstellung von dem Wesen der Infinitesimalrechnung erwecken wollen. Den ersteren entlehnt der Katechismus die wichtigsten Methoden und Anwendungen, mit den letzteren hat er den Verzicht auf strenge Beweisführung gemein.

Ein Blick in das Inhaltsverzeichnis lässt die Reichhaltigkeit des Katechismus erkennen. Ein vorbereitender erster Teil bringt den gewöhnlichen binomischen Lehrsatz und Methoden zur Entwickelung geschlossener Ausdrücke in unendliche Reihen. Hierbei ist dem Verfasser auf Seite 11 ein Versehen untergelaufen, wenn er ansetzt

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

und fortfährt: „Wie man hier sofort sieht, ist diese Reihe vom zweiten Gliede an eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$." Auch dürfte die Übersetzung von transscendent mit „unendlich" keine zutreffende sein.

Der zweite Teil handelt von der Differentialrechnung. Nach einem einleitenden Kapitel über den Grenzbegriff und den Begriff der Stetigkeit entwickelt der Verfasser den Begriff des ersten und der höheren Differentialquotienten und erläutert deren Bildungsgesetz an einer grossen Reihe von Beispielen. Hieran schliessen sich die Reihen von Taylor und Mac Laurin mit Anwendung auf die bekanntesten transscendenten Funktionen. Ein weiteres Kapitel ist der Bestimmung des wahren Wertes einer Funktion gewidmet, die für einen speziellen Wert der Variablen in unbestimmter Form erscheint. Ein Kapitel vom Maximum und Minimum der Funktionen bildet den Übergang zu Anwendungen der Differentialrechnung auf die Untersuchung der Kurven.

Der dritte Teil, die Integralrechnung, enthält die Integration rationaler Funktionen, die teilweise Integration und eine Tabelle der wichtigsten unbestimmten Integrale; einfache bestimmte Integrale, geometrische Anwendungen der Integralrechnung (Quadratur und Rektifikation der Kurven, Oberflächen- und Inhaltsbestimmung der Rotationskörper), vielfache Inte-

grale, die Integration von Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung sowie ein Kapitel über die komplexen Zahlen und die Moivresche Formel. Auch dieser Teil bietet eine Fülle von Beispielen zur Erläuterung der Lehrsätze und allgemeinen Betrachtungen.

Der Katechismus soll nach der Absicht des Verfassers der Praxis dienen. „Er wendet sich an Leser, die die Mathematik nur als Mittel für ihren besonderen Zweck betreiben.“ Und diesen Kreisen dürfte das Buch in der That gute Dienste leisten.

E. Jahnke.

K. Koppes **Arithmetik und Algebra** zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten, neu bearbeitet von J. Diekmann. 13. Auflage. II. Teil. Bädeker, Essen 1897. 204 S. M. 2.40.

Die sachliche Seite der Bearbeitung ist fast durchgängig eine neue und selbständige geworden. So hat der Herausgeber der „Anwendungen der Determinanten und Elemente der neueren Algebra“ die Lehre von den Gleichungen zweiten und höheren Grades erweitert und vertieft, namentlich auch nach derjenigen Richtung hin, in welcher sie für die analytische Geometrie in Betracht kommt. Die numerische Auflösung der Systeme zweier bezw. dreier linearer Gleichungen mit Hilfe von Determinanten möchte auch Referent als die praktisch brauchbarste empfehlen. Zur Einübung der Auflösungsmethoden für Systeme zweier bezw. dreier Gleichungen zweiten, dritten, vierten Grades bringt der Verfasser eine Reihe interessanter Beispiele bei. Eines derselben erinnerte Referenten an ein elegantes Gleichungssystem, das ihm vor Jahren begegnete. Es lautet:

$$\frac{x_h - x_k x_l}{\sqrt{(1 - x_k^2)(1 - x_l^2)}} = a_h \quad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2).$$

Auf die beiden ersten Abschnitte, welche den Gleichungen gewidmet sind, folgt ein Abschnitt über die geometrischen Reihen mit Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung. Besonders ausführlich wird hier über die Tilgung von Schuldsummen, über die Ausgabe und Verlosung von Schuldscheinen gehandelt. Der vierte Abschnitt enthält die arithmetischen Reihen erster und höherer Ordnung mit Anwendung auf die Kugelhaufen. Beiden Abschnitten sind eine Reihe von Übungsaufgaben angehängt.

Im fünften Abschnitt bespricht der Verfasser den binomischen Lehrsatz für positive ganze Exponenten, die Exponentialreihe, die Darstellung der komplexen Zahlen und die logarithmische Reihe. Dabei finden die Auflösung der binomischen Gleichung $x^n = 1$ und die Berechnung der Ludolphschen Zahl ihre Erledigung. Auch hier bieten zahlreiche Übungen dem Schüler Gelegenheit teils zur Einprägung des Erlernten, teils zur Auffindung neuer Wahrheiten.

Ein Anhang zu dieser ersten Abteilung bringt die kombinatorischen Rechnungen und deren Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz, die Lehre von den Kettenbrüchen sowie die Eulersche und die Lagrange-

sche Auflösungsmethode der diophantischen Gleichungen nebst Übungsmaterial.

Die zweite Abteilung bringt in zwei Abschnitten ausführlich die Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen, und sodann die Auflösung der numerischen Gleichungen höherer Grade. Dort geht der Verfasser auf den Begriff der Discriminante und den der Resolvente genauer ein; hier kommen nach einander Gleichungen mit rationalen und solche mit irrationalen Wurzeln zur Behandlung. Für die Ermittelung der letzteren ist die Newtonsche Annäherungsmethode gewählt.

Ein letzter Abschnitt handelt von den extremen Werten einer Funktion. Nachdem für eine Reihe spezieller typischer Funktionsformen die Grenzwerte abgeleitet worden sind, geht der Verfasser zur allgemeinen Behandlung des Maximum- und Minimumproblems über. Den Beschluss bilden eine Fülle lehrreicher Aufgaben aus der Planimetrie, Stereometrie und Physik.

E. Jahnke.

W. Winter, **Algebra.** Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen. Zweite Auflage. Th. Ackermann, München 1895. 318 S.

Lehrbücher sind für den Unterricht in der Algebra überflüssig, wohl aber sind Aufgabensammlungen mit Vorteil zu verwenden. Die neueren Sammlungen, an denen nicht gerade Mangel herrscht, zeigen die Einrichtung, dass den einzelnen Abschnitten eine kurze Darstellung der algebraischen Gesetze und womöglich vollständig durchgeführte Übungsbeispiele vorangestellt sind. Auch der Verfasser des vorliegenden Lehrbuches hat diese Einrichtung getroffen. Zu den schwierigeren Aufgaben sind am Schluss jedes Abschnittes die Resultate beigefügt. Die Beispiele sind nach der Angabe des Verfassers von ihm selbst gefertigt und im Unterricht auf ihre Brauchbarkeit geprüft. Insofern muss auch diese Sammlung wie jede, welche neue Aufgaben bietet, als wertvoll bezeichnet werden.

E, Jahnke.

E. Schultz, **Vierstellige mathematische Tabellen** im engen Anschluss an die mathematischen Tabellen der technischen Kalender. Baedeker, Essen 1896. 80 S. M. 0.80.

„Der Verfasser ist der Überzeugung, dass die sichere Kenntnis des Gebrauches der mathematischen Tabellen in den technischen Kalendern dem Schüler auch später in der Praxis von grossem Werte sein wird. Da nun aber der kleine Druck der Kalendertabellen bei den vielfach anzustellenden Übungen die Sehkraft der Schüler wesentlich beeinträchtigt, soll durch die Herausgabe dieser Tabellen in erster Linie die Schonung des Auges bezweckt werden.“ Das Bestreben, einen möglichst engen Anschluss an die Einrichtung der Kalendertabellen zu erreichen, hat den Verfasser zu einer von anderen Tabellen abweichenden Ablesung von Grad und Minuten geführt.

Die Tabellen erscheinen in zwei Ausgaben, mit und ohne Anleitung. In der Anleitung erläutert der Verfasser an 25 interessanten Beispielen aus der Praxis die Art der Benutzung seiner Tabellen sowie der mathematischen Tabellen der technischen Kalender.

Auf diese Beispiele, die zum Teil des Verfassers „Leitfaden der Körperberechnung für gewerbliche Schulen sowie zum Selbstunterricht für den Maschinentechniker“ entlehnt sind, möchte Referent besonders aufmerksam machen.

E. Jahnke.

P. Treutlein. **Vierstellige logarithmische und goniometrische Tafeln** nebst den nötigen Hilfstafeln. Vieweg, Braunschweig 1896. 72 S. M. 0. 60.

Als Vertreter der Ansicht, dass dem mathematischen Unterricht der Mittelschule am besten durch vierstellige Logarithmentafeln gedient ist, hat der Verfasser hier auf Grund langjähriger Schulerfahrung eine solche Tafel angefertigt. Zwar sind deren schon mehrere vorhanden, die durch billigen Preis, passendes Format, deutlichen Druck, Übersichtlichkeit der Anordnung u. s. w. in gleicher Weise ausgezeichnet sind. Die neue Tafel aber soll „das so sehr aufhaltende Interpolieren ganz unnötig machen oder auf das allergeringste Maß herabdrücken, um so die rasch fördernde Benutzung der Tafel als eines Rechenknechtes zu ermöglichen.“

E. Jahnke.

M. Kröger. **Die Planimetrie in ausführlicher Darstellung** und mit besonderer Berücksichtigung neuerer Theorien. Nebst einem Anhange über Kegelschnitte. O. Meissner, Hamburg 1896. 511 S. M. 8.

Der Verfasser erhebt den Anspruch, im vorliegenden Buch „ein klares System aller irgend erheblichen und lernenswerten planimetrischen Wahrheiten zu geben“ für diejenigen, welche „sich mit der gewöhnlichen schulgemässen, durch mancherlei Rücksichten und Hemmnisse beschränkten Behandlung nicht begnügen können und wollen.“

Um zu beurteilen, ob dieser etwas pomphaften Ankündigung die Ausführung entspricht, wird es nötig sein, auf das Werk näher einzugehen.

Bei dem angedeuteten Standpunkt des Verfassers überrascht zunächst die schwerfällige Breite, in der wenigstens die ersten Kapitel gehalten sind. Wo eine passende Definition hingereicht hätte, um unmittelbar den Lehrsatz zu erhalten, finden sich langathmige Beweise, die womöglich noch die Algebra zu Hilfe rufen. Wo an sich einfache Verhältnisse vorliegen, führt der Verfasser neue Bezeichnungen ein, welche den doch wohl erstrebten Zweck der Zusammenfassung und Vereinfachung jedenfalls nicht erfüllen. Bei der Lektüre dieser Kapitel kamen dem Referenten die Worte in den Sinn, welche Herr Bertram bei der Besprechung einer neuerdings erschienenen Didaktik des mathematischen Unterrichts der gegenwärtigen Lehrergeneration zugerufen hat: „So ist es erklärlich, dass der Anfang

den Anfängern Betrachtungen zumutet, für welche das Interesse erst erzwungen werden muss; dass das jugendlich naive Hantieren mit Rechenoperationen und geometrischen Konstruktionen früher durch Zweifel und logische Sicherungen unterbrochen wird, als bis die Stellen erreicht werden, wo sie unvermeidlich sind und dem nun in Anschauungen und Erfahrungen gereifteren Geiste als das klar werden, was sie sind, nämlich die ersten Offenbarungen der eigentlich mathematischen Ideen.... Sollte aber nicht der ganze mathematische Kursus des Gymnasiums als ein propädeutischer anzusehen sein, und würde nicht eine beträchtliche Zahl von abstrakten Deduktionen auf ein späteres Lebensalter verschoben werden können, wenn man die Erziehung der Schüler zu wirklich strenger Wissenschaftlichkeit so anlegt, dass man, was historisch den Mathematikern erst nach der Entstehung der einzelnen Zweige ihrer Wissenschaft zur vollen Erkenntnis gekommen ist, auch den Schülern erst am Ende ihrer Schullaufbahn in einem Rückblick zum Bewusstsein zu bringen suchte?" (Zeitschrift für Gymnasialwesen II, 538—541.)

Aber auch sonst noch bieten die ersten Kapitel Anlass zu Ausstellungen. So bemüht sich der Verfasser in der Einleitung — natürlich vergebens —, eine Definition der geraden Linie und der Ebene aufzustellen, er übersieht, dass der Begriff der Richtung denjenigen der geraden Linie involviert. Dieselbe Unklarheit bezüglich des Richtungsbegriffs beherrscht die Parallelentheorie des ersten Abschnitts. Der zweite Abschnitt trägt die Überschrift „Entstehung und allgemeine Eigenschaften geradliniger Flächen". Als „geradlinige Flächen" bezeichnet der Verfasser ebene, von geraden Linien begrenzte Figuren!

Kann hiernach Referent sich mit der Darstellung in den einleitenden Kapiteln nicht einverstanden erklären, so möchte er das Anerkennenswerte in einzelnen der nun folgenden Abschnitte um so mehr hervorheben.

Dahin gehört sogleich der dritte Abschnitt, wo der Verfasser ausführlich den Symmetriebegriff behandelt, um ohne Hilfe der Kongruenzsätze eine grosse Reihe von Eigenschaften der Dreiecke und Vielecke herzuleiten.

Allerdings muss auch hier bemerkt werden, dass von den eingeführten Bezeichnungen ein Teil entbehrlich ist. Die vorgeschlagenen Zeichen für centrale und axiale Symmetrie erscheinen dem Referenten nicht einfach genug, um auf Einführung hoffen zu können.

Der vierte Abschnitt bringt die bekannten Methoden zur geometrischen Konstruktion von Dreiecken und Vierecken, der fünfte, welcher sich verschiedentlich an das ausgezeichnete „Lehrbuch der Geometrie von A. Kunze" anlehnt, die Inhaltsbestimmung „geradliniger Flächen." Hier nimmt der Verfasser Gelegenheit, am Quadrat das Verhältnis zweier inkommensurabler Strecken klar zu legen. Er fährt dann S. 143 fort: „Ein solches nicht absolut genau anzugebendes Verhältnis heisst irrational". Der Verfasser übersieht den Unterschied der irrationalen von den transscendenten Grössen, was in dem Kapitel „Kreisberechnungen und Näherungskonstruktionen" noch klarer zu Tage tritt, wo π als Irrationalzahl hingestellt

wird (S. 394). Infolgedessen weisen auch die sonst reichlichen historischen Notizen an dieser Stelle eine Lücke auf.

Es folgt der sechste Abschnitt, die Kreislehre umfassend. Die Darstellung unterscheidet sich von der gebräuchlichen dadurch, dass der Kreis als symmetrische Figur behandelt wird, und dass ein Teil der Sätze nach dem Prinzip der Dualität angeordnet ist. Die beigefügten „Sätze und Aufgaben zur Übung" (es sind deren 311) geben dem Verfasser Veranlassung, die mannigfachen Beziehungen an der ϱ-Figur ausführlich darzulegen. Vielleicht entschliesst sich der Verfasser in einer nächsten Auflage, die knappen Ausdrücke In-, Um- und Ankreis aufzunehmen.

Die beiden nun folgenden Abschnitte gehören zu den besten des ganzen Werkes. In ihnen kommt ausser dem gewöhnlichen Schulpensum ein Teil der wesentlichen Ergebnisse neuerer Untersuchungen zur Darstellung, besonders ausführlich das wichtige Punkt- und Strahlengebilde, die Potenzialität und Ähnlichkeit der Kreise, die Lehre von den Kreisbüscheln und im Anschluss hieran das Wichtigste über Punkt- und Strahlensysteme. Als Schluss des achten Abschnittes hat der Verfasser neben dem Problem des Apollonius auch das Malfattische aufgenommen und von diesem eine elementare Lösung gegeben, deren Ausgangspunkte sich nach der Angabe des Verfassers in Julius Petersen „Methoden und Theorien" finden.

Dem siebenten wie dem achten Abschnitt sind wieder zahlreiche „Sätze und Aufgaben zur Übung" angehängt, unter denen besonders die zum letzteren gehörige Sammlung hervorgehoben zu werden verdient.

Den metrischen Relationen am Dreieck und Viereck, welche schon der fünfte Abschnitt beigebracht hat, reihen sich im neunten Abschnitt solche für die Kreispolygone an.

Der zehnte Abschnitt bietet einige isoperimetrische Sätze und Aufgaben und der elfte das wesentliche aus der „algebraischen Analysis bei geometrischen Konstruktionen". Im letzten Abschnitt hat der Verfasser zunächst ausführlich die Kreispolarität behandelt und sodann versucht, das Prinzip der reziproken Radien und die Kreisverwandtschaft „in einer Weise darzustellen, die davon überzeugen möchte, dass diese Materie sich ohne zu grosse Ansprüche an die Fassungskraft der Durchschnittsschüler bewältigen lasse und sehr wohl zur Aufnahme in das wiederholende und erweiternde Pensum oberer Klassen geeignet wäre."

Der Anhang bringt das Wichtigste über die Kegelschnitte. Nachdem zuerst die Ellipse, Hyperbel und Parabel als geometrische Örter behandelt und besonders auf metrische Eigenschaften hin untersucht worden sind, werden sie als Kreisprojektionen durch Punkte und Tangenten bestimmt. Die wichtigsten Sätze über Polarität und Involution schliessen sich an.

Zum Schluss möchte Referent noch seine Zustimmung zu dem ablehnenden Standpunkt des Verfassers bezüglich der Frage ausdrücken, ob die hypereuklidischen Untersuchungen in dem Lehrplan der Schule eine Stelle finden sollen. Es erledigt sich diese Frage aus der allgemeinen Er-

wägung, dass für den Schulunterricht der Schwerpunkt auf das Können und nicht auf das Kennen gelegt werden muss.

Zusammenfassend möchte Referent hiernach sein Urteil über das Buch dahin abgeben, dass es, von den gerügten Mängeln abgesehen, in mancher Hinsicht eine Bereicherung der Lehrbuch-Litteratur über Planimetrie bildet.

E. Jahnke.

Bibliographie

vom 9. Juni bis 4. August 1898.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin, Reimer. Mathematische, kart. M. 3. 50.
Physikalische, kart. M. 4. 50.

Abhandlungen d. königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikal. Klasse. Neue Folge. 1. Bd. Nr. 2. Brendel, Mart., Theorie der kleinen Planeten. 1. Teil. Berlin, Weidmann. M. 16.

Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher, 71. Bd. Leipzig, Engelmann. Nr. 5, Schilling, Friedr., Geometrisch-analytische Theorie der symmetrischen S-Funktionen mit einem einfachen Nebenpunkt. M. 7.

—— Nr. 6, Schröder, Ernst, Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantorsche Sätze. M. 3.

—— Nr. 7, Schröder, Ernst, Die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung. M. 1.

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. 14. Bd. 1895—1896. Berlin, Friedländer & Sohn. M. 8.

Jahresbericht des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogtum Baden, mit den Ergebnissen der meteorologischen Beobachtungen und der Wasserstandsaufzeichnungen am Rhein und seinen grösseren Nebenflüssen f. das Jahr 1897. Karlsruhe, Braun. M. 6.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 6. Bd. 1897 1. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.

Sitzungsberichte, Münchener, Mathematische Klasse, 1898, 1. Heft. München, Franz. M. 1. 20.

—— Wiener, Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. 1. Abt. 106. Bd. 8. bis 10. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 1.

—— Dasselbe. Abt. IIa. 106. Bd. 7.—10. Heft. Ebenda. M. 15. 70.

Veröffentlichungen des hydrographischen Amtes der kaiserl. und königl. Kriegs-Marine in Pola. Nr. 5, Gruppe II. Jahrbuch der meteorologischen und erdmagnetischen Beobachtungen. Neue Folge, II. Bd. Beobachtungen des Jahres 1897. Wien, Gerold & Co. M. 12.

Veröffentlichungen des königl. astronomischen Recheninstituts zu Berlin. Berlin, Dümmler. Nr. 7. Bauschinger, J., Genäherte Oppositions-Ephemeriden von 49 kleinen Planeten für 1898 August bis Dezember. M. 1. 20.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Gross, Th., Robert Mayer und Hermann v. Helmholtz. Eine kritische Studie. Berlin, Fischer. geb. M. 4. 50.

Reine Mathematik.

Bachmann, Paul, Zahlentheorie. 4. Teil. Die Arithmetik der quadratischen Formen. 1. Abt. Leipzig, B. G. Teubner. M. 18.

Budisavljević, Eman. v., und Mikuta, Alfr., Leitfaden für den Unterricht in der höheren Mathematik. I. Bd. Grundzüge der Determinanten-Theorie und der projektiven Geometrie. Analytische Geometrie. Wien, Braumüller. geb. M. 8.

Bürklen, O. Th., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik (Sammlung Göschen Nr. 51). 2. Aufl. Leipzig, Göschen. M. —. 80.

Gauss, F. G., Fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Zwei Teile. Halle, Strien. 1. 55. Aufl. M. 2. 50.

—— 2. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für Dezimalteilung des Quadranten. 2. Aufl. M. 6.

Graf, J. H. und Gubler, Ed., Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen. (In zwei Heften.) 1. Heft. Die Besselsche Funktion. 1. Art. Bern, Wyss. M. 3. 20.

Höhnemann, G., Praktisches Lehrbuch der Mathematik zum Selbstunterricht. I. Algebra. Leipzig, Strauch. M. 1. 50.

Hullmann, K., Mathematische Abhandlungen. I. Die Reihen. II. Die Dreiteilung des Winkels. III. Das delische Problem. München, Finsterlin Nachfolger. M. 1. 50.

Kemmer, Gfr., Über die Verwandlung von Projektivitäten in Involutionen und von Reziprozitäten in Polarsysteme durch Anwendung von Projektivitäten. Dissertation. Darmstadt, Winter. M. 1.

Kober, Geo., Die Grundgebilde der neueren Geometrie. Eine geordnete Zusammenstellung ihrer Um- und Abbildungen erster und zweiter Ordnung. 1. Teil. Die Grundgebilde der Ebene. Hannover, Hahn. M. 3.

Schubert, Herm., Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen (Sammlung Göschen Nr. 81). Leipzig, Göschen. M. —. 80.

Angewandte Mathematik.

AHLBORN, FR., Der Schwebflug und die Fallbewegung ebener Tafeln in der Luft. Über d. Stabilität d. Flugapparate. Hamburg, Friederichsen & Co. M. 5.

BACH, C., Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen. 3. Heft. Untersuchungen über die Formänderungen und die Anstrengungen flacher Böden. Berlin, Springer. M. 3.

BÖRGEN, C., Über die Auflösung nautisch-astronomischer Aufgaben mit Hilfe der Tabelle der Meridionalteile (der „Merkatorschen Funktion"). Hamburg, Friederichsen & Co. M. 5.

EULER, LEONH., Die Abhandlungen über Kartenprojektion (1777). Herausgegeben von A. WANGERIN (Ostwalds Klassiker Nr. 93). Leipzig, Engelmann. M. 1.20.

FRANKE, J. H., Geodätische Punktkoordinierung in sphärischen Kleinsystemen. Vergleichende Entwickelungen im einheitlichen Koordinatensystem der bayerischen Landesvermessung. München, Ackermann. M. 2.40.

GROSS, G., Die mechanische Wärmetheorie (Thermodynamik) unter besonderer Berücksichtigung der Molekulartheorie und der sich daraus ergebenden Erweiterung des Anwendungsgebietes der Thermodynamik, nebst Anwendungen auf Wärmemotoren, Kältemaschinen und andere technische Einrichtungen. 1. Bd. Jena, Costenoble. M. 8.

HEYENGA, H., Ortsbestimmung u. Kompassberichtigung nach neuer Theorie... zur Erweiterung, Vervollkommnung und Vereinfachung der nautischen Astronomie. Hamburg, Eckardt & Messtorff. geb. M. 10.

HOLZMÜLLER, GUST., Die Ingenieur-Mathematik in elem. Behandlung. 2. Teil. Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 6.

JÄGER, GUST., Theoretische Physik. I. Mechanik und Akustik. II. Licht und Wärme (Sammlung Göschen Nr. 76, 77). Leipzig, Göschen. à M. —. 80.

Landes-Triangulation, die königl. preuss. Hauptdreiecke. 10. Teil. A. Der nördl. niederländ. Anschluss. B. Der südl. niederländ. Anschluss. C. Der belgische Anschluss. Berlin, Mittler & Sohn. kart. M. 10.

Nivellements-Ergebnisse, die, der trigonometrischen Abteilung der königl. preuss. Landesaufnahme. 9. Heft. Prov. Hannover und das Grossherzogt. Oldenburg. Berlin, Mittler & Sohn. kart. M. 1.

SCHULTZE, FRZ., Nautik. Kurzer Abriss d. tägl. an Bord von Handelssch. angew. Teils d. Schifffahrtsk. (Samml. Göschen Nr. 84). Leipzig, Göschen. M. —. 80.

TRUCK, SIGISM., Die russische Triangulierung auf der Balkanhalbinsel in den Jahren 1877—1879. Wien, Lechner. M. 1.

Veröffentlichung d. königl. preuss. geod. Instituts. Bestimmungen v. Azimuten im Harzgebiete, ausgef. i. d. J. 1887—1891. Berlin, Stankiewicz. M. 6.

VILLIGER, W., Die Rotationszeit d. Planeten Venus, m. einem Anhang, enth. Beobachtungen der Oberflächenbeschaffenheit d. Planeten Venus u. Merkur. (Aus: „Annalen der Münch. Sternwarte", 3. Bd.) München, Franz. M. 7.

VOLLAND, CONR., Anleitung z. Schattenkonstruktion. Zum Gebrauch f. Schüler technischer Lehranstalten u. s. w. Leipzig, Gebhardt. M. 1. 20.

—— Die Schattenkonstruktion. Zwei Teile. Ebenda. 1. Eine Sammlung von Aufgaben, nebst einer Anleitung z. Schattenkonstruktion. 2. Aufl. M. 2.

—— 2. Aufgabensammlung f. die architekt. Schattenlehre. 2. Aufl. M. 1. 50.

Physik und Meteorologie.

BERG, OTTO, Über die Schwingungsdauer v. Kondensatorentladungen. Diss. Freiburg i. Br., Speyer & Kärner. M. 1.

HÉJAS, ANDR., Die Gewitter in Ungarn nach den Beobachtungen von den Jahren 1871—1895. Budapest, Kilián. M. 4.

HELMHOLTZ, H. v., Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig, Barth.
I, 2. Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. Herausgegeben von OTTO KRIGAR-MENZEL. M. 15.
III. Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik. Herausgegeben von ARTH. KÖNIG und CARL RUNGE. M. 12.

KIENAST, HERM., Das Klima von Königsberg i. Pr. I. Teil. Die Niederschlagsverhältnisse der Jahre 1848—1897. Progr. Königsberg, Koch. M. 3.

LIZNAR, J., Die Verteilung der erdmagnet. Kraft in Österreich-Ungarn zur Epoche 1890·0 nach den in den Jahren 1890—1894 ausgeführten Messungen. II. Teil. A. Die normale Verteilung zur Epoche 1890·0. B. Die Störungen und die störenden Kräfte zur Epoche 1890·0. C. Die normale Verteilung zur Epoche 1850·0. D. Die Störungen der Epoche 1850·0. E. Säkulare Änderung. F. Formel zur Berechnung der erdmagnet. Elemente für eine beliebig zwischen 1850 und 1890 liegende Epoche. (Aus: Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch.) Wien, Gerolds Sohn. M. 7. 80.

MÜLLER-POUILLETS Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 9. Aufl. Von LEOP. PFAUNDLER unter Mitwirkung von OTTO LUMMER. 2. Bd. 2. Abt. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 10.

NEWTON, SIR ISAAC, Optik (1704). Übersetzt und herausg. von WILLIAM ABENDROTH. I. Buch. (Ostwalds Klassiker Nr. 96.) Leipzig, Engelmann. M. 2. 40.

STERNECK, ROB. v., Relative Schwerebestimmungen, ausgeführt in den Jahren 1895 und 1896. Wien, Lechner. M. 1.

THOMPSON, SILVANUS P, Über sichtbares und unsichtbares Licht. Deutsch von OTTO LUMMER. Halle, Knapp. M. 9.

WIEDEMANN, GUST., Die Lehre von der Elektrizität. 2. Aufl., zugleich als 4. Aufl. der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 4. Bd. Braunschweig, Vieweg & Sohn. geb. M. 34.

Historisch-litterarische Abteilung.

Rezensionen.

S. Lie. **Geometrie der Berührungstransformationen.** Dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. 1. Bd. XI und 694 S. Leipzig 1896, B. G. Teubner.

Die analytische Theorie der Lieschen Berührungstransformationen hat ihre Darstellung im zweiten Bande der von Lie und Engel herausgegebenen „Vorlesungen über endliche, kontinuierliche Transformationsgruppen" gefunden; man sehe die Besprechung in dieser Zeitschrift Bd. 39, 1894, S. 95 flg. Wir können uns daher, dem Titel des vorliegenden Bandes entsprechend, im wesentlichen auf die geometrischen Auffassungen und Anwendungen der Theorie beschränken; übrigens wird die letztere als solche auch hier noch einmal in ihren Grundzügen entwickelt.

Um gleich das Hauptturteil vorwegzunehmen, so scheint uns gerade dieses Werk, wie kein anderer Band der ganzen Serie, geeignet, Anfänger in das Liesche System einzuführen: wir möchten sogar noch einen Schritt weiter gehen und es, namentlich im Interesse der Geometer, fast bedauern, dass der vorliegende Band nicht gleich als erster erschienen ist.

Es handelt sich um eine erweiterte Wiedergabe der inhaltsreichen Abhandlungen Lies zumeist aus dem Anfang der siebziger Jahre über Berührungstransformationen. Man erkennt deutlich, wie Lie vom Beginn seiner wissenschaftlichen Thätigkeit an von der Anschauung durchdrungen war, „dass sich Analysis und Geometrie ebenso wie früher auch in unserer Zeit gegenseitig stützen und mit neuen Ideen bereichern sollen." Man beobachtet, aus welchen Anschauungsquellen heraus sich beim Verfasser die Keime zu seinen neuen und umfassenden Ideen gebildet und entwickelt haben, was auf einen historisch veranlagten Leser unzweifelhaft anregender wirkt, als ein systematischer Aufbau der Theorie, so wichtig ein solcher an sich sein mag.

Das Buch gliedert sich in drei grössere Abschnitte.

Der erste behandelt die Lehre von den Linienelementen (kürzer „L. E.") in der Ebene nebst den zugehörigen Berührungstransformationen (kürzer „B. T.").

Der zweite und dritte Abschnitt nehmen die Erweiterung auf den Raum in Angriff, die in doppelter Weise vor sich geht: der zweite Ab-

schnitt führt in die Lehre von den L. E. im Raume ein, der dritte in die von den Flächenelementen (kürzer „F. E."). Die B. T. des Raumes bleiben im wesentlichen einem zweiten Bande vorbehalten.

Der erste Abschnitt beginnt zweckmässig mit einer Anzahl klassischer geometrischer Transformationen, die sich als B. T. einer Ebene in sich, respektive einer Ebene in eine andere auffassen lassen.

Dahin gehören die Orthogonalprojektion einer Ebene auf eine zweite, die allgemeine ebene projektive Punkttransformation und die ebene Inversion. Es sind das „uneigentliche" B. T. der Ebene. Zunächst ordnen sie nur je einem Punkte P der Ebene einen Punkt P' zu; da aber wegen der Stetigkeit der Transformationen auch jedem zu P benachbarten Punkte Q ein zu P' benachbarter Punkt Q' entspricht, mithin auch jeder Fortschreitungsrichtung durch P eine bestimmte Fortschreitungsrichtung durch Q, so wird auch jedem Punkt und einer durch ihn gehenden Geraden ein anderer Punkt nebst einer durch ihn gehenden Geraden korrespondieren. oder, nach Lie, ein L. E. einem L. E. Die beiden entgegengesetzten Richtungen einer Geraden werden hierbei nicht auseinandergehalten (s. u.). Analytisch ergiebt sich sofort, wenn

1) $$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

die Punkttransformationen darstellen, durch „Erweiterung" die Transformation der Richtungen:

2) $$p_1 = \frac{Y_x + Y_y p}{X_x + X_y p},$$

wo

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad p_1 = \frac{dy_1}{dx_1},$$

und die X_x etc. die bezüglichen partiellen Differentialquotienten bedeuten.

Dass die neue Auffassung bereits manche Vorteile bietet, dafür mag die Inversion als Beispiel dienen; die übliche Ausnahme in der Zuordnung von Pol O und der unendlich fernen Geraden u fällt jetzt fort, da dem Pol O und einer durch ihn gehenden Richtung (Geraden) ein bestimmter Punkt auf u, also auch hier ein L. E. einem L. E. entspricht.

Man hätte freilich auch die Punkttransformation 1) mit irgend einem von 2) verschiedenen Zuordnungsprinzip für die Richtungen kombinieren können, gegenüber all diesen zusammengesetzten Transformationen ist die durch 1), 2) festgelegte offenbar dadurch ausgezeichnet, dass sie die L. E. einer Kurve wiederum in die L. E. einer Kurve überführt.

Als Beispiele für „eigentliche" B. T. der Ebene — die nicht durch Erweiterung einer Punkttransformation entstehen — dienen die Dilatation, die Fusspunkttransformation, die Transformation durch reziproke Polaren.

Hier geht zwar auch jedes L. E. einer Kurve in ein ebensolches über, aber die L. E. eines Punktes verwandeln sich im allgemeinen nicht wieder in die eines Punktes, sondern in die einer Kurve. Man wird so darauf geführt, einen Begriff aufzustellen, der die Begriffe „Punkt" und „Kurve", und nur diese umfasst: das ist der „Elementverein", analytisch eine solche ∞^1 Schar von L. E., die der „speziellen Pfaffschen Gleichung":

3) $$dy - p\,dx = 0$$
genügen. Auch die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, p) = 0$ führt von selbst darauf: eine solche Gleichung integrieren heisst nichts anderes als alle Elementvereine zu bestimmen, deren Elemente $F = 0$ erfüllen.

Eine B. T. der Ebene ist damit definiert als eine solche Transformation der L. E. (x, y, p), die jeden Verein von Elementen (x, y, p) in einen Verein (x_1, y_1, p_1) überführt. Analytisch ist dazu das Bestehen einer Identität

4) $$dy_1 - p_1 dx_1 = \varrho(x, y, p)(dy - p\,dx) \quad (\varrho \neq 0)$$
erforderlich, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Invarianz der Gleichung 3).

Alle B. T. der Ebene lassen sich, wie eine einfache Rechnung zeigt, durch „ausführbare" Operationen (nämlich Differentiationen und Eliminationen) erhalten.

Dasselbe leistet eine weniger einfache, aber tiefer eindringende Integrationsmethode, die darauf beruht, dass die eine B. T. der Ebene ausdrückenden Transformationsfunktionen x_1, y_1, p_1 der x, y, p an gewisse Differentialrelationen geknüpft sind, deren Bestehen umgekehrt eine B. T. charakterisiert.

Indessen ist wohl zu beachten, dass keine der beiden Methoden eine explizite Darstellung sämtlicher B. T. der Ebene liefert. Will man das, so wird man genötigt, den Begriff der „infinitesimalen" B. T. einzuführen, das ist einer solchen, bei der die L. E. nur unendlich kleine Änderungen erfahren. Die mittels der Taylorschen Reihe auszuführende Rechnung zeigt, dass eine beliebige Funktion $f(x, y, p)$ bei einer infinitesimalen B. T. den Zuwachs

5) $$\delta f = [(Wf) - Wf_y]\,\delta t = Bf \cdot \delta t$$
erfährt, wo δt einen unendlich kleinen Parameter bedeutet, W eine gewisse Funktion der x, y, p, (Wf) den sogenannten „Poissonschen Klammerausdruck"; umgekehrt liefert 5) bei Annahme einer willkürlichen Funktion W stets eine infinitesimale B. T.

Der Ausdruck Bf, der Faktor von δt in 5), heisst das „Symbol" der infinitesimalen B. T., W ihre „charakteristische Funktion".

Mit der Theorie der B. T. der Ebene ist aufs engste die ihrer „Differentialinvarianten erster Ordnung" verknüpft, das ist der der B. T. gegenüber invarianten Funktionen von x, y, p; eine solche ist eine beliebige Funktion von zwei unabhängigen Individuen u, v; kennt man von diesen nur die eine, so bestimmt sich die andere durch eine Quadratur. Weiterhin tritt der Begriff zweier „vertauschbarer" B. T. $B_1 f$ und $B_2 f$ in den Vordergrund, das heisst solcher, deren Reihenfolge gleichgültig ist; sie lassen sich auf eine besonders einfache kanonische Form (nämlich zweier infinitesimaler Translationen) bringen.

Die Verfasser unterlassen nicht, die obigen Begriffe und Sätze an zahlreichen Beispielen zu illustrieren. Es mag genügen auf eine An-

wendung hinzuweisen, die hinsichtlich der Bedeutung und Schwierigkeit des Gegenstandes die Tragweite der Methoden erkennen lässt: wie muss das Bogenelement einer Fläche beschaffen sein, auf der die Schar der geodätischen Kreise unendlich viele B. T. gestattet? Als Resultat einer nicht einfachen Rechnung ergiebt sich, dass nur zwei Klassen solcher Flächen existieren, die Flächen konstanter Krümmung und die Spiralflächen.

Der Übergang zum zweiten Abschnitt, der den L. E. des Raumes gewidmet ist, wird durch eine Operation vermittelt, die auch weiterhin eine durchgreifende Bedeutung erhält, durch eine „Abbildung" der L. E. (x, y, p) der Ebene auf den Punktraum. Eine solche ist leicht herzustellen: man trage etwa im Punkte (x, y) des L. E. (x, y, p) der Ebene E ein Lot von der Länge p auf, so wird der Endpunkt (x, y, p) das „Bild" des L. E. der Ebene E sein und umgekehrt.

Demgemäss bilden sich die Elementvereine der Ebene E im Raume ab als die „Integralkurven" von 3), das heisst als die Kurven, deren L. E. die Gleichung 3) erfüllen.

Die Verfasser ergreifen die Gelegenheit, den allgemeinen „Pfaffschen Gleichungen" — linearen homogenen Gleichungen in dx, dy, dp, deren Koeffizienten Funktionen von x, y, p sind — insbesondere ihren kanonischen Formen respektive denen ihrer linken Seiten, der „Pfaffschen Ausdrücke", eine eingehende Untersuchung zu Teil werden zu lassen; es giebt solcher kanonischen Formen bei Anwendung von Punkttransformationen (x, y, p) nur zwei respektive drei, von denen im ersteren Falle die Gleichung 3) die eine repräsentiert.

Wir lassen diese und damit zusammenhängende speziellere Untersuchungen beiseite und wenden uns zu den grundlegenden Entwickelungen über Mongesche Gleichungen und Plückersche Linienkomplexe.

Indem, wie üblich, x, y, z, die Koordinaten eines Raumpunktes bezeichnen mögen, verstehen die Verfasser unter einer „Mongeschen Gleichung" eine in dx, dy, dz homogene, deren Koeffizienten im allgemeinen noch von x, y, z abhängen.

Da ein L. E. des Raumes bestimmt ist durch seinen Punkt (x, y, z) und die beiden Verhältnisse der dx, dy, dz, welche seine Richtung angeben, so wird vermöge einer Mongeschen Gleichung aus den ∞^5 L. E. des Raumes eine ∞^4-Schar ausgeschieden, so zwar, dass jedem Raumpunkt P noch eine ∞^1-Schar von L. E. zugewiesen ist, deren Geraden den „Elementarkegel" von P bilden. Auf einer beliebigen Fläche liegen daher stets eine oder mehrere Scharen von Integralkurven einer Mongeschen Gleichung.

Für den Geometer werden in erster Linie solche Mongesche Gleichungen in Betracht kommen, die ∞^3 Gerade als Integralkurven besitzen. Dann und nur dann wird die Mongesche Gleichung zu einer in sechs Grössen p_{ik} — den Plückerschen Linienkoordinaten einer durch einen Punkt (x, y, z) und einen ihm benachbarten bestimmten Geraden — homogenen Gleichung $\Phi(p_{ik}) = 0$; mit anderen Worten, eine solche Gleichung $\Phi(p_{ik}) = 0$

charakterisiert (durch ihre ∞^4 L.E.) einen Plückerschen Linienkomplex, so dass die Theorie der Mongeschen Gleichungen die der Linienkomplexe umfasst.

Eine Mongesche Gleichung ordnete jedem Raumpunkt ∞^1 L.E. zu, deren Geraden die Kanten eines Elementarkegels waren. Um auch die dualistische Auffassung zur Geltung zu bringen, nach der ein Kegel von seinen Tangentialebenen umhüllt wird, wird man sagen, dass die Mongesche Gleichung zugleich jedem Raumpunkt ∞^1 „Flächenelemente" (kürzer „F. E.") zuordnet, wo unter einem F. E. der Inbegriff eines Punktes und einer durch ihn gehenden Ebene zu verstehen ist. Als „Koordinaten" eines F. E. werden fungieren die Koordinaten x, y, z des Punktes nebst den Grössen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, die die Stellung der Ebene (Richtung ihrer Normalen) fixieren.

In diesem Sinne bietet sich die Fragestellung dar: wie kann man bei gegebener Mongescher Gleichung alle Flächen bestimmen, die in allen ihren Punkten P den zugeordneten Elementarkegel berühren, oder auch, für deren jeden Punkt P das F. E., das ihm die Fläche vermöge der Tangentialebene zuweist, sich stets unter den ∞^1 F. E. befindet, die ihm die Mongesche Gleichung zuweist.

Es erscheint von vornherein plausibel, dass sich alle diese Flächen durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in z $F(x, y, z, p, q) = 0$ ergeben werden. Anderseits wird jede Integralfläche einer Mongeschen Gleichung von ∞^1 Kurven, den „Charakteristiken", überdeckt, so, dass in jedem Punkt der Fläche der zugehörige Elementarkegel längs der betreffenden Kurve berührt.

Der Vollständigkeit halber entwickeln die Verfasser auch die Grundzüge der Plückerschen Liniengeometrie, doch so, dass stets die Beziehungen zu den Differentialgleichungen hervortreten; ein historisches Kapitel über ältere Untersuchungen über Geradenscharen im Raume dürfte die Geometer lebhaft interessieren. Als ein typisches Muster für die skizzierten Methoden erscheint die Behandlung des „tetraedralen Komplexes", das ist der Gesamtheit der Geraden, die ein festes Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnis schneiden.

Ein bemerkenswertes Hilfsmittel ist hierbei die „logarithmische Abbildung" des Raumes, in dem lx, ly, lz als neue Veränderliche eingeführt werden. Logarithmische Abbildungen sind wohl schon öfters von Graphikern zur praktischen Auflösung von Gleichungen und anderem mit Vorteil verwendet worden, in der Geometrie dürften sie bisher selten aufgetreten sein.

Diese Abbildung vereinfacht hier nicht nur wesentlich die Differentialgleichung des tetraedralen Komplexes, sondern sie gewährt auch den Vorzug, die projektiven Transformationen des Tetraeders in sich in Translationen umzuwandeln.

Indem wir die Behandlung einiger Probleme der Liniengeometrie, die auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung führen, nur streifen,

kommen wir zu dem Kapitel über die Beziehungen zwischen den Geraden und Kugeln des Raumes, das die Verfasser selbst als das wichtigste des ganzen Bandes hinstellen.

Die Grundlage bilden die konformen Punkttransformationen der Ebene und des Raumes. Eine konforme Punkttransformation der Ebene hängt, wie man weiss, noch von (zwei) willkürlichen Funktionen ab; beschränkt man sich aber auf die, die jeden Kreis in einen Kreis überführen, so gelangt man zu der wohlbekannten Gruppe von ∞^6 Transformationen, die in der modernen Theorie der automorphen Funktionen eine so wichtige Rolle spielen. Dagegen hängt die Gesamtheit der konformen Punkttransformationen des Raumes, da sie von selbst jede Kugel in eine Kugel überführen, von vornherein nur von einer endlichen Anzahl von (zehn) Parametern ab.

Diese „Gruppe“ von konformen Punkttransformationen des Raumes wird in Beziehung gesetzt zu einer, den Geometern gleichfalls geläufigen Abbildung des Raumes auf die Ebene, die analytisch durch die Gleichungen

$$6)\qquad x = X,\ y = Y,\ r = iZ$$

dargestellt wird, so dass dem Raumpunkte (X, Y, Z) der Kreis in der Ebene $C = 0$ mit dem Zentrum (x, y) und dem Radius r zugeordnet wird. Verfolgt man aber die Abbildung 6) weiter, so erkennt man, dass sie ein ein-eindeutiges Entsprechen vermittelt zwischen den konformen Punkttransformationen des Raumes und den B. T. der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis überführen. Es beruht das darauf, dass vermöge 6) das ebene Bild einer „Minimalgeraden“, i. e. einer Geraden des Komplexes $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$, ein L. E. ist.

Neben die Abbildung 6) stellt sich eine andere, nicht minder wichtige. Man denke sich im Raume ein (allgemeines) Möbiussches Nullsystem gegeben, seine L. E. genügen einer Pfaffschen Gleichung, die sich durch projektive Transformation auf die typische Form bringen lässt:

$$7)\qquad d(z + xy) - 2y\,dx = 0,$$

die also vermöge der ein-eindeutigen quadratischen Transformation

$$8)\qquad \xi = x,\quad \eta = z + xy,\quad \pi = 2y$$

in 3) übergeht. Führt man demnach die Abbildungen 8), 6) nach einander aus, so entsteht eine Abbildung des Raumes in sich, so, dass jedem Punkt (x, y, z) eine Minimalgerade des Raumes (X, Y, Z) zugeordnet wird, und umgekehrt einem Punkte (X, Y, Z) eine Gerade des Nullsystems 7): als Resultat einer längeren Elimination erhält man die wichtigen Darstellungsgleichungen:

$$9)\qquad X + iY + xZ + z = 0,\quad x(X - iY) - Z - y = 0.$$

Ein Nullsystem ordnet aber auch die F. E. des Raumes zu „reziproken“ Paaren an, indem stets dem Punkt (Ebene) des einen F. E. Ebene (Punkt) des andern entsprechen, mithin auch die Flächen zu reziproken Paaren. Daher charakterisiert 9) zugleich eine ein-zweideutige Zuordnung der Flächen, indem immer einem Paar reziproker Flächen im Raume (x, y, z) eine einzige Fläche im Raume (X, Y, Z) korrespondiert und umgekehrt.

Im besonderen gehen die F. E. einer Kugel über in die zweier Geraden (die dann reziproke Polaren des Nullsystems sind).

Das bemerkenswerteste Ergebnis ist aber, dass sich bei zwei vermöge 9) zugeordneten Flächen die Krümmungslinien den Haupttangentenkurven entsprechen.

Der dritte und letzte Abschnitt behandelt die Theorie der F. E. und als einen integrierenden Bestandteil von ihr die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$10)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Diese Auffassung wird aber erst allmählich entwickelt. Vorerst begnügen sich die Verfasser damit, Lagranges Theorie der Gleichungen 10) in einer geometrischen Einkleidung vorzutragen, wie sie im wesentlichen schon Monge gewählt hat, wobei der Begriff des F. E. eine mehr formale Rolle spielt, insofern er die Sprechweise erleichtert.

In diesem Sinne verlangt die Integration von 10), die durch 10) bestimmten ∞^4 F. E. in ∞^2 Scharen von je ∞^2 Elementen einer Fläche anzuordnen. Die Gleichung all dieser Flächen, die zwei Parameter a, b mit sich führt:

$$11)\qquad z = \Phi(x, y;\ a, b)$$

ist die „vollständige Lösung" von 10); durch Differentiation und Elimination der a, b kommt man von 11) zu 10) zurück. Für irgend eine Lösung $z = \varphi(x, y)$ von 10) liegen dann drei Möglichkeiten vor: I. Die Fläche $z = \varphi$ hat alle ihre ∞^2 F. E. mit einer Fläche 11) gemein, ist also in 11) als „Partikularlösung" enthalten; II. die Fläche $z = \varphi$ hat mit jeder von gewissen ∞^1 Flächen 11), die durch eine willkürliche Gleichung $\omega(a, b) = 0$ ausgeschieden werden, je ein F. E. gemein, ist also deren Umhüllende, das liefert die „allgemeine" Lösung von 10); III. die Fläche $z = \varphi$ hat mit jeder Fläche 11) nur eine diskrete Anzahl von F. E. gemein, ist also die Umhüllende von 11), und heisst eine „singuläre" Lösung von 10).

Die beiden letzteren Lösungen ergeben sich aus 11) durch ausführbare Operationen, so die allgemeine Lösung (Integralfläche), auf die wir uns hier beschränken, durch Elimination von a aus:

$$12)\qquad z = \varphi,\ \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\, b'(a) = 0,$$

wo $b(a)$ die mit $\omega(a, b) = 0$ äquivalente Funktion b von a bedeutet. Die Kurven, die 12) bei Variieren von a darstellt, sind die „Charakteristiken" von 11), deren es aber nur eine ∞^3 Schar giebt, da man die drei Grössen a, $b(a)$, $b'(a)$ als die drei einzigen Parameter ansehen kann.

Diese ∞^3 Charakteristiken führen unmittelbar vermöge ihrer ∞^4 L. E. wieder zur Theorie der Mongeschen Gleichung zurück: deren Elementarkegel sind genau dieselben, wie die durch die F. E. 10) einem jeden Punkte zugeordneten.

Die systematische Behandlung des Gegenstandes basiert auf dem Fundamentalbegriff eines „Vereines" von F. E. Sagt man von zwei unend-

lich benachbarten F. E., sie seien in „vereinigter Lage“: wenn sie die Pfaffsche Gleichung $dz - pdx - qdy = 0$ erfüllen, so bildet eine Schar von F. E. einen „Verein“, wenn jedes Element der Schar mit allen unendlich benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt.

Ein Elementverein besteht entweder aus ∞^2 F. E. — dann ist er eine Fläche, oder eine Kurve, oder ein Punkt — oder aus ∞^1 F. E., dann ist er ein Elementarkegel, oder, wenn die ∞^1 F. E. längs einer Kurve liegen, ein „Elementstreifen“. Dann lautet das, alle Fälle umfassende Problem der Integration von 10): Man soll alle Elementvereine der ∞^4 F. E. 10) aufsuchen. Eine „vollständige Lösung“ von 10) ist jetzt allgemeiner eine Schar von ∞^2 (verschiedenen) Vereinen von je ∞^2 F. E., die 10) genügen. Noch wichtiger ist der Begriff des „charakteristischen Streifens“, der jetzt an die Stelle der „Charakteristik“ tritt. Deutet man nämlich a, b als Punktkoordinaten in einer (a, b)-Ebene, so ist ein charakteristischer Streifen einfach das räumliche Bild eines L. E. der Ebene; denn eine einfache Rechnung zeigt, dass zwei sich in einem Punkte (a, b) berührende Kurven $\omega_1(a, b) = 0$, $\omega_2(a, b) = 0$ zwei allgemeinen Integralflächen von 10) entsprechen, die sich längs der Charakteristik 12) berühren, das heisst einen Elementstreifen gemein haben.

Schneidet man anderseits die Gesamtheit der Integralflächen von 10) durch eine allgemein, aber bestimmt gewählte (ξ, y)-Ebene, so wird dadurch zwischen der (a, b)-Ebene und der (ξ, y)-Ebene eine Beziehung festgelegt: diese Beziehung erweist sich als eine B. T.

Indem wir uns versagen, auf die weiteren Ausführungen in dieser Richtung — so den Existenzbeweis für die Integrale einer analytischen Gleichung 10), ferner die wichtige Rolle, welche die „Involutionsbeziehung“ bei mehreren Gleichungen 10), spielt — einzugehen, weisen wir noch kurz auf einige Kapitel hin, die — in Analogie mit den bekannten Erscheinungen bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen — von dem Vorteil handeln, den die Kenntnis einer oder mehrerer infinitesimalen Punkttransformationen, die eine Gleichung 10) gestattet, für ihre Integration darbietet. Diese Untersuchungen sollen im zweiten Bande systematischer wieder aufgenommen werden. Desgleichen möchten wir die Geometer noch besonders auf das letzte Kapitel aufmerksam machen, in dem eine Reihe flächentheoretischer Probleme analytisch, aber unter wesentlicher Verwendung geometrischer Mittel, gelöst wird. Es handelt sich um die Bestimmung aller Gleichungen 10), deren Charakteristiken auf allen Integralflächen entweder Haupttangentenkurven, oder Krümmungslinien, oder geodätische Linien, oder Gerade sind; ferner die, deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines gegebenen Linienkomplexes haben, sowie die, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Linien enthalten, die einem vorgelegten Linienkomplex angehören. Mit Ausnahme des dritten werden diese Probleme vollständig gelöst.

Haben wir so versucht, dem Leser eine Vorstellung nicht nur von der Reichhaltigkeit des Werkes, sondern auch von den Gedankengängen selbst,

die es beherrschen, zu verschaffen — ein Versuch, der allerdings nur dann erspriesslich wirken kann, wenn er zu wirklichem Studium des auch stilistisch gut geschriebenen und mit schönen Zeichnungen illustrierten Buches anregt — so seien uns noch einige zusätzliche Schlussbemerkungen gestattet. Herr E. Study hat bereits in den Göttinger Anzeigen von 1897, S. 436—445 eine Reihe von Einwänden erhoben, die wir im ganzen für gerechtfertigt halten. Dahin gehört einmal, dass es Lie verschmäht, beim L. E. (und entsprechend beim F. E.) die beiden Richtungen, die positive und negative, zu trennen, was für manche Gattungen von Problemen nicht nur opportun, sondern geradezu notwendig erscheint. Ferner wird man Study beistimmen müssen, wenn er das geflissentliche Vermeiden der homogenen Koordinaten, oder allgemeiner gesprochen, den öfteren Mangel zweckmässiger Koordinatensysteme missbilligt.

Wir mögen in letzterer Hinsicht etwa die fundamentalen, auf gewöhnliche rechtwinklige Punktkoordinaten bezogenen Gleichungen 7) herausgreifen. Trotz ihres scheinbar einfachen Aussehens wird kaum jemand im stande sein, bei ihrem Anblick den reichen, in ihnen verborgenen Gedankeninhalt auch nur zu ahnen, dessen allmähliche Enthüllung denn auch wie eine Reihe von Überraschungen wirkt. Bei Anwendung von (überzähligen) Kugelkoordinaten würden nicht nur die Gleichungen selbst, sondern auch die Rechnung, die zu ihnen führt, wesentlich durchsichtiger werden. Andererseits können wir es sehr wohl verstehen, aus welchen Gründen Herr Lie auf derartige formale Verschönerungen seines Apparats kein Gewicht gelegt hat. Die ganze Richtung seiner Untersuchungen kann unseres Erachtens in zwei Stichworten charakterisiert werden. Einmal liegen die grossen Fortschritte, die er erzielt hat, in der geeigneten logischen Zusammenfassung scheinbar diskreter Begriffe zu höheren Einheiten, wie er z. B. der Begriff des Elementvereines in Ebene, Raum (und höheren Räumen) ist.

Herr Lie hat bei seiner Auswahl, um mit Schopenhauer zu reden, den beiden Hauptprinzipien der Homogenität und der Spezifikation gleichmässig Rechnung getragen, das heisst, in populärer Sprechweise, seine Begriffe sind weder zu eng, noch zu weit. Dadurch hat er es eben ermöglicht, viele Fälle, die früher als „Ausnahmefälle“ beiseite standen oder gar störend wirkten, einem grösseren Hauptfall anzugliedern.

Von nicht geringerer Wichtigkeit ist für die sehr umfassende Gattung seiner Probleme das analytisch-geometrische Prinzip der Abbildung, in dessen Ausübung er unerschöpflich ist. Die Kunst dieser Abbildung besteht geradezu darin, Erscheinungen, die auf einem ersten Gebiet schwer zu entwirren sind, durch Übertragung auf ein anderes Gebiet zu selbstverständlichen zu machen.

Man wird wohl aber nicht fehl gehen, wenn man annimmt, dass eine gesunde Weiterentwickelung der Gesamt-Mathematik gerade wesentlich an jene beiden Prinzipien gebunden sein wird, da sie ein Auseinanderfallen des Ganzen in eine unübersehbare Reihe von Teilen verhüten.

Als dritte Forderung wird allerdings die schon oben berührte hinzutreten müssen, dass jede Beziehung zwischen mathematischen Grössen auch eine ihm adäquate Form anzunehmen hat; man wird immer wieder darauf zurückkommen müssen, mit Plücker zu reden, in den Gleichungen (und zwar nicht bloss den geometrischen) unmittelbar zu lesen: zu dem Behuf sollen sie freilich „lesbar" sein. Das bedingt dann wieder, dass die blosse Rechnung überall auf das denkbarste Minimum zu reduzieren ist.

Was bei einem derartigen Untersuchungsprogramm in jedem Einzelfall mit dem Beiwort „neu" zu belegen ist, wird stets Sache der subjektiven Meinung bleiben. In diesem Sinne sind wir der Überzeugung, dass gerade der vorliegende Band — mögen auch manche Fachgenossen in ihm nichts wesentlich neues zu finden meinen — fruchtbar wirken wird.

W. Fr. Meyer.

Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Von H. Burkhardt. Leipzig 1897. Veit & Comp.

Das in der Überschrift genannte Werk zerfällt in sechs Abschnitte und stellt sich als Aufgabe, den Studenten gleichzeitig den Zugang zur Riemannschen und Weierstrassschen Funktionentheorie zu eröffnen, wobei jedoch die Riemannschen geometrischen Vorstellungsformen in den Vordergrund gestellt sind.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Theorie der komplexen Zahlen. Die Lehre von den gebrochenen und negativen Zahlen wird dabei zunächst als bekannt vorausgesetzt, die komplexen Zahlen werden sodann als Zahlenpaare eingeführt, ihre Rechnungsoperationen angegeben und geometrisch gedeutet.

Der zweite Abschnitt behandelt die rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und die durch sie vermittelten konformen Abbildungen. Es wird zunächst der Begriff der konstanten und der veränderlichen komplexen Grösse definiert und daran sofort derjenige der rationalen Funktion einer komplexen Veränderlichen angeknüpft. Nennen wir die letztere $f(z)$, so stellt:

$$z' = f(z)$$

eine Abbildung der z Ebene auf die z' Ebene dar, oder, wenn man die Grössen z und z' in derselben Ebene und unter Zugrundelegung desselben Axensystems deutet, eine Transformation der Ebene in sich. Die hierbei auftretenden Beziehungen werden bei einer Reihe von Transformationen untersucht, und zwar sind es im wesentlichen die Transformationen:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \text{ (mit ihren verschiedenen Spezialfällen),}$$
$$z' = z^2,$$
$$z' = z^n.$$

Die lineare Transformation wird nicht nur in der Ebene, sondern auch auf der Kugel gedeutet.

Sodann folgen einige wenige allgemeine Sätze über ganze und gebrochene rationale Funktionen. Es ist weniger der Zweck dieses Abschnittes, die mannigfaltigen bei den behandelten Funktionen auftretenden Abbildungsaufgaben genauer zu studieren, als an der Hand derselben einige Fundamentalbegriffe der modernen Funktionentheorie in einfacher Weise einzuführen. Es sind dieses die Begriffe einer Gruppe von Transformationen, der Invariante einer Gruppe, der automorphen Funktionen, des Fundamentalbereiches einer Funktion u. s. f. Ich möchte diese überaus einfache und anschauliche Art der Einführung in die Funktionentheorie als eine äusserst glückliche bezeichnen. Ein jeder, der sich mit Funktionentheorie beschäftigt, mag er im übrigen der Weierstrassschen oder der Riemannschen Anschauungsweise folgen, wird aus ihr mannigfachen Gewinn erzielen.

Weniger einverstanden kann Referent sich mit dem dritten Abschnitt erklären. Derselbe enthält Definitionen und Sätze aus der Theorie der reellen Veränderlichen und ihrer Funktionen inklusive der Sätze über Differentialquotienten, bestimmte einfache und Doppelintegrale. Es ist nicht die Absicht des Verfassers, diese Sätze zu entwickeln, vielmehr begnügt er sich damit, sie anzuführen und verweist im übrigen auf die wichtigsten Werke über die Theorie der Funktionen einer Veränderlichen. Die Bedenken, die sich gegen eine solche Darstellung erheben lassen, sind die folgenden. Erstens erscheint es nicht logisch, diese Theorie erst im dritten Abschnitt aufzustellen, da in den früheren Abschnitten teilweise schon von ihnen Gebrauch gemacht ist. So z. B. werden an dieser Stelle erst die irrationalen Zahlen eingeführt, obgleich mit ihnen thatsächlich schon beständig operiert worden ist; ferner wird definiert, was unter einer reellen veränderlichen Grösse x zu verstehen ist, während doch schon im zweiten Abschnitt der kompliziertere Begriff der komplexen Veränderlichen eingeführt wird. Ebenso wird jetzt erst der Begriff der Stetigkeit erläutert, trotzdem schon zuvor mehrfach von dem stetigen Verhalten bestimmter Funktionen gesprochen worden ist. Wenn es daher überhaupt notwendig erscheint, die angegebenen Sätze zusammenzustellen, so dürfte es besser am Beginn des Werkes geschehen. Es kommt aber ein zweiter schwerwiegender Einwand hinzu. Der dritte Abschnitt umfasst nur wenige Seiten — das Verständnis desselben erfordert aber bei der von dem Herrn Verfasser mit Recht erstrebten und geforderten Strenge ein sehr eingehendes Studium der Theorie der reellen Funktionen. Die letztere kann aber als einfach nicht mehr bezeichnet werden, sodass der elementare Charakter des Burkhardtschen Buches geradezu illusorisch wird.

Um hier nur einen Punkt schärfer hervorzuheben: die Hauptschwierigkeit bei der Einführung in die Cauchy-Riemannsche Funktionentheorie besteht erfahrungsgemäss in einer klaren und strengen Begründung des Cauchyschen Integralsatzes. Wird nun, wie es in dem vorliegenden Buche geschieht, der Satz über die Reduktion eines gewissen Doppelintegrals auf ein Linienintegral einfach als bekannt vorausgesetzt, so ist

damit jene Schwierigkeit in Wahrheit nicht überwunden, sondern lediglich übergangen — der Student muss dann eben zusehen, wo er die nötige Belehrung findet.* Die gewöhnlichen Vorlesungen und Lehrbücher über Differential- und Integralrechnung werden hierbei nicht genügen. Aus diesem Grunde will es mir sehr bedenklich erscheinen, dergleichen Dinge in einem für Anfänger bestimmten Elementarbuche über Funktionentheorie ohne weiteres als bekannt vorauszusetzen.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit den eindeutigen analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Der Herr Verfasser knüpft von neuem an die Theorie der rationalen Funktionen an, aber jetzt nach anderer Richtung, wie im dritten Abschnitt. Er entwickelt den Begriff der Stetigkeit und den Begriff des Differentialquotienten einer rationalen Funktion komplexen Argumentes und zeigt dann vor allem, dass die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, dass ein Ausdruck von der Form $X + iY$, in welchem X und Y rationale Funktionen von x und y bedeuten, auf die Form einer rationalen Funktion von $z = x + iy$ gebracht werden kann, folgendermaßen lauten: X und Y müssen den partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x},$$

Diese Eigenschaft giebt dem Herrn Verfasser Anlass zu der bekannten Definition einer in einem Bereiche regulären eindeutigen Funktion des komplexen Arguments $x + iy$. Mit der so gewonnenen Definition beginnt die Einführung einer neuen allgemeineren Methode für den weiteren Aufbau der Funktionentheorie. Bisher war der Herr Verfasser von einfacheren zu schwierigeren Funktionen übergegangen, deren analytische Form von vornherein feststand. Von jetzt an knüpft er nicht mehr an irgendwelche analytische Ausdrucksformen an, sondern im Cauchy-Riemannschen Sinne an bestimmte Eigenschaften der regulären Funktionen. Hierbei geht er in der üblichen Weise vor. Er definiert zunächst das Integral einer regulären Funktion komplexen Argumentes und entwickelt im Anschluss daran den bekannten Cauchyschen Satz, mit dessen Hilfe der Wert, den eine reguläre Funktion des komplexen Argumentes z in irgend einem Punkte ζ eines Bereiches S besitzt, ausgedrückt wird durch die Werte derselben Funktion auf dem Rande dieses Bereiches. Dieser Cauchysche Satz dürfte wohl infolge seiner grossen Allgemeinheit und Fruchtbarkeit als der wichtigste

* Hierbei bleibt es dahingestellt, ob es bei der Einführung in die Funktionentheorie überhaupt zweckmässig erscheint, den Cauchyschen Lehrsatz mit Hilfe jenes Doppelintegralsatzes zu beweisen. Man vergleiche über diesen Punkt die Arbeiten von Pringsheim über den Cauchyschen Integralsatz in den Münchner Sitzungsberichten aus dem Jahre 1896.

des ganzen Buches bezeichnet wurden — er ist es, welcher der in demselben vertretenen Auffassung der Funktionentheorie das charakteristische Gepräge giebt. Gerade aus diesem Grunde erschien es mir zweckmässig, auf die unzulängliche Erörterung seiner eigentlichen Grundlagen innerhalb des Burkhardtschen Buches oben ganz ausdrücklich hinzuweisen.

Von diesem Cauchyschen Lehrsatz werden in dem vierten Abschnitt drei Anwendungen gemacht.

Erstens wird gezeigt, dass, wenn eine Funktion komplexen Argumentes in einem Kreise um den Nullpunkt regulär ist, sie sich für alle Punkte ζ im Innern desselben in eine gewöhnliche Potenzreihe von ζ entwickeln lässt.

Zweitens resultiert daraus der Laurentsche Satz betreffend die Entwickelung einer Funktion, die in einem von zwei konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt begrenzten Ringe regulär ist.

Drittens wird der Satz bewiesen, dass die Summe einer in einem zusammenhängenden Bereiche gleichmässig konvergenten Reihe regulärer Funktionen selbst eine innerhalb dieses Bereiches reguläre Funktion vorstellt.

Der erste Satz führt naturgemäss zu der Weierstrassschen Funktionenlehre zurück, bei welcher die Potenzreihe das alleinige Fundament bildet. Die einfachsten Eigenschaften der Potenzreihen werden aufgestellt und die charakteristischen Eigenschaften der rationalen und der ganzen transcendenten Funktionen entwickelt. Von letzteren werden die Exponential, die Sinus- und die Cosinusfunktion gesondert betrachtet. Dabei zeigt es sich, dass der Begriff der regulären Funktion noch nicht vollständig genügt. Der Funktionsbegriff muss dahin erweitert werden, dass in dem näher zu untersuchenden Bereiche einzelne Ausnahmepunkte zugelassen werden, in welchen entweder überhaupt kein bestimmter Funktionswert vorhanden ist oder der betreffende Funktionswert in seiner Beziehung zu den Nachbarwerten nicht mehr alle Bedingungen erfüllt. Hierbei kommt der Herr Verfasser zu der Definition des Poles einer Funktion $f(z)$, führt ferner bei der ganzen transcendenten Funktion den Unendlichkeitspunkt als wesentlich singulären Punkt ein — wenn auch an dieser Stelle die letztere Bezeichnungsweise nicht gebraucht wird.

Die Laurentsche Reihe giebt Anlass zu der Entwickelung der Fourierschen Reihe, der dritte Satz endlich über die Summen unendlich vieler regulärer Funktionen führt zu dem bekannten Mittag-Lefflerschen Theorem über die Entwickelung einer Funktion mit unendlich vielen Polen in der Form einer unendlichen Partialbruchreihe. Dasselbe wird unter gewissen beschränkenden Annahmen bewiesen und als Beispiel die Funktion cotang z betrachtet.

Schliesslich ist zu bemerken, dass sich auch in diesem Abschnitt einige Untersuchungen über konforme Abbildungen vorfinden.

Der Inhalt dieses Abschnittes muss als ein reicher bezeichnet werden, die Darstellung ist, wie durchweg, eine elegante.

Der fünfte Abschnitt beschäftigt sich mit den mehrwertigen analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Der Herr Verfasser bemerkt in der Einleitung, dass die von ihm getroffene Anordnung des Stoffes vielleicht nur geteilter Zustimmung begegnen wird. Er betrachtet nämlich zuerst zwei unendlich vieldeutige Funktionen, den Arcus einer komplexen Grösse und den Logarithmus, deren Riemannsche Flächen konstruiert werden. Die hierbei gewonnenen Sätze werden zur Diskussion von $\sqrt{z}$, der Funktionen, die auf der Riemannschen Fläche von $\sqrt{z}$ eindeutig sind, der Funktion $\sqrt[n]{z}$ und einzelner anderer mehrdeutiger algebraischer Funktionen gebraucht. Die Diskussion der allgemeinen algebraischen Funktionen fehlt. Mit dem letzteren Punkte kann Referent sich durchaus einverstanden erklären, dagegen erscheint ihm der Aufbau einer Theorie der Funktion $\sqrt{z}$ und $\sqrt[n]{z}$ auf der Theorie des Arcus und des Logarithmus denn doch zu weit hergeholt. Zwar wird man gut thun, von der trigonometrischen Form der komplexen Zahlen Gebrauch zu machen, das könnte aber doch geschehen, ohne zuvor so tief in die Theorie des Arcus und des Logarithmus einzudringen, als der Herr Verfasser es thut.

Noch ein Punkt sei aus diesem Abschnitt herausgegriffen. Der Herr Verfasser definiert den allgemeinen Logarithmus einer komplexen Grösse durch das Integral:

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

— die Theorie des gewöhnlichen reellen Logarithmus setzt er aber hierbei als bekannt voraus. Referent würde es für methodisch richtiger halten, die Definition und die Eigenschaften des allgemeinen Logarithmus in der Weise festzustellen, dass die Definition und die Eigenschaften des reellen natürlichen Logarithmus der reellen positiven Zahlen sich als spezielle Fälle daraus ergeben.

Im sechsten Abschnitt, welcher als „Allgemeine Funktionentheorie“ bezeichnet ist, wird der allgemeine Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen entwickelt. Der Herr Verfasser denkt sich zunächst in einem beliebigen Bereiche S eine reguläre (d. h. Cauchy-Riemannsche) Funktion $f(x)$ als ursprünglich vorgelegtes „Funktionselement“ irgendwie definiert und daraus mit Hilfe von Taylorschen Reihenentwickelungen, deren Konvergenzbezirke über S hinausreichen, neue „Funktionselemente“ abgeleitet. Die Gesamtheit der durch solche „analytische Fortsetzung“ erreichbaren Elemente konstituiert dann eine „analytische Funktion“. Es findet also hier eine Vermischung der Cauchy-Riemannschen und der Weierstrassschen Definitionsform statt, auf die der Herr Verfasser augenscheinlich grosses Gewicht legt, die mir indessen nicht glücklich durchgeführt zu sein scheint. Vor allem bemerke man folgendes: während bei Weierstrass immer nur eine einzelne Potenzreihe mit bestimmten Koeffi-

zienten als Funktionselement bezeichnet wird, verliert dieser Begriff jede feste Bedeutung, wenn, wie es hier geschieht, die genannte für irgend einen Bereich S definierte Funktion $f(z)$ als Funktionselement eingeführt wird. Denn mit demselben Rechte müsste dann auch $f(z)$ mit einer Reihe von Fortsetzungen genommen als ein einziges Funktionselement gelten, oder man müsste etwa die Festsetzung treffen, dass ein neues Funktionselement beginnt, sobald die Variable z den ursprünglichen Definitionsbereich verlässt. In diesem Falle würde aber der Begriff des Funktionselementes von der zufälligen Wahl des Bereiches S abhängen, und es entsteht ferner die Unzuträglichkeit, dass eine und dieselbe Potenzreihe, welche innerhalb S mit $f(z)$ übereinstimmt und auch noch in einem gewissen ausserhalb liegenden Bereiche S' konvergiert, nunmehr zwei verschiedene Funktionselemente vorstellen würde. Dergleichen Unebenheiten hätten durch ein konsequenteres Festhalten der Weierstrassschen Definitionen und Entwickelungen vermieden werden können. Ohne zu tief hierauf einzugehen, möge folgendes bemerkt werden. Auch bei Herrn Burkhardt tritt die Potenzreihe, welche bei der Cauchy-Riemannschen Betrachtungsweise lediglich eine sekundäre Rolle spielt, als wichtiges, ja eigentlich alles beherrschendes Moment, ähnlich wie bei Weierstrass in den Vordergrund. Wenn das aber geschieht, so wäre ein tieferes Eingehen auf deren Eigenschaften erforderlich gewesen, als es thatsächlich geschieht. Insbesondere wird der fundamentale Satz über den wahren Konvergenzbezirk einer Potenzreihe, durch welchen das Auftreten singulärer Stellen und deren wahre Natur erst verständlich wird, schwer vermisst. Was sich hierüber in dem Burkhardtschen Buche findet, scheint doch gar zu unzulänglich. Das gleiche gilt von denjenigen Bemerkungen, welche sich auf analytische Funktionen analytischer Funktionen beziehen.

Alles in allem muss man sagen, dass von dem elementaren Charakter und der lichtvollen Klarheit der Weierstrassschen Methode leider viel zu wenig in den vorliegenden Abschnitt übergegangen ist. Wesentlich besser geraten sind die nachfolgenden funktionentheoretisch-geometrischen Betrachtungen (Spiegelung, konforme Abbildung), mit welchen das Buch schliesst: hier zeigt sich die knappe und elegante Darstellungsweise des Herrn Verfassers wieder von ihrer besten Seite.

M. Krause.

Abels theorem and the allied theory including the theory of the theta functions by H. F. Baker. Cambridge 1897. At the University Press.

Das in der Überschrift genannte Werk ist mit sehr grosser Sach- und Litteraturkenntnis geschrieben und enthält eine Übersicht über die wichtigsten Teile aus der Theorie der Abelschen Integrale und ihrer Umkehrfunktionen. Es zerfällt in zwei Teile, von denen der erste in acht Kapiteln die Theorie der Integrale, der zweite in zwölf Kapiteln die Theorie der Umkehrfunktionen enthält. Die Lektüre des Werkes wird einigermaßen

durch den Umstand erschwert, dass der Herr Verfasser das Forsythsche Lehrbuch über Funktionentheorie als bekannt voraussetzt.

Im ersten Teile werden, um wenigstens eine kurze Übersicht über den reichhaltigen Inhalt zu geben, die Abelschen Integrale der drei verschiedenen Arten definiert und mit einander verglichen. Bei der Betrachtung der rationalen Funktionen zweier veränderlicher Grössen, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht, ergiebt sich der Begriff des Geschlechtes, der Weierstrasssche Lückensatz und der Riemann-Rochsche Satz. Die Weiterführung der Theorie ergiebt eine Vereinfachung in der Form der Abelschen Integrale. Es werden dazu die Fundamentalsysteme der definierten Funktionen eingeführt, ihre Eigenschaften untersucht und Anwendungen auf die Darstellung der Integrale der verschiedenen Arten gemacht. Im fünften Kapitel werden einige besondere Fälle der Riemannschen Fläche, insbesondere der hyperelliptische in Betracht gezogen. Das sechste Kapitel bringt geometrische Anwendungen. Im siebenten Kapitel wird die Theorie von Funktionen entwickelt, welche alle rationalen Funktionen auf der Riemannschen Fläche darzustellen erlauben, daneben finden sich Betrachtungen über die Vertauschung von Argument und Parameter und Periodenrelationen. Das folgende Kapitel hat das Abelsche Theorem zum Gegenstand. Dasselbe wird auf mehrfachem Wege bewiesen und geometrisch gedeutet. Hiermit schliesst der erste grosse Teil des Werkes. Es folgt nunmehr im neunten Kapitel das allgemeine Umkehrproblem. Die Auflösbarkeit wird nachgewiesen und dazu die allgemeine Thetafunktion eingeführt, deren charakteristische Eigenschaften studiert werden, insbesondere werden auch die Nullstellen eingehend untersucht. Die bei der Umkehrung auftretenden Beziehungen werden in einigen Fällen noch eingehender diskutiert, so vor allem in dem hyperelliptischen Falle. Sodann wendet der Herr Verfasser sich zu einer sorgfältigen von den früheren Betrachtungen unabhängigen Theorie der allgemeinen Thetafunktionen. Es werden dazu die verschiedenen Arten von Additionstheoremen, darunter die von Frobenius und in neuester Zeit von Prym und Krazer gegebenen ausführlich entwickelt und zur Aufstellung von Thetarelationen verwandt. Das allgemeine Transformationsproblem wird aufgestellt und die allgemeinen Formeln abgeleitet, hierbei wird auch der Fall kurz berührt, dass die Transformationszahlen gebrochene Zahlen sind. Das spezielle Transformationsproblem, sowie die mannigfachen Differentialgleichungen und Entwickelungen der Thetafunktionen respektive Thetaquotienten werden nicht in Betracht gezogen. Eine Theorie der komplexen Multiplikation und einige Bemerkungen über die Reduktion höherer auf niedere Integrale schliesst das inhaltreiche Werk, dessen Lektüre einem jeden aufs wärmste empfohlen werden kann, der sich mit der allgemeinen Theorie der Abelschen Integrale und Funktionen beschäftigt.

M. Krause.

Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Par Émile Picard, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et Georges Simart, Capitaine de Frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. Tome I. VI, 246 p. 8⁰. Paris 1897. Gauthier-Villars et fils.

Dieses Werk stellt den ersten Versuch dar, eine Theorie, welche bisher in dem Dunkel der Zeit- und Akademieschriften sich entwickelt hat, in systematischer Form zusammenzufassen und einem weiteren Leserkreise vorzuführen. Wie die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen aus zwei Quellen, aus der Kurven- und aus der Funktionenlehre, entsprungen ist, so hat auch die vorliegende höhere Theorie doppelten Ursprung: einen geometrischen in deutschen Arbeiten von 1868—1874 über die rationale Transformation algebraischer Flächen, einen transcendenten in Arbeiten, um 1884, des einen der beiden Verfasser dieses Buches, E. Picard's, über die Existenzbedingungen totaler algebraischer Differentialausdrücke auf singulären Flächen. Beide Untersuchungsrichtungen sind inzwischen fortentwickelt worden; die erstere ist in neuerer Zeit durch einige talentvolle jüngere italienische Mathematiker in lebhaften Fluss geraten, die zweite hat Herr Picard selbst durch neue Resultate bereichert, besonders in einer vor kurzem gehaltenen Vorlesung, aus welcher auch das Werk hervorgegangen ist. Man könnte so fürchten, dass die geometrische Richtung in der Darstellung stark zurücktreten möchte. Indes sorgen die Verfasser in den beiden letzten der 8 Kapitel des ersten Bandes für eine selbständige Darlegung der Resultate jener früheren Arbeiten, der nächste Band soll auch über ihre Weiterführung berichten und wird hoffentlich auch zur Ausfüllung der grossen Lücke, welche bis jetzt die beiderseitigen Invarianzbetrachtungen von einander trennte, beitragen.

Der vorliegende Band bringt zunächst einige Kapitel sehr allgemeiner Natur über die Definition totaler m-facher Integrale im n-fach ausgedehntem Raume, über die Riemann-Bettischen Zusammenhangszahlen beliebig ausgedehnter Gebilde, über die Ausdehnung der Cauchyschen Residuentheorie auf Doppelintegrale und die zugehörigen Periodenverhältnisse — zum grösseren Teile nach Poincaré. Die in den Kapiteln IV—VI gebotenen Anwendungen auf algebraische Flächen, die Betrachtung der zugehörigen linearen cyklischen Wege und einfachen totalen Differentialausdrücke gehören ganz Herrn Picard an. Insbesondere ist es erfreulich, dass die Verfasser hier den Standpunkt der Auflösung der Singularitäten einer Fläche durch Transformation adoptieren und sogar eine neue, verhältnismässig einfache Methode vorschlagen, welche freilich, trotz richtiger Endresultate, noch weiterer Durcharbeitung (siehe S. 78) bedarf. Dass das Beispiel Seite 175 zu keinem Integral dritter Gattung geführt hat, liegt wesentlich daran, dass die dort betrachtete Fläche eine rationale ist. Auch die beiden letzten mehr geometrischen Kapitel über Flächen und ihre Doppelintegrale sind sehr übersichtlich (nur die Bemerkung über den Fall $\gamma'' = 0$, Seite 182 und 188, nicht zutreffend).

Der zweite Band will auch durch Anwendungen die Bedeutung d. vorgetragenen neuen Theorien ersichtlich machen. So begrüssen wir den dieses Werk als Darstellung — wie die Verfasser es aussprechen — d. gegenwärtigen Standes der Wissenschaft bezüglich eines Gebietes, dessen Studium die Anstrengung vieler Forscher verdient, und zwar, wie w. hinzufügen, als eine wohlgelungene Darstellung einer an sich sehr schwierigen Materie.

M. Noether.

Vorlesungen über Kreis- und Kugelfunktionenreihen. Von Dr. Johann Frischauf, Professor an der Universität Graz. Leipzig 189. B. G. Teubner. VI und 60 S.

In einem vier Druckbogen umfassenden Schriftchen behandelt Herr Frischauf die Grundlagen der für zahlreiche Anwendungen innerhalb der mathematischen Naturbetrachtung so wichtigen Fourierschen Reihen u. Kugelfunktionen. Die Darstellungsweise des Verfassers ist allenthalben so fasslich und elementar gehalten, als es die Schwierigkeiten des Gegenstandes irgend zuliessen. Besondere Erwähnung verdient die Behandlung des Theorems von der Entwickelbarkeit einer auf der Kugeloberfläche willkürlich gegebenen eindeutigen Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ in eine nach Kugelfunktionen zweier Argumente fortschreitende Reihe. Hier ist es eine bekannte Schwierigkeit jeder Vorlesung über Potentialtheorie, dass die Konvergenz dieser Reihe (Konvergenz der Kugelfunktionenreihe des Potentials einer Kugelfläche a. der Konvergenzgrenze) schwer beweisbar ist. Bekanntlich unterlag der ursprüngliche Dirichletsche Beweis der Kritik. Herr Frischauf gi.. eine vereinfachte Fassung des korrekten Dinischen Beweisganges. Beispiele ausführlich zu behandeln, hat leider nicht in der Absicht des Verfassers gelegen. In dieser Hinsicht sind uns die englischen Lehrbücher vielf. überlegen (siehe z. B. Byerly, An elementary treatise on Fouriers series etc. Aber auch so wird sich das vorliegende Buch unter den Studierenden zahlreiche Freunde erwerben.

R. Fricke.

Maurice d'Ocagne. **Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale.** Paris, Gauthier-Villars.

Dem Anwachsen des Stoffes in den einzelnen mathematischen Disziplinen entsprechend haben viele neuere Lehrbücher einen Umfang angenommen, der sich kaum noch mit dem Gebrauch von seiten der Studierenden verträgt. Insbesondere gilt das für die darstellende Geometrie, und man kann daher nur zustimmen, wenn Lehrbücher erscheinen, welche sozusagen die gewöhnlichen Kenntnisse bei ihren Lesern voraussetzen, ohne deshalb ausgewählte Kapitel zu bringen, vielmehr auch Elementargebiete behandeln, aber dort neue Ausblicke gewähren. Ich habe hier namentlich Mannheims géométrie descriptive im Auge; aber auch das vorliegende Werk vertritt die gekennzeichnete Tendenz.

Es zerfällt in die beiden, nur sehr lose zusammenhängenden Teile, wie sie der Titel zum Ausdruck bringt. In erster Linie verfolgte wohl der Verfasser mit der Herausgabe des Lehrbuches die Absicht, seinen Hörern an der école des ponts et chaussées den Inhalt seiner dort gehaltenen Vorträge in exakter Form darzubieten.

Der erste Teil zerfällt in die Kapitel:

Kotierte Projektionen, Axonometrische Perspektive, Schattenkonstruktionen, Linearperspektive.

Das erste Kapitel erledigt den Gegenstand in der üblichen Weise, besonderes ist nicht hervorzuheben.

Die Behandlung der axonometrischen Perspektive weicht in ihrem Ausgangspunkte von der gewöhnlichen dadurch ab, dass anfangs ohne nähere Begründung nur die Vorschrift erteilt wird, die Koordinaten eines darzustellenden Raumpunktes nach drei in einer Bildebene beliebig wählbaren Richtungen von einem Punkte aus aufzutragen und dann durch äquipollente Strecken den Bildpunkt festzulegen. Erst am Schlusse des Kapitels wird durch einen analytischen Beweis des Pohlkeschen Satzes die Identität der Methode mit derjenigen der schiefen Projektion nachgewiesen.

Das Vorgetragene wird (Kapitel III) für die Schattenkonstruktion verwertet, indem der Schatten eines Körpers auf eine Ebene als dessen schiefe Projektion aufgefasst wird. Für eine bestimmte Wahl des Lichtstrahles — der üblichen, bei der Grund- und Aufriss-Winkel von 45^0 mit der Axe einschliessen —, ergeben sich dann Verhältniszahlen, mit deren Hilfe sich häufig auftretende Schattenformen leicht in der jeweiligen Projektion ohne Heranziehung der anderen konstruieren lassen. Als Beispiel sei das Verhältnis der Axen jener Ellipse, welche eine Kugel als Schatten auf die Projektionsebene wirft, ferner die Form des Schattens vom Rande einer Kugelschale im Innern derselben, angeführt.

Die Benutzung der zum Teil bekannten Formeln gestattet schnelles Arbeiten und sichert sehr genaue Resultate, stellt aber an das Gedächtnis des Zeichners erhebliche Anforderungen.

Bemerkenswert ist eine einfache Regel, nach der man entscheidet, ob eine Fläche ihre beleuchtete oder ihre dunkle Seite dem Beschauer zukehrt. Die Grundrisse der Erläuterungsfiguren unter II und III der Nr. 102 sind leider versehentlich unschraffiert geblieben, dem ganz richtigen Texte widersprechend.

Aus dem Kapitel der Linearperspektive sei nur eine hübsche Konstruktion des Bildes einer Kugel erwähnt, von dem in einfacher Weise ein Paar konjugierter Durchmesser angegeben wird.

Der zweite Teil, die Infinitesimalgeometrie, ist die eigentliche pièce de résistance des Werkes. Das Ziel ist die strenge Ableitung der verschiedenen Sätze und Konstruktionen, welche sich in Bezug auf Tangenten, Schmiegungsebenen, Krümmung etc. geometrisch definierter Gebilde ergeben, und zwar in rein geometrischer Form. Die Aufgaben decken sich vielfach

inhaltlich mit denen der Kinematik veränderlicher Systeme, nur dass bei der Lösung von dem Begriffe der Bewegung kein Gebrauch gemacht wird.

Die Grundlage des Ganzen bilden einige Fundamentalformeln, welche in anderer Weise abgeleitet bereits in dem oben erwähnten Mannheimschen Werke sich vorfinden und von denen die dritte (in Worten) als besonders charakteristisch hier mitgeteilt werden möge. Zieht man von einem Punkt A einer Kurve je eine Tangente an zwei andere Kurven, so ist das Bogendifferential, welches A durchläuft, gleich dem Winkeldifferential des Tangentenwinkels, multipliziert mit dem Unterschiede der reziproken Entfernungen der Schnittpunkte, welche die Kurvennormalen in den Berührungspunkten der Tangenten auf der Bahnnormalen in A verzeichnen, von dem Punkte A. Bleibt insbesondere der Tangentenwinkel konstant, so verschwindet sein Differential; des endlichen Bogendifferential wegen muss demnach der andere Faktor, nämlich die auftretende Differenz unendlich gross werden, d. h. die Normalen der Enveloppen der Schenkel eines bewegten starren Winkels schneiden sich in jedem Augenblick auf der Normalen der vom Scheitel beschriebenen Kurve, ein Resultat, dessen Richtigkeit durch Heranziehung des Drehpols unmittelbar in Evidenz tritt. Von Anwendungen sei eine besonders einfache Bestimmung des Krümmungs-Mittelpunkts der Fusspunktkurve einer gegebenen Kurve hervorgehoben. Merkwürdigerweise ist nur eine einzige kinematische Anwendung, nämlich die auf den Peaucellierschen Inversor gemacht. Um so lieber weisen wir auf die vom Verfasser auf Grund der mitgeteilten Formeln gegebene Bestimmung der Kurve hin, welche das Triebrad eines Zweirades beschreibt, dessen Leitrad (Vorderrad) eine bestimmte Bahn durchläuft.* Bei geradliniger Fahrt sind beide Kurven identisch und es ist interessant zu verfolgen, wie sich beim Übergang in die gekrümmte Bahn die Kurven von einander lösen, um sich später beim Aufhören der Kurve wieder zu vereinigen. An den Trennungspunkten haben beide Bahnen gemeinschaftliche Tangenten.

Die nun folgenden Anwendungen auf die Raumgeometrie beziehen sich auf Kurven und Flächen. Im wesentlichen ist die Methode rein geometrisch, doch werden analytische Hilfsmittel nicht vollständig vermieden. Von speziellen Kurven wird die Schraubenlinie, von speziellen Flächen werden die Hüllflächen einer Kugel, die windschiefen und abwickelbaren Flächen behandelt, die Minimalflächen kurz berührt.

Der Inhalt ist ein sehr reicher. Wenn es gestattet ist, einen Wunsch zu äussern, so wäre es der nach einer etwas weiter durchgeführten konstruktiven Lösung der aufgestellten Fragen; damit wäre auch eine innigere Verbindung der beiden Teile des Werkes hergestellt, welche jetzt eigentlich wenig mit einander zu thun haben.

* Im „Génie civil" vom 27. Juni 1896.

C. Rodenberg.

Oeuvres de Laguerre publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, membres de l'Institut. Tome I. Algèbre. Calcul intégral. Paris 1898. Gauthier-Villars et fils. 468 p. 15 fr.

In dem Bericht, welchen Ossian Bonnet erstattete, als sich Laguerre um einen Sitz in der Akademie bewarb, heisst es: Laguerre est un des géomètres les plus pénétrants de notre époque; ses découvertes en Géométrie lui assignent le premier rang parmi les successeurs de Chasles et de Poncelet, et ses recherches nombreuses et profondes sur l'Algèbre et le Calcul différentiel et intégral accusent un talent d'analyste de premier ordre.

Die wissenschaftliche Welt muss es der Pariser Akademie Dank wissen, dass sie die Herausgabe der gesammelten Arbeiten Laguerres beschlossen hat. Die Herren Hermite, Poincaré und Rouché haben sich dieser Aufgabe unterzogen und so Laguerres Schriften diejenige Einwirkung auf die Entwickelung der modernen Mathematik gesichert, welche ihnen gebührt.

Die Sammlung ist auf zwei Bände berechnet. Der erste beginnt mit einer Einleitung des Herrn Poincaré. Diese, sowie die von Herrn Rouché (Journal de l'Ecole Polytechnique LVI, 213—277, 1886) gegebene Biographie ist in der folgenden Darstellung zu Grunde gelegt.

Edmond Laguerre wurde am 9. April 1834 zu Bar-le-Duc geboren. Schon früh zeigte sich sein mathematisches Talent. Noch candidat à l'Ecole Polytechnique trat er im Jahre 1853 mit einer Arbeit hervor, durch die er eine Lücke in der modernen Geometrie ausfüllte: Er gab die Lösung zu dem Problem der homographischen Transformation der Winkelbeziehungen, eine Lösung, welche einem Poncelet und Chasles entgangen war. Terquem schrieb aus Anlass dieser Lösung in seinen „Annales“: Profond investigateur en Géométrie et en Analyse, le jeune Laguerre possède un esprit d'abstraction excessivement rare, et l'on ne saurait trop encourager les travaux de cet homme d'avenir. Über ein Jahrzehnt veröffentlichte Laguerre nichts. Er schien von seinen Pflichten als Artillerieoffizier gänzlich in Anspruch genommen. Erst um das Jahr 1865, wo er als répétiteur à l'Ecole Polytechnique nach Paris kam, fing er an, die Ergebnisse seiner Studien mitzuteilen.

Laguerre hat 140 Abhandlungen geschrieben, von denen mehr als die Hälfte auf die moderne Geometrie Bezug haben. Diese sollen den zweiten Band der gesammelten Werke füllen. Der erste Band, welcher vorliegt, enthält die Abhandlungen aus den Gebieten der Algebra und Integralrechnung.

An erster Stelle sind Laguerres Untersuchungen über die algebraischen Gleichungen abgedruckt.

Der Sturmsche Satz giebt die vollständige Lösung des Problems, die Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu bestimmen. Die angenäherte Berechnung der Wurzeln wird alsdann durch die Newton-

sche Methode geleistet. Diese Fragen schienen also durchaus erschöpfend beantwortet. Laguerre macht darauf aufmerksam, dass Sturms Verfahren mehr bewundert als angewendet wird, dass man im allgemeinen zur Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln sowie zur Separation der Wurzeln numerischer Gleichungen Wege einschlägt, die dem speziellen Falle angepasst sind. Er giebt zunächst einen neuen Beweis für die Descartessche Zeichenregel, welcher noch einfacher ist als der bekannte. Die wahre Bedeutung desselben liegt aber darin, dass er sich nicht nur auf die ganzen Polynome bezieht, sondern sich auch auf die unendlichen Reihen ausdehnen lässt. Und in dieser Gestalt führt Descartes' Theorem zu eleganten Regeln, welche, einfacher als die Sturmsche, sich auf ausgedehnte Klassen von Gleichungen beziehen.

Die Newtonsche Methode besteht darin, die algebraische Gleichung durch eine Gleichung ersten Grades zu ersetzen, welche wenig von ihr abweicht. Laguerre ersetzt sie durch eine Gleichung zweiten Grades, die noch weniger von ihr abweicht, und erreicht dadurch eine schnellere Annäherung. Ausserdem versagt diese Methode, solange die Wurzeln reell sind, niemals. Von besonderem Vorteil erweist sich das neue Verfahren bei den Gleichungen, deren linke Seite ein Polynom darstellt, das der linearen Differentialgleichung

$$Py'' + Qy' + Ry = 0$$

genügt. Unter diesen Polynomen betrachtet Laguerre im besonderen die von Herrn Hermite untersuchten Polynome U_n, welche die Differentialgleichung

$$y'' - xy' + ny = 0$$

erfüllen, und die Legendreschen Polynome X_n, die der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

genügen.

Laguerre hat seine Methode auch auf die transcendenten Gleichungen ausgedehnt, d. h. auf den Fall, wo die linke Seite eine ganze transcendente Funktion ist. Es ist ihm unter Benutzung des Weierstrassschen Begriffs der Primfaktoren gelungen, die Einteilung der ganzen transcendenten Funktionen nach dem Geschlecht zu vertiefen. Personne, sagt Poincaré in der erwähnten Einleitung, ne s'est avancé aussi loin que lui dans cette théorie, l'une des plus difficiles de l'Analyse.

Die Untersuchung der Polynome, welche einer linearen Differentialgleichung genügen, veranlasste Laguerre zum Studium der algebraischen Kettenbrüche, welches uns, nach einem Poincaréschen Ausspruch, dereinst zu schneller konvergierenden Entwickelungen der Funktionen führen wird, als vermittelst der Potenzreihen möglich ist. Von Laguerres Resultaten mag das folgende hervorgehoben werden, wonach sich aus einer divergenten Reihe ein konvergenter Kettenbruch herleiten lässt. Es rechtfertigt dieses Ergebnis auf einem neuen Wege den Gebrauch divergenter Reihen, dem sich auf Grund der Poincaréschen Arbeiten noch eine Zukunft vorhersagen lässt.

Eine der längsten Abhandlungen Laguerres trägt den Titel „Sur les systèmes linéaires“ und ist im Jahre 1867 im Journal de l'Ecole Polytechnique veröffentlicht worden. Laguerre entwickelt hier die Theorie der linearen Substitutionen und findet, dass sie eine einfache und gewissermassen arithmetische Deutung für die gewöhnlichen imaginären Grössen, für die Quaternionen, für die clefs algébriques von Cauchy liefert. Diese Prinzipien werden auf die Theorie der quadratischen Formen und auf die Theorie der Abelschen Funktionen angewendet. Laguerre findet hier die Resultate von Herrn Hermite wieder und vervollständigt sie in verschiedenen Punkten.

Als Laguerres bedeutendste Entdeckung in der Theorie der Differentialgleichungen preist Ossian Bonnet in seinem oben erwähnten Bericht die Einführung des Invariantenbegriffs in die genannte Theorie, welcher es ermöglichte, die Differentialgleichungen durch passende Umformungen auf den höchsten Grad der Einfachheit zu bringen. Die Fruchtbarkeit dieses Gedankens ist durch Halphen dargethan worden, welcher unter diesem neuen Gesichtspunkte seine Theorie der Differentialinvarianten entwickelt hat.

Ich habe noch zweier Arbeiten Laguerres Erwähnung zu thun, welche auf dem Gebiete der Potentialtheorie liegen. In der ersten Arbeit „Sur l'attraction qu'exerce un ellipsoïde homogène sur un point extérieur“ C. R. LXXXVI, 1878 gelingt Laguerre die Zurückführung des Potentialausdrucks auf ein einfaches Integral durch Zerschneiden des Ellipsoids in unendlich dünne Scheiben. Diese liegen zwischen zwei unendlich nahen Ebenen, welche der Ebene

$$ix\cos\varphi + iy\sin\varphi + z = 0, \quad i = \sqrt{-1},$$

parallel laufen, wenn (x, y, z) den äusseren Punkt bezeichnet. Hierbei ergiebt sich zunächst die Darstellung der Potentialfunktion mit Hilfe eines Doppelintegrals, welche in der zweiten Arbeit „Sur le potentiel de deux ellipsoides“ C. R. CII, 1886, der letzten Arbeit Laguerres, benutzt wird, um das Potential zweier Ellipsoide durch ein dreifaches Integral auszudrücken.

Den Beschluss des ersten Bandes bildet eine Arbeit von Herrn Hermite unter dem Titel „Sur un Mémoire de Laguerre concernant les équations algébriques“. Herr Hermite leitet hier die Resultate, zu denen Laguerre in seiner Arbeit „Sur une méthode pour obtenir, par approximation, les racines d'une équation algébrique qui a toutes les racines réelles“ Nouv. Ann. de Math. (2) XIX, 1880 gelangt ist, auf einem anderen und einfacheren Wege her.

Laguerre ist am 14. August 1886 in seiner Vaterstadt gestorben. Drei Jahre vor seinem Tode öffneten sich ihm die Pforten des Instituts. Gleichzeitig wurde ihm der Lehrstuhl für mathematische Physik an dem Collège de France übertragen. Wie hoch Laguerre auch als Mensch geschätzt und verehrt wurde, geht aus dem Nachruf hervor, welchen ihm Herr Bertrand im Namen der Akademie gewidmet hat und in welchem

es heisst: „Edmond Laguerre, passionné pour la Science, semblait indifférent au succès. Jamais il n'a négligé un devoir; jamais il n'a sollicité une faveur ... Toujours oublieux de se faire valoir, il a pris sa retraite, jeune encore, sans avoir atteint dans l'artillerie les hauts grades où son mérite semblait l'appeler .... Ses découvertes l'avaient placé au premier rang des géomètres français avant que l'Académie des Sciences en eût entendu discuter et proclamer l'importance."

E. Jahnke.

E. Villié. **Compositions d'analyse, cinématique, mécanique et astronomie données depuis 1889 à la Sorbonne pour la licence ès sciences mathématiques.** Enoncés et solutions. Troisième partie. Gauthier-Villars. Paris 1898. 299 S.

Der vorliegende Band giebt ebenso wie die beiden vorhergehenden eine Sammlung von Aufgaben, die an einer Reihe von Universitäten Frankreichs in den Jahren 1889—1897 für die licence ès sciences mathématiques gestellt worden sind. Bei diesem Examen, welches etwa dem Oberlehrerexamen in Preussen entsprechen würde, werden nur Klausurarbeiten angefertigt. Es unterscheidet sich daher diese Sammlung naturgemäss von den bei uns bekannten Aufgabensammlungen. Es sind durchweg schwierigere Probleme, deren Lösung eine gewisse analytische Geschicklichkeit und Bekanntschaft mit den fundamentalen Gesetzen der Kinematik und Dynamik voraussetzt. Einige Beispiele werden den Charakter des Buches und die Höhe der gestellten Anforderungen am besten erläutern.

An der Ecole Normale wurde im Jahre 1890 als erste Frage die folgende vorgelegt: Es ist zu beweisen, dass der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y'' = n(n+1)y,$$

wo n eine ganze positive Zahl bezeichnet, durch ein Polynom $P(x)$ genügt wird. Weiter ist zu zeigen, dass eine zweite Lösung der Gleichung die Form

$$P \log \frac{x+1}{x-1} + Q$$

hat, wo Q auch ein Polynom darstellt.

Im Jahre 1896 lautete die einzige, an der Ecole Normale gestellte Aufgabe so: Es ist die partielle Differentialgleichung der Flächen zu integriren, deren Normalen Tangenten einer gegebenen Kugel sind. Ferner ist zu beweisen, dass das eine System von Krümmungslinien erzeugt wird, wenn sich grösste Kreise auf der Kugel abwickeln, und dass das andere System sphärisch ist.

Der Mechanik gehören die folgenden Fragen an: Es ist die Bewegung einer ebenen, homogenen, unendlich dünnen kreisförmigen Scheibe zu untersuchen, wenn zwei Punkte des Umfanges gezwungen sind, zwei in einem Punkte O zusammenlaufende lotrechte Geraden zu beschreiben.

Ein schwerer homogener Rotationscylinder von der Masse m ruht auf einer horizontalen Ebene, wo er ohne Reibung gleiten kann. Längs der

Achse desselben wird ein Kanal von unendlich dünnem Querschnitt gebohrt, in welchem sich ein schwerer Punkt von derselben Masse m befindet, der ohne Reibung den Kanal entlang gleiten kann. Es ist die Bewegung des Systems zu untersuchen, wenn man voraussetzt, dass der Cylinder auf die Ebene geworfen wird.

Der Wert der Sammlung wird noch dadurch erhöht, dass den Aufgaben die Lösungen beigegeben sind.

Das Werk kann den Studierenden unserer Hochschulen nur warm empfohlen werden; es giebt ihnen Gelegenheit, in den verschiedenen Gebieten der Analysis, in der Kinematik und Mechanik ihre Kräfte zu erproben und ihr Können zu erweitern.

E. Jahnke.

W. Binder. **Theorie der unicursalen Plankurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung.** Leipzig 1896, B. G. Teubner. 396 S.

Die Theorie der ebenen Unicursalkurven dritter und vierter Ordnung dürfte heute im grossen und ganzen als abgeschlossen gelten. Es kann daher nur dankbar anerkannt werden, dass sich der Verfasser entschlossen hat, die Aufsätze und Abhandlungen, welche zu einem Teil im Laufe der letzten drei Dezennien von verschiedenen Mathematikern, zum andern Teil von ihm selbst speziell in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht worden sind, zu dem vorliegenden, Herrn Schlömilch zugeeigneten Werke zu vereinigen.

Als Motto hat der Verfasser dem Buche die Worte vorgesetzt: Vom Allgemeinen auf das Einzelne. Es sind nämlich die Kurven vierter Ordnung vorausgeschickt worden, da die Kurven dritter Ordnung vielfach Modifikationen der allgemeineren Eigenschaften solcher von der vierten Ordnung enthalten.

Der Verfasser beginnt mit einem allgemeinen Teil, in welchem neben der Aufzählung der wichtigsten Eigenschaften höherer Plankurven eine kurze Ableitung der Büschel resp. Netze und Scharen von Kegelschnitten Platz findet. Daselbst werden noch die allgemeinen Beziehungen mehrdeutiger Grundgebilde, sowie die Gesetze der quadratischen Transformationen erörtert.

Hieran schliessen sich im zweiten und dritten Teil elementare Untersuchungen bezüglich der Unicursal-Plankurven vierter und dritter Ordnung.

Während man beim Studium der Inflexionselemente einer Plankurve mit Hilfe des Kalküls von der Hesseschen Kurve ausgeht, benutzt der Verfasser für die synthetische Untersuchung der Inflexionselemente eine Direktionskurve, welche ausser den Inflexionen noch die Berührelemente der Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung in einen projektivischen Zusammenhang bringt. Bei gewissen Degenerirten einer Kurve vierter Ordnung führt die Methode des Verfassers zu einer bisher nicht bekannten linearen Konstruktion ihrer Inflexionselemente.

Eingehend sind die circularen Kurven behandelt, auf deren sogenannte Kreisverwandtschaft wiederholt hingewiesen wird. Insbesondere ist dieses bei den Kreisverwandten dritter Ordnung geschehen, wo auch die vom Verfasser bezeichneten Scheiteleigenschaften, sowie die Eigentümlichkeit eines Centrums, welches solche Kurven besitzen, ausführlich erörtert werden. Die Gesetze der Symmetrie der betreffenden Kurven werden vom Standpunkte ihrer projektivischen Entstehung untersucht, auf welche Art die Kurvenspezies der Cykloiden, Lemniskaten, Kardioiden und Cissoiden verallgemeinert erscheinen.

Weiter ist der Fall der Identität mit den bekannten Rollkurven, sowie der Fall einer Kurve mit dreifachem Singularpunkt als einer verlängerten Hypocykloide nachgewiesen; und endlich zeigt der Verfasser, dass unter Umständen eine Kardioide identisch einer Epi- oder einer Pericykloide gleich werden kann.

Auch die Theorie der für die Mechanik so wichtigen Fusspunktkurven erfährt eine einfache Begründung im Sinne der projektivischen Geometrie.

Dem vorliegenden Werke sind 65 Figuren im Texte und auf zwei Tafeln beigegeben. Sie umfassen die erklärten Beziehungen und Konstruktionen zum grössten Teil.

E. Jahnke.

H. Hartl, **Lehrbuch der Planimetrie.** Leipzig und Wien 1896, F. Deuticke. 135 S.

An der vorliegenden Bearbeitung des planimetrischen Pensums ist besonders hervorzuheben, dass der Symmetriebegriff zur Herleitung einfachster Sätze herangezogen wird. Den einzelnen Abschnitten, auch schon den allerersten, sind eine Reihe von Aufgaben angehängt, die geeignet erscheinen, das Interesse des Schülers von vornherein zu fesseln. Die Übungsbeispiele sind zum grossen Teile der praktischen Geometrie entlehnt und mit Geschick ausgewählt.

Bezüglich der Abgrenzung des Pensums ist zu bemerken, dass von den Dreieckskreisen die Ankreise keine Erwähnung finden, dass aber zwei kurze Kapitel von der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis und von den Ähnlichkeitspunkten zweier Kreise handeln. Ein Anhang enthält Aufgaben über Maxima und Minima und die algebraische Bestimmung eines Dreiecks.

Die Ausdrucksweise lässt an einigen Stellen Korrektheit und Knappheit vermissen. So heisst es auf S. 67: Der Flächeninhalt eines Kreises wird als ein Vielfaches des über dem Halbmesser zu verzeichnenden Quadrates bestimmt. Ausdrücke wie Inkreis und Umkreis, welche schon in verschiedene Lehrbücher übergegangen sind, hat der Verfasser nicht übernommen. Ferner fiel dem Referenten auf, dass der Verfasser griechische Buchstaben wie α, β zur Bezeichnung von Strecken verwendet.

Von diesen leicht zu beseitigenden Mängeln abgesehen, erscheint dem Referenten das Lehrbuch der Beachtung seitens der Fachgenossen wert.

E. Jahnke.

Annuaire pour l'an 1898, publié par le bureau des longitudes. Avec des notes scientifiques. Gauthier-Villers. Paris. 1 fr. 50 c.

Der kleine Band enthält, wie in jedem Jahre, eine Fülle wissenschaftlicher Daten, welche man in dieser Vollständigkeit wohl nirgends sonst findet. Er beginnt mit astronomischen Tabellen, mit solchen für die Maße und Gewichte und für die Geldsorten; hieran schliessen sich Zinstabellen, geographische, statistische Tabellen, Sterblichkeitstabellen u. a. m. Weiter werden die magnetischen Karten Frankreichs gegeben, Tabellen für die Dichtigkeiten und Elastizitätsverhältnisse der festen Körper, Tabellen für die Wärme, Akustik, Optik und Elektrizität, und endlich auch Tabellen mit den chemischen Konstanten, wobei überall die neuesten Untersuchungen berücksichtigt worden sind. Jeder Tabelle geht eine kurzgefasste Erklärung voran, welche auch dem Laien die Bedeutung der Zahlen verständlich machen und ihm deren Gebrauch ermöglichen soll.

Der Wert des Jahrbuches wird noch erhöht durch die angehängten populär-wissenschaftlichen Aufsätze aus der Feder von berühmten französischen Gelehrten: Sur la stabilité du système solaire, par M. H. Poincaré. — Notice sur l'oeuvre scientifique de M. H. Fizeau, par M. A. Cornu. — Sur quelques progrès récemment accomplis à l'aide de la Photographie dans l'étude de la surface lunaire, par MM. Loewy et Puiseux. — Sur les travaux exécutés en 1897 à l'observatoire du mont Blanc, par M. J. Janssen. — Discours prononcés au cinquantenaire académique de M. Faye, le 25 janvier 1897, par MM. J. Janssen et M. Loewy.

E. Jahnke.

La mathématique. Philosophie. Enseignement. Par C. A. Laisant, Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès sciences. Paris 1898. Georges Carré et C. Naud. 292 p.

Das Buch, von dessen Erscheinen wir unsere Leser in Kenntnis zu setzen wünschen, ist ein wesentlich französisches. Wir verstehen darunter, dass ein Franzose es für Franzosen geschrieben hat, und dass ein gründliches Wissen von dem gegenwärtigen Stande des mathematischen Unterrichtes in Frankreich erforderlich wäre, um ein Urteil zu fällen. Wir sind weit entfernt von einem solchen Wissen, und wir dürfen uns deshalb weder Lob noch Tadel gestatten, das entworfene Bild weder ähnlich noch unähnlich nennen. Die Malerei selbst hat freilich mit der Treue oder Untreue der Abbildung kaum zu thun, und in dieser Beziehung dürfen wir Herrn Laisant einen flotten und kecken Pinselstrich nachrühmen, ein mutiges um nicht zu sagen mutwilliges Spielen mit scharf sich abhebenden Farben, ein Schwelgen in starken Gegensätzen, wie es auch wieder vorzugsweise die französische Schule liebt. Kann und wird der französische Leser in Herrn Laisants Kennzeichnung der einzelnen Abteilungen der Mathematik und der Art, wie er sie gelehrt wünscht, mehr neues finden, als dieses bei einem deutschen Leser der Fall sein möchte? Das ist abermals eine Frage, die zu beantworten wir uns ausser stande fühlen. Herr

Laisant selbst legt auf ihre Bejahung kein besonderes Gewicht. Sagt er doch (S. 11): ein kleines Werk von der Art des seinigen, niedergeschrieben auf der Grundlage eigenen Nachdenkens und einiger Reminiszenzen, sei eher eine anspruchslose Causerie — wir wissen kein den Sinn genau wiedergebendes deutsches Wort — als ein ernstes Buch zu nennen. Seiner Bezeichnung uns anschliessend können wir nur von einer geistreichen Causerie reden, der man gern eine Stunde widmen wird.

CANTOR.

An elementary course of infinitesimal calculus by HORACE LAMB, M. A., F. R. S., Professor of mathematics in the Owens College, Victoria University, Manchester; formerly fellow of Trinity College, Cambridge. Cambridge 1897 at the University Press. XX, 616 p.

Wir haben schon häufig Gelegenheit gehabt, über das Erscheinen von Differential- und Integralrechnungen in deutscher, in französischer, in italienischer, in portugiesischer Sprache zu berichten. Heute zeigen wir zum ersten Male ein ähnliches englisches Werk an. Wir gestehen zugleich ein, dass es das erste englische Lehrbuch der Infinitesimalrechnung aus neuerer Zeit ist. mit welchem wir genauer bekannt geworden sind, und dass wir deshalb in der Lage sind, um Entschuldigung bitten zu müssen, falls wir Herrn Lamb persönlich zuschreiben sollten, was überhaupt englische Eigentümlichkeit sein könnte. Keinenfalls wird Herr Lamb sich darüber beschweren wollen, denn unsere Bemerkungen sind lediglich lobender Natur. Er hat ein Buch verfasst, welches uns dazu bestimmt zu sein scheint, viele Auflagen zu erleben, und wenn es auch in erster Linie für die Zöglinge einer technischen Schule bestimmt ist, so werden doch auch angehende Mathematiker von Fach sich desselben mit Vorteil bedienen, denn nur in der Auswahl der Beispiele giebt die erwähnte Tendenz sich kund, nicht in der Herleitung der einzelnen Sätze. Herr Lamb beginnt mit ausführlichen Grenzbetrachtungen, eine uns um so sympathischere Einleitung, als wir seit Jahren gewohnt sind, unsere Wintervorlesung über Differential- und Integralrechnung mit einer ebensolchen zu eröffnen. Herr Lamb lässt das Integrieren dem Differentieren so nahe als thunlich folgen; wir haben wiederholt auf die Zweckmässigkeit dieser Anordnung hingewiesen. Herr Lamb verschiebt dagegen die Untersuchungen über die Taylorsche Reihe bis an das Ende des Werkes, wo sie dem letzten Kapitel als Überschrift dienen. Das ist eine Neuerung einschneidendster Art. Die Absicht ist die, jenen wichtigen Gegenstand erst dann zur Erörterung zu bringen, wenn der Schüler sich die dazu erforderliche Reife des mathematischen Denkens schon angeeignet hat, und es ist nicht zu leugnen, dass Herrn Lambs 14. Kapitel *Taylor's Theorem* ganz anders aussieht, als ein Kapitel über Reihenentwickelung im ersten Drittel einer Differentialrechnung. Gleichwohl möchten wir aus praktischen Gründen in einer Vorlesung dem neuen Beispiele nicht folgen. Erfahrungsmässig lässt jeder Dozent am Anfange der Vorlesungen sich mehr

oder weniger gehen. Er lässt sich von Zahl und Geistesrichtung seiner Zuhörer beeinflussen, dieses oder jenes Beispiel ausführlicher zu behandeln u. s. w., mit einem Worte: er individualisiert seine Vorlesung, und das kostet Zeit. Gegen Ende des Semesters muss dann rascher vorgegangen werden, und das eine Mal kommen Dinge in Wegfall, welche ein anderes Mal vorgetragen wurden und umgekehrt. Am leichtesten kann, scheint uns, ab- und zugegeben werden, wenn die Differentialgleichungen und ihre Integration den Schluss bilden. Bei dem Vortrage der Taylorschen Reihe kürzen zu sollen, scheint uns sehr bedenklich. Die von Herrn Lamb nun einmal getroffene Anordnung nötigt ihn zu einer wesentlich anderen Behandlung der früheren Kapitel, als sie in Übung zu sein pflegt. Die Auswertung unbestimmter Formen ist ganz weggelassen, die Lehre von den grössten und kleinsten Werten aber von einer Grundlage aus in Angriff genommen, welche man den auf seine Anfangsglieder beschränkten Taylorschen Satz nennen könnte. Aus der Thatsache, dass bei einer stetig verlaufenden Kurve jede Sehne einer Berührungslinie parallel verläuft, deren Berührungspunkt zwischen den Endpunkten der Sehne liegt, folgt, dass

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h).$$

Demnächst werden die Durchschnittspunkte der Kurve $y = f(x)$ mit der parabolischen Kurve $y = A + Bx + Cx^2$ ins Auge gefasst und A, B, C so bestimmt, dass beide Kurven einander bei $x = a$ berühren, bei $x = a + h$ schneiden. Aus dieser Bedingung ergiebt sich unter Anwendung des Rolleschen Lehrsatzes, dass

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta h).$$

Wir könnten auch auf die Auflösung einiger Maximalaufgaben ohne Anwendung von Differentialrechnung hinweisen, welche uns wenigstens in Büchern über Infinitesimalrechnung nie begegnet ist. Zahlreiche andere Einzelheiten werden dem Leser Vergnügen bereiten. Wir heben nur ein Letztes noch hervor, dass nämlich bei der Integration von Differentialgleichungen der Gedanke des integrierenden Faktors weit mehr in den Vordergrund gerückt ist, als dieses sonst zu geschehen pflegt; dadurch gewinnt, wie uns scheinen will, die Darstellung an einheitlicher Färbung. Wir können auch wegen dieses Kapitels das Buch nur aufs wärmste empfehlen.

Cantor.

Higher Arithmetic by Wooster Woodruff Beman, Professor of mathematics in the university of Michigan, and David Eugene Smith, Professor of mathematics in the Michigan state normal college. Boston and London 1897. Ginn & Co. The Athenaeum Press. XVII, 193 p.

Wenn der elementare Inhalt des kleinen Lehrbuchs der Rechenkunst mit Einschluss des sogenannten kaufmännischen Rechnens ein Verweilen bei Einzelheiten verwehrt, so können wir doch nicht umhin auch unsere deut-

schen Fachgenossen auf dieses Erzeugnis amerikanischer Mathematiker aufmerksam zu machen. Die Auswahl der Beispiele, die gegebenen Hinweise auf praktische Rechenvorteile, die ganze Darstellung ist so, dass Referent sich dadurch nur mehr als je in der Überzeugung bestärkt fühlte, ein fruchtbarer Rechenunterricht könne nicht anders als durch einen wirklichen Mathematiker erteilt werden.

CANTOR.

Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes par W. W. ROUSE BALL, fellow and tutor of Trinity College, Cambridge. 3[ième] édition revue et augmentée par l'auteur traduite par J. FITZ-PATRICK. Paris 1898. Librairie scientifique A. Hermann. IV, 352 p.

Im Februar 1892 verliess die erste, im Juli 1896 die dritte Ausgabe des englischen Originals die Druckerpresse, die französische Übersetzung trägt das Datum des 15. November 1897. Das sind Zahlen, welche laut und deutlich einen seltenen buchhändlerischen Erfolg verkünden, den wir nicht anstehen auch von unserer Seite als wohlberechtigt anzuerkennen. Man weiss, wie seit dem Anfange des 17. Jahrhunderts mathematische Aufgabensammlungen erschienen, welche von einer zu Beginn nicht unbedeutenden wissenschaftlichen Höhe allmählich herniederstiegen. Als Schulbücher waren die späteren Sammlungen gewiss verdienstvoll, aber einem wirklichen Mathematiker beim Lesen Vergnügen zu bereiten, reichten sie nicht aus. Edouard Lucas war es, welcher 1882 mit seinem ersten Bande der *Recréations mathématiques*, dem bis 1894 drei weitere Bände nachfolgten, in die alten Bahnen zurücklenkte. Herr Ball stand unzweifelhaft unter Lucas' Einflusse, als er seine eigene Schrift vorbereitete, das zeigt sich schon aus den zahlreichen Erwähnungen jenes Schriftstellers, aber gleichwohl ist Herr Ball durchaus kein blosser Nachahmer, und auch dafür könnten wir ein äusseres Zeugnis anrufen, die Übersetzung ins Französische, welche eine Unmöglichkeit gewesen wäre, wenn das englische Original wenig mehr als eine Umarbeitung eines französischen Buches geboten hätte. Die Litteraturnachweise sind ungemein zahlreich und wertvoll. Inwieweit sie vollständig sind, lässt sich bei dem Mangel an einem alphabetisch geordneten Inhaltsverzeichnisse schwer überwachen. Wiederholt wollte uns indessen scheinen, als sei Michael Stifel nicht so sehr berücksichtigt, als es nötig gewesen wäre. Die französische Übersetzung ist sehr geschickt gemacht und durch wichtige Ergänzungen und Anmerkungen des Bearbeiters bereichert.

CANTOR.

Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Dr. HERMANN SCHUBERT, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig 1898. G. J. Göschensche Verlagshandlung. V, 286 S.

Nach Edouard Lucas, nach Herrn Ball, in teilweiser Anlehnung an beide, aber weit mehr noch in selbständig sie ergänzender Arbeit ist

nun auch ein deutscher Schriftsteller, Herr Schubert, mit einer Sammlung von mathematischen Scherzrätseln aller Art hervorgetreten. Er war vorzugsweise dazu geeignet einesteils durch eine gewisse zahlentheoretisch-kombinatorische Begabung, welche jeder Mathematiker an Herrn Schubert kennt, andernteils durch schon veröffentlichte mathematische Untersuchungen über gewisse Spielereien. Die kleine Sammlung ist der Hauptsache nach für Laien bestimmt, aber auch der Mathematiker wird sie mit Vergnügen durchlesen und sich angeregt fühlen, tiefere wissenschaftliche Betrachtungen insbesondere Herrn Schuberts Originalarbeiten kennen zu lernen.

CANTOR.

Tafeln für das Goldbachsche Gesetz von DR. ROBERT HAUSSNER, Privatdozent der Mathematik an der Universität Würzburg. [Aus den Abhandlungen der kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. 72.] Halle 1897. 214 S.

Das sogenannte Goldbachsche Gesetz besteht bekanntlich darin, dass jede gerade Zahl als Summe zweier ungerader Primzahlen entsteht. Euler hat schon durch Versuche das ihm mitgeteilte Gesetz bestätigt. Ausgedehntere Versuchsreihen hat Herr Georg Cantor 1894 veröffentlicht, und Herr Haussner hat nunmehr in umfangreiche Tabellen zusammengestellt, was er selbst an empirischem Materiale für die Prüfung des Gesetzes in mühevoller Arbeit gesammelt hat. Eine ausführliche Einleitung beschreibt die sehr sinnreiche Art, in welcher Herr Haussner seine Versuche angestellt hat, und berichtet auch über die Versuche und theoretischen Erörterungen, welche Herr Paul Stäckel zum Gegenstande einer Mitteilung in den Göttinger Nachrichten gemacht hat. Allen neueren Bearbeitern des Gegenstandes war neben der Bewahrheitung des Goldbachschen Satzes an sich die Auffindung der möglichen Anzahlen von Zerlegungen angelegen, wie z. B. $30 = 1 + 29 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$ auf vier verschiedene Arten die Summe zweier ungerader Primzahlen ist. Eine unmittelbare Abhängigkeit der Zerlegungsanzahlen von der zu zerlegenden Zahl zu entdecken, ist noch nicht gelungen, wenngleich mancherlei Erfahrungsthatsachen auch nach dieser Richtung hin gesammelt und teilweise begründet werden konnten.

CANTOR.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie zum Gebrauche beim Selbstunterricht und in Schulen, besonders als Vorbereitung auf Geodäsie und sphärische Astronomie bearbeitet, von DR. E. HAMMER, Professor an der königl. Technischen Hochschule Stuttgart. Zweite, umgearbeitete Auflage. Stuttgart 1897. J. B. Metzler. XIV, 572 S.

Die erste Auflage von 1885 haben wir im 30. Bande dieser Zeitschrift Histor.-litter. Abtlg. S. 110—111 unseren Lesern warm empfohlen, und wir können heute, nachdem das Werk um volle $^5/_6$ an Umfang zugenommen hat, also fast ein neues Werk geworden ist, unser früheres Lob nur bestätigen. Dem Wunsche des Verfassers, das Buch möge in Schülerkreisen

sich einbürgern, wird naturgemäss mehr noch als 1885 dessen Umfang im Wege stehen. Schüler kaufen keine Trigonometrie von fast 36 Druckbogen, und wenn ein Einzelner sie kaufen sollte, wo fände er Zeit sie durchzulesen oder gar durchzurechnen? Aber der in zweiter Linie ausgesprochene Wunsch, Lehrer möchten mehr und mehr sich des Buches bedienen, ist zu erfüllen und verdient Erfüllung. Der Lehrer wird das Hammersche Werk als eine stets ergiebige Fundgrube betrachten dürfen, an welche er nur hinanzutreten braucht, um immer neuen, immer fesselnden Stoff für den trigonometrischen Unterricht zu finden, mag er in dieser Beziehung eine noch so häufige, noch so vollständige Abwechslung für wünschenswert halten. Herr Hammer fährt, was wir eigentlich gar nicht anders erwartet haben, fort, $\sin^2\alpha$ u. s. w. zu schreiben. Er wird nicht erwarten, dass wir darum aufhören, diese Schreibweise für unlogisch zu halten. Aber eine Frage mag Herr Hammer uns beantworten. Was hat er gegen

$$d\cdot x^2 = d(x^2), \qquad dx^2 = (dx)^2, \qquad d^2x = ddx$$

$$\log\cdot x^2 = \log(x^2), \quad \log x^2 = (\log x)^2, \quad \log^2 x = \log\log x$$

einzuwenden? Benutzt er immer die nichtabgekürzte zweite Form, oder gestattet auch er sich die Abkürzung wenigstens einer oder der anderen der ersten Formen? Und wenn er diese letztere Frage bejahen sollte, hält er nicht Folgerichtigkeit für eine recht zweckmässige Einrichtung?

Cantor.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Versuch einer Kritik von Dr. Ludwig Goldschmidt, mathematischem Revisor der Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha. Hamburg und Leipzig 1897. Verlag von Leopold Voss. VIII, 279 S.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat als Definition der Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines gewissen Ereignisses den Quotienten der Anzahl der diesem Eintreten günstigen Fälle durch die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle angegeben. Ist diese Definition eine durch die Natur der Ereignisse erzwungene, oder ist sie willkürlich? Sagt sie uns, was Wahrscheinlichkeit ist, oder sagt sie uns nur, was der Mathematiker sich gewöhnt hat so zu nennen? Das ist, wenn wir dem Verfasser in seinen ungemein geistvollen, aber leider nicht immer das Ziel deutlich hervortreten lassenden Auseinandersetzungen richtig gefolgt sind, die Frage, über deren Beantwortung er sich mit den Philosophen auseinandersetzt. Herr Goldschmidt gelangt dabei zu einer Überzeugung, welche Referent mit ihm teilt, und welche sich etwa in folgende meistens dem uns vorliegenden Buche entlehnte Sätze kleiden lässt: Allen unseren Wahrscheinlichkeitsaussagen geht die Notwendigkeit in dem Sinne ab, dass ein eintretender Widerspruch zwischen Erwartung und Ereignis zu einer Auflehnung des Verstandes führen müsste. Überall müssen unseren auf mathematische Formeln zurückgeführten und insofern unfehlbaren Schlüssen Erfahrungsthatsachen zu Grunde liegen, ohne deren Richtigkeit die Schlüsse in der

Luft schweben. Auf dem Standpunkte vollständiger Unwissenheit Wahrscheinlichkeitsrechnungen anzustellen ist durchaus unberechtigt, mögen auch Schriftsteller von noch so grosser Bedeutung sich gegen diese Regel verfehlt haben. Als Grundaufgabe, auf welcher alles sich aufbaut, erscheint das Aufsuchen gleich wahrscheinlicher Fälle.

CANTOR.

Wolfgangi Bolyai de Bolya Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Editio secunda. Tomus I. Conspectus arithmeticae generalis. Mandato Academiae scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adjectis ediderunt JULIUS KÖNIG et MAURITIUS RÉTHY, Academiae scientiarum Hungaricae sodales. Accedit effigies auctoris. Budapestini MDCCCXCVII. Sumptibus Academiae scientiarum Hungaricae. XII, 677 p.

Der Name des ungarischen Mathematikers, den eine auf der Göttinger Universität entstandene Freundschaft mit Gauss verband, ist allgemein bekannt. Mehr noch kennt man den Namen des Sohnes Johann Bolyai, der die Frage nach einer Geometrie, in welcher das Parallelenaxiom nicht herrsche, welche erstmalig von Saccheri gestellt worden war, neuerdings auf die Tagesordnung brachte. Von Wolfgang Bolyai dem Vater kannte das grössere mathematische Publikum nur die oben erwähnte Thatsache, die allerdings das günstigste Vorurteil zu erwecken vermochte, wenn man die geringe Zahl der Männer erwog, welche Gauss seiner Freundschaft würdigte. Dennoch war es schwer, den Meisten unmöglich, ein eigenes Urteil über Wolfgang Bolyais Leistungen zu gewinnen, da über seinen Schriften ein doppelter Unstern leuchtete. Sie waren so gut wie unerhältlich, und wer eines Exemplares habhaft wurde, fühlte sich durch die vielen ungewohnten Bezeichnungen sowie durch den mangelhaften Druck, der unter den ungünstigsten Verhältnissen sich durch mehrere Jahre hindurchgeschleppt hatte, abgeschreckt. Die Ungarische Akademie hat es als eine Ehrenpflicht erkannt, für eine neue würdige Ausgabe Sorge zu tragen, deren erster Band in gradezu glänzender Ausstattung vollendet vor uns liegt. Von den fremdartigen Bezeichnungen sind einige gewichen, wie Bolyai in einer Selbstanzeige einst als wünschenswert erkannt hatte, andere sind beibehalten worden, mit welchen sich allmählich zu befreunden Aufgabe des Lesers ist. Der erste Band des *Tentamen* besteht aus vier Abschnitten: 1. Grundzüge einer allgemeinen Arithmetik, 2. Differential- und Integralrechnung nebst Grundzügen der Variationsrechnung, 3. Grundzüge der Theorie der Gleichungen, 4. Zusätze. Das Erscheinungsjahr des Tentamen in seiner ersten Ausgabe war 1832. Bolzanos in Prag erschienene Schriften waren seit etwa 15 Jahren, Cauchys *Analyse algébrique* seit 11 Jahren im Handel, während die *Disquisitiones circa seriem etc.* von Gauss gar schon seit 20 Jahren für die Wissenschaft vorhanden waren. Diese Daten wird man gut thun im Auge zu behalten, um der Versuchung zu entgehen, Bolyais Tentamen eine noch bahnbrechendere Be-

deutung beizulegen, als es hätte erringen können, wenn es rechtzeitig genügend bekannt geworden wäre. Wollten und mussten wir durch diese Bemerkung einer Überschätzung des Tentamen in den Weg treten, so liegt uns nichts ferner, als eine Unterschätzung veranlassen zu wollen. Die Schriften, auf welche wir hingewiesen haben, lassen erkennen, worin die Eigenart und mit ihr der wissenschaftliche Wert des Tentamen besteht. Der Bruch mit jener Darstellungsweise, welche an dem Entdecken immer neuer analytischer Wahrheiten sich genügen liess, ohne eine vollkommene, allen Bemängelungen trotzende Sicherung derselben für unerlässlich zu halten, ist vollzogen. Das Hauptgewicht fällt auf die tiefe Begründung. Der Begriff der Grenze ist es insbesondere, welchen Bolyai (S. 20) scharf zu fassen sich bemüht. In deutscher Übersetzung lautet die betreffende Stelle etwa folgendermassen:

Findet ein gewisses A in jedem Augenblicke einer Zeit T statt, dagegen in einem nach T eintretenden Zeitpunkte t nicht mehr, so muss es, wenn T fortgesetzt zunimmt, einen Zeitpunkt p geben, welcher der letzte von dem Anfange von T an gerechnet ist, bei welchem das Stattfinden von A zutrifft. In p ist also zum letzten Male A oder zum ersten Male Nicht $-A$. Ist in p das Nicht $-A$, so wird hinter dem p irgendeinmal immer A oder immer Nicht $-A$ stattfinden, es sei denn, dass hinter dem p jeder Zeitpunkt p' ein solcher wäre, dass zwischen p und p' zugleich A und Nicht $-A$ stattfände. Das ist die Grundlage des Grenzbegriffes.

An einer anderen Stelle (S. 55) heisst es: Wächst q in der Weise, dass nach jeder Vermehrung eine neue stattfindet, dass aber dennoch immer etwas geringeres als Q entsteht, so hat q eine Grenze.

Um an einem Beispiele erkennen zu lassen, wie Bolyai geometrische Grenzbegriffe zu fassen wusste, führen wir eine dritte Stelle (S. 290) an: Ist ein Bogen $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ einer ebenen Kurve und eine solche in derselben Ebene befindliche von $\mathfrak{p}$ ausgehende Gerade $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ gegeben, dass von $\mathfrak{p}$ aus in der gleichen Ebene keine Gerade zwischen dem Bogen und der $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ gezogen werden kann, so sagt man, dass $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ die Kurve berühre.

Man bemerkt, dass diese Definitionen, welche leicht zu vermehren wären, sehr modern im besten Sinne dieses Wortes anmuten. Es wäre vielleicht wünschenswert, wenn einer der Herausgeber sich die für ihn leichte Mühe geben wollte, Bolyais Kraftsätze, wenn wir so sagen dürfen, aus dem Zusammenhange gerissen in kurzem Auszuge zu veröffentlichen.

Cantor.

Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois publiées sous les auspices de la société mathématique de France, avec une introduction par M. Émile Picard, membre de l'Institut. Paris 1897. Gauthier-Villars et fils X, 61 p.

Gegenwärtig ist, man kann wohl sagen überall, die Neigung vorhanden, Gesamtausgaben der Schriften hervorragender Forscher zu ver-

anstalten. Auch für die der Anzahl nach wenigen Abhandlungen von Galois hat die französische mathematische Gesellschaft eine solche Vereinigung zu einem kleinen Bändchen veranlasst, welches, wie man voraussehen darf, bald in den wenigsten Bibliotheken von Mathematikern fehlen wird. Eine Einleitung aus der Feder von Herrn Émile Picard dient ihm zur besonderen Empfehlung, wenn es einer solchen bedürfte.

CANTOR.

Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf. Ein Lebensbild und zugleich eine Würdigung seiner Leistungen von Dr. phil. J. H. GRAF, ordentlichem Professor der Mathematik an der Hochschule in Bern. Mit dem Porträt und dem Faksimile eines Briefes Steiners. Bern 1897, K. J. Wyss. 51 S.

Die uns vorliegende kleine Schrift ist keine Lobschrift im landläufigen Stile. Herr Graf hat den Spruch, dass man von Toten nur Gutes reden solle, geopfert und an dessen Stelle die Behauptung bewährt, dass Wahrheit die beste Politik sei. Wir lernen in Grafs Schilderung den wirklichen Jakob Steiner kennen, eine nicht immer liebenswürdige, nicht immer nachahmungswerte, aber stets geniale und im höchsten Grade bedeutende Persönlichkeit. Ungemein fesselnd sind die Angaben über Steiners eigenen Bildungsgang, insbesondere über die Hefte, welche er ausarbeitete, als er der Pestalozzischen Erziehungsanstalt angehörte.

CANTOR.

Bibliographie

vom 4. August bis 13. Oktober 1898.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse. Neue Folge, 1. Bd. Nr. 3. SCHUR, WILH., Ableitung relativer Örter des Mondes gegen die Sonne, aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890, Juni 16./17. und von 1891, Juni 6. Berlin, Weidmann. M. 3.

Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathem.-physikalische Klasse. 24. Bd. Nr. IV. CREDNER, HERM., Die sächsischen Erdbeben während der Jahre 1889 bis 1897. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4. 50.

Annalen, neue, der königl. Sternwarte in München. Herausgegeben von Direktor HUGO SEELIGER. III. Bd. München, Franz. M. 25.

Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-physik. Klasse. 1898. I.—IV. Leipzig, B. G. Teubner. à M. 1.

Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1897. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 53. Jahrg. 1. Abt. BÖRNSTEIN, RICH., Physik der Materie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 23.

Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung. Herausgegeben von A. WANGERIN und A. GUTZMER. 5. Bd. 2. Heft 1. Lieferung. KÖTTER, ERNST, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. Leipzig B. G. Teubner. M. 4. 40.

Jahrbuch, deutsches meteorolog., für 1896. Meteorologische Station I. Ordnung in Magdeburg. Herausgeg. von RUD. WEIDENHAGEN. Magdeburg, Faber. kart. M. 6.

Jahrbuch, nautisches, oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1901 zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Herausg. vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. kart. M. 1. 50.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausg. von EMIL LAMPE. 27. Bd. Jahrg. 1896. 1. Heft. Berlin, Reimer. M. 12.

Sitzungsberichte, Münchener, Mathematische Klasse. 1898. 2. Heft. München, Franz. M. 1. 20.

—— Wiener, Mathem.-naturw. Klasse. 1. Abt. 107. Bd. 1.—5. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 6. 50.

Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9.—11. August 1897. Herausgegeben von FERD. RUDIO. Leipzig, B. G. Teubner. M. 12.

Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Institutes u. Centralbureaus der internationalen Erdmessung. HELMERT, F. R., Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Leipzig, B. G. Teubner. M. 7. 60.

—— Dasselbe. KRÜGER, L., Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen. Ebenda. M. 8. 40.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorol. Instituts. Herausgeg. durch Direktor WILH. VON BEZOLD. 1897. 2. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1897, zugleich deutsches meteorol. Jahrbuch für 1897. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 3.

Vierteljahrsschrift d. Astronomischen Gesellschaft. 33. Jahrg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. M. 2.

Geschichte der Mathematik und Physik.

KINDLER, P. FINTAN, Die Zeitmesser bis zur Erfindung der Pendeluhr. Programm. Einsiedeln, Benziger & Co. M. 2.

ZEDNIK, JELLA v., Sophie Kowalewsky, ein weiblicher Professor (Sammlung gemeinnütziger Vorträge Nr. 237). Prag, Haerpfer. M. —. 20.

Reine Mathematik.

Breuer, Adb., Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Funktionen einer komplexen Variabeln in organischer Verbindung mit der Geometrie. Wien, Daberkow. M. 5.

Bochow, Karl, Die Formeln für die Summe der natürlichen Zahlen und ihrer ersten Potenzen, abgeleitet an Figuren. Magdeburg, Faber. M. 1.

Czuber, Eman., Vorlesungen üb. Differential- u. Integralrechnung. 2. (Schluss-) Band. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.

Fort, O., und Schlömilch, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2. Teil. Analytische Geometrie des Raumes. 6. Aufl. Von R. Heger. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.

Gamborg, V. E., Logarithmentafeln, Logarithmen und Antilogarithmen enthaltend, nebst den Logarithmen d. trigonometrischen Funktionen u. a. m. Berlin, Juncker. M. 2. 25.

Goettler, Joh., Konforme Abbildung eines von konfokalen elliptischen und hyperbolischen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf der Halbebene. Programm. Passau, Waldbauer. M. 1.

Koepp, G., Illustrierter Spezialkatalog über geometrische Modelle: Linien, Flächen, Körper und Sammlungen von denselben zur Veranschaulichung planimetrischer, stereometrischer und trigonometrischer Begriffe und Lehrsätze. Bensheim, Ehrhard & Co. M. —. 50.

Meyer, Max, Katechismus der Logarithmen. 2. Aufl. (Webers Katechismen Nr. 93.) Leipzig, Weber. M. 2. 50.

Petersen, Jul., Vorlesungen über Funktionstheorie. Kopenhagen, Höst & Sohn. M. 10.

Riedel, Ernst, Katechismus der Stereometrie, mit einem Anhange über Kegelschnitte, sowie über Maxima und Minima (Webers illustr. Katechismen Nr. 175). Leipzig, Weber. geb. M. 3. 50.

Roe jr., Edward Drake, Die Entwickelung der Sylvesterschen Determinante nach Normalformen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.

Salmon, Geo., Analytische Geometrie der Kegelschnitte, mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Wilh. Fiedler. 6. Aufl. 1. Teil. Leipzig, B. G. Teubner. M. 9.

Schlesinger, Ludwig, Handbuch d. Theorie d. linearen Differentialgleichungen. (In zwei Bänden.) 2. Bds. 2. (Schluss-) Teil. Leipzig, B. G. Teubner. M. 16.

Schur, Frdr., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Leipzig, Veit & Co. M. 6.

Sturm, Lehrbuch der Analysis (Cours d'Analyse). Übersetzt von Thdr. Gross. 2. Bd. Berlin, Fischer. M. 7. 50.

Angewandte Mathematik.

Bolte, F., Sammlung von mathem., physikal. und techn. Tafeln für den Unterricht an Schulen für Seedampfschiffs-Maschinisten. Hamburg, Eckardt & Messtorff. kart. M. 2.

Brenner, Leo, Handbuch für Amateur-Astronomen. Leipzig, Mayer. geb. M. 10.

CLASSEN, JOHS., Die Prinzipien der Mechanik bei BOLTZMANN und HERTZ. Hamburg, Gräfe & Sillem. M. 1.

FÖPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. 1. Bd. Einführung in die Mechanik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.

GRUNER, P., Astronomische Vorträge. Sechs gemeinverständliche Hochschulvorträge. Bern, Nydegger & Baumgart. M. 1. 40.

Handwörterbuch der Astronomie, 14. und 15. Lieferung. Breslau, Trewendt. à M. 3. 60.

GÜNTHER, LUDW., Keplers Traum vom Mond. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

KLEIN, F., und SOMMERFELD, A., Über die Theorie des Kreisels. II. Heft. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. Leipzig, B. G. Teubner. M. 10.

ROTH, AUGUST, Lehrbuch der astronomischen Navigation. Im Auftrage des kaiserl. und königl. Reichs-Kriegsministeriums, „Marine-Sektion“, verfasst. Wien, Gerold & Co. M. 10.

ROUTH, EDWARD JOHN, Die Dynamik der Systeme starrer Körper in zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Deutsch von ADF. SCHEPP. Mit Anmerkungen von FEL. KLEIN. 2. Bd. Die höhere Dynamik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 14.

SARTORY, FRZ., Graphische Tabellen für die statische Berechnung einfacher Hochbaukonstruktionen. Wien, Spielhagen & Schurich. M. 4.

SCHULTZ, E., Vierstellige mathem. Tabellen. 3. Aufl. Ausgabe für Baugewerkschulen. Essen, Baedeker. geb. M. 1.

—— Nebst: Anleitung zum Gebrauche der mathematischen Tabellen in den technischen Kalendern. An 25 Beispielen aus der Praxis erläutert. 3. Aufl. Ebenda. geb. M. 1. 20.

WAGNER, KARL, Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. Studie. Jena, Fischer. M. 3. 60.

WELLISCH, SIEGM., Das Alter der Welt. Auf mechanisch-astronomischer Grundlage berechnet. Wien, Hartleben. M. 2.

Physik und Meteorologie.

DREHER, EUG., und JORDAN, K. F., Untersuchungen über die Theorie des Magnetismus, den Erdmagnetismus und das Nordlicht. Berlin, Springer. M. —. 60.

KLINCKERT, WILH., Das Licht, sein Ursprung und seine Funktion als Wärme, Elektrizität, Magnetismus, Schwere und Gravitation. Leipzig, Friedrich. M. 2.

STURMHÖFEL, A., Akustik des Baumeisters oder: Der Schall im begrenzten Raume. 2. Aufl. Dresden, Kühtmann. geb. M. 4.

WALTER, ALOIS, Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 80.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1897.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. Dezember.

A.

Abbildung.

445. Représentation géométrique de la fonction arctg *z*. Maillard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 368.
446. Sur certains problèmes de représentation conforme. H. A. Schwarz. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 200.
447. Sur une généralisation du problème de la représentation conforme aux variétés à trois dimensions. Em. Cotton. Compt. Rend. CXXV, 225.
448. Biegungen und konjugierte Systeme. P. Stäckel. Mathem. Annal. IL, 255. [Vergl. Bd. XLI Nr. 273.]

Absolute Geometrie.

449. Sur la réduction des vecteurs et les propriétés métriques. J. Andrade. Compt. Rend. CXXV, 394.

Vergl. Geschichte der Mathematik 540.

Analytische Geometrie der Ebene.

450. Quartique trinodale comme lieu des points de rencontre de certaines tangentes menées à une série de coniques de deux sommets d'un triangle. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 145.
451. Quartique lieu des milieux des cordes d'un cercle ayant une projection donnée sur un diamètre fixe. A. Mannheim. N. ann. math Sér. 3, XVI, 187. — M. d'Ocagne ibid. 237.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

452. Neue Eigenschaften des Strahlenkomplexes zweiten Grades. Th. Reye. Mathem. Annal. IL, 585.
453. Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques. E. Duporcq. Compt. Rend. CXXV, 762.
454. Déplacement d'un tétraèdre trirectangle au sommet. Richard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 476.
455. Quelques théorèmes de géométrie. G. Gallucci. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 13.
456. Sur deux sphères de même rayon tangentes entre elles et touchant chacune un de deux plans donnés. A. Thévenet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 94.
457. Sur la droite de rencontre des plans polaires d'un même point par rapport à un ellipsoide et une sphère concentrique. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 31.
458. Théorèmes de Pascal et de Brianchon. F. Farjon. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 78. — F. Schur ibid. 238.

Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

459. Sur les cas du problème des trois corps (et des *n* corps) où deux des corps se choquent au bout d'un temps fini. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXV, 1078.

460. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice. H. Poincaré. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 203.
461. Détermination des coordonnées absolues des étoiles, ainsi que de la latitude, à l'aide des instruments méridiens. Méthode générale pour la solution de ces divers problèmes. Loewy. Compt. Rend. CXXV, 1062.
462. Méthode spéciale pour la détermination absolue des déclinaisons et de la latitude. Loewy. Compt. Rend. CXXV, 1142.

B.

Bestimmte Integrale.

463. Extension du théorème de Cauchy. L. Ravut. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 365.
464. Sur l'approximation des fonctions de grands nombres. M. Hamy. Compt. Rend. CXXV, 926.
465. Nouvelle démonstration du théorème de Stokes. R. Blondlot. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 501.
466. Sur l'intégrale $\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2} dz$ prise le long du contour formé de 2 demi-circonférences de rayons R et r, ayant l'origine pour centre commun et reliées par des portions de l'axe. V. Jamet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 8.
467. Exercises de licence. Bourlet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 236.
468. Sur les intégrales doubles de seconde aspèce dans la théorie des surfaces algébriques. Em. Picard. Compt. Rend. CXXV, 909.
Vergl. Astronomie 460.

C.

Combinatorik.

469. Über Tripelsysteme. L. Heffter. Mathem. Annal. IL, 101.
470. Théorie des régions. E. Cahen. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 533.

Cubatur.

471. Formule pour le volume d'un tétraèdre. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 381.

Cylinderfunktionen.

472. Beweis einer Formel des Herrn Sonine. E. Gubler. Mathem. Annal. IL, 583.
473. Sur les fonctions Besséliennes $O^n(x)$ et $S^n(x)$. L. Crelier. Compt. Rend. CXXV, 421, 860.

D.

Determinanten.

474. Valeur d'un certain déterminant. V. Retali. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 191.
475. Sur un déterminant remarquable. C. Bourlet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 369.
476. Sur un certain Jacobien. Autonne. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 376.

Differentialgleichungen.

477. Zur Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Alf. Guldberg. Crelle CXVIII, 158.
478. Mémoire sur les équations différentielles. Duport. Journ. Mathém, Sér. 5, III, 17.
479. Neuer Beweis der Existenz eines Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung. M. Hamburger. Crelle CXVIII, 351. — L. Fuchs ebenda 354.
480. Zur Gruppentheorie der homogenen linearen Differentialgleichungen. Em. Beke. Mathem. Annal. IL, 573.
481. Sur les équations différentielles linéaires appartenant à une même classe de Riemann. F. Marotte. Compt. Rend. CXXV, 84.
482. Sur l'existence des intégrales dans certains systèmes différentiels. Riquier. Compt. Rend. CXXV, 933.
483. Sur l'application de la méthode des fonctions majorantes à certains systèmes différentiels. Riquier. Compt. Rend. CXXV, 1018.
484. Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles. N. Saltykow. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 429.

485. Sur une double généralisation des équations de Lie. E. Vessiot. Compt. Rend. CXXV, 1019.
486. Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle. J. Horn. Crelle CXVIII, 257.
487. Sur la méthode des approximations successives de M. Picard. S. Zaremba. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 311.
488. Einige Sätze über die asymptotische Darstellung von Integralen linearer Differentialgleichungen. Ad. Kneser. Mathem. Annal. IL, 383.
489. Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speziellen linearen Differentialgleichung. J. Horn. Mathem. Annal. IL, 453.
490. Über die Integration der Hamiltonschen Differentialgleichung mittels Separation der Variabeln. P. Stäckel. Mathem. Annal. IL, 145.
491. Grundzüge einer Integrationstheorie der Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen und beliebig vielen abhängigen Veränderlichen. E. v. Weber. Crelle CXVIII, 123.
492. Theorie der Involutionssysteme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen abhängigen und unabhängigen Veränderlichen. E. v. Weber. Mathem. Annal. IL, 543.
493. Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par certaines conditions initiales. E. Goursat. Compt. Rend. CXXV, 640.
494. Sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues. J. Beudon. Compt. Rend. CXXV, 156.
495. Etude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues. N. Saltykow. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 423.
496. Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. N. J. Sonin. Mathem. Annal. IL, 417.
497. Sur une forme analytique des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. J. Le Roux. Compt. Rend. CXXV, 1015.

Vergl. Mechanik. Variationsrechnung. Wärmelehre.

Differentialquotient.

498. Sur des congruences différentielles linéaires. Alf. Guldberg. Compt. Rend. CXXV, 489.

Dreiecksgeometrie.

499. Sur 4 droites se coupant au centre du cercle circonscrit à un triangle donné. F. Farjon. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 190. — E. Duporcq ibid. 191.

Vergl. Ellipse 503.

E.

Elektrizität.

500. Über das Gleichungssystem einer Kirchhoffschen galvanischen Stromverzweigung. W. Ahrens. Mathem. Annal. IL, 311.
501. Le problème de la distribution de l'electricité et le problème de C. Neumann. W. Stekloff. Compt. Rend. CXXV, 1026.

Ellipse.

502. Sur la déviation de l'ellipse. A. Mannheim. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 249.
503. Ellipse lieu du centre du cercle des neuf points des triangles dont deux côtés sont fixes et le troisième de longueur constante. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 90.
504. Produit constant des aires d'un triangle et d'un rectangle se rapportant à une ellipse. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 145.

Elliptische Transcendenten.

505. Le théorème d'addition de la fonction $p(u)$. P. Stäckel. N. ann. math Sér. 3, XVI, 75. [Vergl. Bd. XLII Nr. 521.]

506. Sur les périodes des intégrales doubles. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXV, 995.
507. Sur les périodes des intégrales doubles de fonctions algébriques. Em. Picard. Compt. Rend. CXXV, 1068.
Vergl. Astronomie 460. Geschichte der Mathematik 541. Thetafunktionen.

F.

Formen.

508. Zur Theorie der linearen Substitutionen. Alf. Loewy. Mathem. Annal. IL, 448. [Vergl. Bd. XLII Nr. 529.]
509. Sur la réduction des formes quadratiques binaires. A. Hurwitz. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 491.
510. Le résultant de trois formes ternaires quadratiques. P. Gordan Journ. Mathém. Sér. 5, III, 195.

Funktionen.

511. Beiträge zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen. T. Brodén. Crelle CXVIII, 1.
512. Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles. R. Baire. Compt. Rend. CXXV, 691.
513. Sur la théorie des fonctions entières. E. Schou. Compt. Rend. CXXV, 763.
514. Über den Zusammenhang zwischen der Dedekind-Weberschen Normalbasis und dem Henselschen absoluten Fundamentalsystem. Ludw. Baur. Mathem. Annal. IL, 73.
515. Sur le calcul fonctionnel distributif. S. Pincherle. Mathem. Annal. IL, 325.
516. Sur la convergence des substitutions uniformes. E. M. Lémeray. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 306.
517. Propriétés fondamentales des fonctions circulaires définies sous forme d'un produit. A. Pagès. N. ann math. Sér. 3, XVI, 341.
518. Sur une formule de la théorie générale des fonctions de plusieurs variables et de l'intégration des différentielles totales. E. Jaggi. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 297.
519. Sur un nouvel algorithme. Lémeray. Compt. Rend. CXXV, 524.
Vergl. Abbildung. Bestimmte Integrale. Cylinderfunktionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Gleichungen. Kettenbrüche. Mannigfaltigkeiten. Potential. Reihen. Substitutionen. Thetafunktionen. Transformationsgruppen. Unbestimmte Formen. Zahlentheorie.

G.

Geometrie (descriptive).

520. Sur le biais passé gauche. A. Boulanger. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 171.

Geometrie (höhere).

521. Die Plückerschen Zahlen der Abweichungskurven. W. Bouwman. Mathem. Annal. IL, 24.
522. Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective. H. G. Zeuthen. Compt. Rend. CXXV, 638, 858.
523. Über einige Anwendungen des Korrespondenzprinzips. K. Th. Vahlen. Crelle CXVIII, 251.
524. Sur la correspondance biforme; extension des polygones de Poncelet. G. Fontené. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 437.
525. Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes. G. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 293. [Vergl. Bd. XLII Nr. 568.]
526. Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. C. Guichard Compt. Rend. CXXV, 519.
527. Sur les réseaux et les congruences. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 564
528. Sur la déformation des quadriques. C. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 596.
529. Sur le problème de M. Bonnet. C. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 643.
530. Sur le problème de Ribaucour. C. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 1013.

531. Sur les focales planes d'une courbe plane à un ou plusieurs axes de symétrie. P. H. Schoute. Compt. Rend. CXXV, 931.
532. Sur le déplacement d'un triangle variable semblable à un triangle donné. M d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 474.
533. Sur les déplacements d'une figure invariable. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 319.
534. Sur l'hypocycloïde de Steiner. P. Serret. Compt. Rend. CXXV, 404, 423, 445, 459.
535. Sur une courbe du 4. degré engendrée au moyen de deux circonférences. F. Sartiaux. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 232.
536. Lieu des points de deux courbes appartenant à deux faisceaux, l'un d'ordre m, l'autre d'ordre n, où les courbes se coupent sous un angle constant. G. Leinekugel. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 385.
537. Sur l'application de deux covariants à la construction de quelques espèces de courbes. S. Mangeot. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 677.
538. Démonstration géométrique d'une propriété de la cycloide. A. Vicaire. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 430.

Vergl. Absolute Geometrie. Kinematik. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen.

Geschichte der Mathematik.

539. Études anatomiques de Leonard da Vinci. H. de Lacaze-Duthiers. Compt. Rend. CXXV, 922.
540. Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie. P. Stäckel und Fr. Engel. Math. Annal. IL, 149.
541. Les recherches de Gauss dans la théorie des fonctions elliptiques. P. Günther. Journ. Mathem. Sér. 5, III, 95.
542. Note sur Francesco Brioschi (22. XII. 1824 — 13. XII. 1897). Hermite. Compt. Rend. CXXV, 1139.
543. Le gnomon de l'observatoire et les anciennes toises; restitution de la toise de Picard. C. Wolf. Compt. Rend. CXXV, 199.

Vergl. Differentialgleichungen 479. Optik 613.

Gleichungen.

544. Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica $f(xyz) = 0$ con funzioni di due parametri. Fed. Enriques. Mathem. Annal. IL, 1.
545. Théorèmes sur les équations algébriques. Sondat. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 169.
546 Sur les conditions qui expriment qu'une équation algébrique de degrée m n'a que p racines distinctes ($p < m$). X. Antomari. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 63.
547. Sur une équation réciproque de degré 2 m n'ayant pas de racine commune avec $x^4 - 1 = 0$. E. Taratte. N. ann math. Sér. 3, XVI, 482.
548. Sur les racines imaginaires de l'équation $x = a^x$. E. M. Lémeray. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 54.
549. Sur le quotient et le reste émanants de la division du carré de la dérivée d'un polynome du quatrième degré à quatre racines distinctes par ce polynome même. R. Gilbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 101.
550. Racines de quelques équations transcendantes. Intégration d'une équation aux différences mêlées. E. M. Lémeray. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 540.
551. Sur l'équation aux périodes. X. Stouff. Compt. Rend. CXXV, 859.

H.

Hydrodynamik.

552. Distribution des vitesses à travers les grandes sections, dans les écoulements graduellement variés, et équation du mouvement aux degrés d'approximation supérieurs. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXV, 6.
553. Théorie approchée du passage d'un régime graduellement varié à une régime rapidement varié ou vice versa. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXV, 69.

554. Établissement du régime uniforme dans un tuyau à section circulaire. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXV, 203.
555. Établissement du régime uniforme dans un tuyau à section rectangulaire large. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXV, 440.
556. Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. P. Duhem. Journ. Mathem. Sér. 5, III, 151.
557. Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible. P. Duhem. Journ. Mathem. Sér. 5, III, 389.
558. Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons. P. Appell. Journ. Mathem. Sér. 5, III, 5.

Hyperbel.

559. Sur les secteurs d'aire constante détachés dans une série d'hyberboles equilatères homothétiques par un rayon partant de leur centre commun. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 49.

K.

Kegelschnitte.

560. A construction by the ruler of a point covariant with five given points. F. Morley. Mathem. Annal. IL, 596.
561. Sur les coniques qui ont avec une courbe donnée en un de ses points un contact d'ordre supérieur. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 252.
562. Lieu des extrémités du rayon de courbure d'une epicycloïde qu'on déroule sur la tangente au sommet. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 48.
563. Droite passant par le centre de courbure d'un point d'une conique. V. Retali. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 382.
564. Sur deux triangles homologiques inscrit dans la même conique. R. Gilbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 189
565. Sur 3 triangles homologiques deux à deux et sur 3 coniques tangentes à leurs côtés. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 185.
566. Trouver le lieu du foyer mobile d'une conique d'excentricité donnée dont l'autre foyer est fixe et dont la directrice correspondant à ce foyer enveloppe une courbe donnée. G. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 336.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 458. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

567. Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire. Husquin de Rhéville. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 61. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 616.]

Kinematik.

568. Théorèmes de cinématique tirés de la géométrie cinématique de Mr. Mannheim. Canon. N. ann. math Sér. 3, XVI, 147.
569. Sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques. R. Bricard. Compt. Rend. CXXV, 1024. [Vergl. Bd. XLII Nr. 617.]
570. Sur la théorie de l'octaèdre articulé. R. Bricard. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 113. — A. Mannheim ibid. 149.
571. Le lieu des pôles des spirales logarithmiques osculatrices aux diverses sections ayant même tangente en un point d'une surface est un cercle. A. Mannheim. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 383.

Kreis.

572. Quadrature approximative du cercle. H. Guillot. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 237. — Wlad. Habbé ibid. 329.
573. Sur les quadrilatères inscriptibles et non inscriptibles. E. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 51.
574. Rayon d'une circonférence passant par 3 points donnés en coordonnées trilinéaires. H. Lez. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 143.

575. Circonférences passant par 6 points donnés. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 193. — E. Lemoine ibid. 238.
Vergl. Dreiecksgeometrie. Transformationsgruppen 635.

M.

Magnetismus.

576. A theory of magnetic action upon light. A. B. Basset. Mathem. Annal. IL, 247.

Mannigfaltigkeiten.

577. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. G. Cantor. Mathem. Annal. IL, 207.

Mathematischer Unterricht.

578. Sur l'arithmétisation des mathématiques. F. Klein. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 114.
579. Le nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique. Laisant et Antomari. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 40.
580. Les certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Laisant et Antomari. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 487.

Mechanik.

581. Über die Prinzipien der Mechanik. L. Königsberger. Crelle CXVIII, 275.
582. Sur les intégrales quadratiques de la dynamique. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXV, 156. [Vergl. Nr. 259.]
583. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen. Ad. Kneser. Crelle CXVIII, 186. [Vergl. Bd. XLII Nr. 252.]
584. Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum. A. Liapounoff. Journ Mathém. Sér. 5, III, 80.
585. Sur les positions d'équilibre instable. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXV, 1021.
586. Sur l'équilibre indifférent d'une chaine pesante sur une courbe. Karagiannidès. N ann. math. Sér. 3, XVI, 374.
587. Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique. Hadamard. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 331.
588. Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. N. Saltykow. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 245.
589. Sur la stabilité d'une toupie qui dort. F. Klein. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 323.
590. Sur le tracé de l'anse de panier. A. Mannheim. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 404. [Vergl. Bd. XLII, Nr. 266.]
591. Sur le tracé pratique des engrenages. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXV, 162.
592. Sur l'équilibre de la vis. C. Bourlet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 426.
593. Sur le joint de Cardan. Th. Caronnet. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 472.
Vergl. Astronomie. Elektrizität. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

594. Theorie der linearen Strahlenkomplexe im Raume von r Dimensionen. S. Kantor Crelle CXVIII, 74.
595. Über den Zusammenhang der Krümmungstheorie der Kurven mit der Mechanik starrer Systeme des n-dimensionalen Raumes. G. Landsberg. Crelle CXVIII, 123.
596. Sur les réseaux O associés. C. Guichard. Compt. Rend. CXXV, 929.
597. Sur les systèmes complètement orthogonaux dans l'espace à n dimensions et sur la réduction des sytèmes différentiels les plus généraux. J. Drach. Compt Rend. CXXV, 598.
598. Sur les systèmes complètement orthogonaux dans un espace quelquonque G. Ricci. Compt. Rend. CXXV, 810.

O.

Oberflächen.

599. Rapport sur un mémoire de M. Hadamard intitulé „Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées“. H. Poincaré. Compt. Rend. CXXV, 589.
600. Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface d'ordre quelconque soit de revolution. S. Mangeot. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 408.
601. Sur un réseau conjugué particulier de certaines surfaces dérivées des surfaces du second ordre. S. Mangeot. Compt. Rend. CXXV, 1083.
602. Sur les surfaces algébriques qui admettent comme ligne asymptotique une cubique gauche. Ch. Bioche. Compt. Rend. CXXV, 15.
603. Sur les surfaces qui ont pour génératrices les cordes d'une cubique gauche. Ch. Bioche. N. ann. math Sér. 3, XVI, 168.
604. Quelques propriétés des surfaces moulures. Gem. Pirondini. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 405.
605. Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. Gem. Pirondini. Crelle CXVIII, 61.
606. Sur les surfaces isothermiques. A. Pellet. Compt. Rend. CXXV, 291.
607. Sur les surfaces de Weingarten. A. Pellet. Compt. Rend. CXXV, 601.
608. Sur les surfaces applicables sur une surface de révolution. A. Pellet. Compt. Rend. CXXV, 1159.
609. Sur les surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle. Eug. Cosserat. Compt Rend. CXXV, 159.
610. Sur la symétrie dans les surfaces algébriques. Dumont. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 463.
611. Sur les lignes géodésiques de certaines surfaces. Em. Waelsch. Compt. Rend. CXXV, 521.

Vergl. Abbildung. Analytische Geometrie des Raumes 453. Bestimmte Integrale 468. Geometrie (descriptive). Geometrie (höhere).

Oberflächen zweiter Ordnung.

612. Quadriques tangentes à tous les plans tangents communs à une sphère et un ellipsoïde donné. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 524.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 457.

Optik.

613. Identité de la strophoide avec la focale à noeud; son application à l'optique géometrique. G. Loria. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 262.
614. Étude générale des lentilles épaisses au moyen de l'homographie. And. Vicaire. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 5.

P.

Parabel.

615. Parabole lieu du centre du cercle circonscrit à un certain triangle. H. Brocard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 334.
616. Enveloppe des axes des paraboles ayant en un même point d'une courbe plane donnée un contact du second ordre avec elle. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 384.
617. Produit des rayons de courbure aux pieds des normales abaissées d'un point à une parabole. A. Droz-Farny. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 235.

Planimetrie.

618. Propriété du triangle. H. Lez. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 98.

Vergl. Dreiecksgeometrie.

Potential.

619. Sur le potentiel de la double couche. Liapounoff. Compt. Rend. CXXV, 694.
620. Sur certaines questions se rattachant au problème de Dirichlet. A. Liapounoff. Compt. Rend. CXXV, 808.
621. Sur la transmission d'énergie à distance. Application à la polarisation rotatoire. A. Broca. Compt. Rend. CXXV, 765.

R.

Reihen.

622. Sur les séries de Taylor. Eug. Fabry. Compt. Rend. CXXV, 1086. [Vergl. Nr. 352.]
623. Développement en séries trigonométriques des polynomes de M. Léauté. P. Appell. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 265.

Vergl. Astronomie 460. Thetafunktionen 631.

S.

Substitutionen.

624. Über die Zahl der verschiedenen Werte, die eine Funktion gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann. Alf. Bochert. Mathem. Annal. IL, 113. [Vergl. Bd. XXXVIII Nr. 245.]
625. Über die Klasse der transitiven Substitutionengruppen. Alf. Bochert. Mathem. Annal. IL, 133. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 246.]
626. Sur une série de groupes primitifs holoédriquement isomorphes à des groupes plusieurs fois transitifs. Ed. Maillet. Journ. Mathém. Sér. 5, III, 277.
627. Applications de la théorie des substitutions linéaires à l'étude des groupes. H. Laurent. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 149. [Vergl. Bd. XLII Nr. 702.]
628. Étude sur les substitutions du second degré. H. Laurent. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 389.
629. Über die Einfachheit der alternierenden Gruppe. Em. Beke. Mathem. Annal. IL, 581.
630. Anwendungen des Zusammenhanges in Reihen auf die Theorie der Substitutionengruppen. P. Hoyer. Mathem. Annal. IL, 39.

Vergl. Formen 508.

T.

Thetafunktionen.

631. Über die Konvergenz der Thetareihen. A. Krazer. Mathem. Annal. IL, 400.
632. Systèmes orthogonaux pour les dérivées des fonctions thêta de deux arguments. E. Jahnke. Compt. Rend. CXXV, 486.
633. Über einen Zusammenhang zwischen den Elementen orthogonaler Neuner- und Sechzehnersysteme. E. Jahnke. Crelle CXVIII, 224.

Transformationsgruppen.

634. Sur la théorie des groupes infinis de transformation et l'intégration des équations aux dérivées partielles. J. Beudon. Compt. Rend. CXXV, 811.
635. Das Apollonische Problem. E. Study. Mathem. Annal. IL, 497.

U.

Unbestimmte Formen.

636. Trouver les limites de la fraction $\frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{ix} - b^{ix}}$ pour $x = 0$, pour $x = \infty$, pour $a = b$. G. Tzitzeica. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 339.
637. Sur les symboles $\frac{0}{0}$ à plusieurs variables indépendantes. L. Autonne. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 420.

V.

Variationsrechnung.

638. Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Arth. Hirsch. Mathem. Annal. IL, 49.

W.

Wärmelehre.

639. Sur l'intégration des équations de la chaleur. Le Roy. Compt. Rend. CXXV, 756.
640. Rapport sur un mémoire de M. Le Roy intitulé „Sur l'intégration des équations de la chaleur". H. Poincaré. Compt. Rend. CXXV, 847.
641. Compressibilité des gaz à diverses températures et au voisinage de la pression atmosphérique. A. Leduc. Compt. Rend. CXXV, 646.
642. De la variation de l'énergie dans les transformations isothermes. De l'énergie électrique. H. Pellat. Compt. Rend. CXXV, 699.

Z.

Zahlentheorie.

643. Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. II. Abhdlg. H. Weber. Mathem. Annal. IL, 83. [Vergl. Bd. XLII Nr. 721.]
644. Über die Fundamentalteiler eines Gattungsbereiches in Bezug auf zwei verschiedene Rationalitätsbereiche. K. Hensel. Crelle CXVIII, 173.
645. Über die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reduzierte Form. K. Hensel. Crelle CXVIII, 234.
646. Eine arithmetische Formel. Eug. Netto. Mathem. Annal. IL, 148.
647. Sur le caractère quadratique du nombre 3 par rapport à un nombre premier quelconque. R. Bricard. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 546.
648. Si p est un nombre premier qui ne divise pas x et r un nombre entier quelconque, l'expression $x^{p^r - p^{r-1}} - 1$ est divisible par p. Émine. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 192.
649. Si m et n sont deux nombres premiers $m^{n-1} + n^{m-1} - 1$ est divisible par mn. G. Tzitzeica. N. ann. math. Sér. 3, XVI, 192.

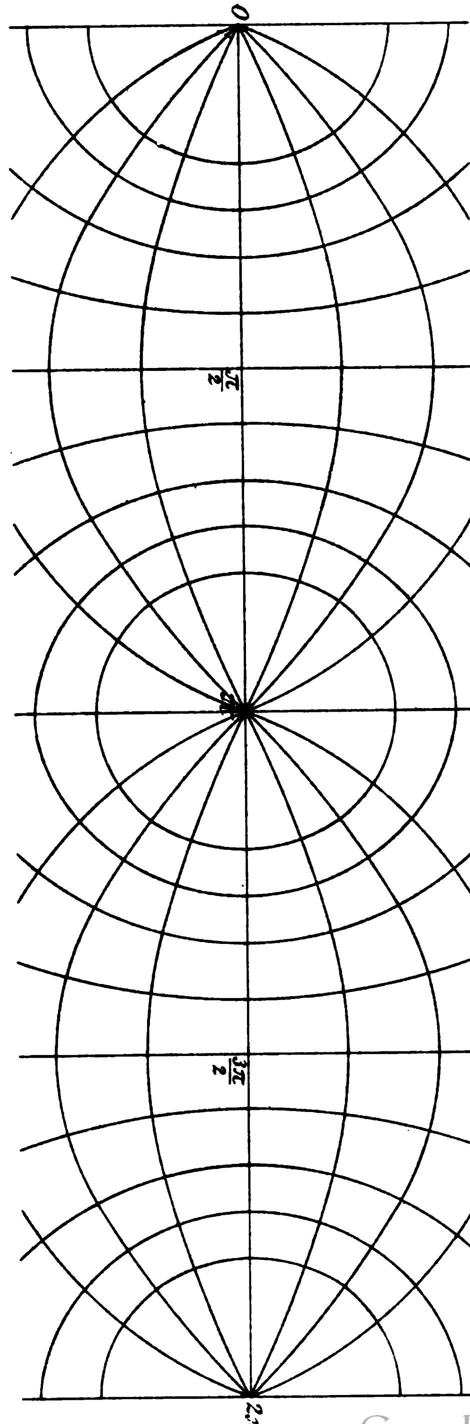


Fig. 1.

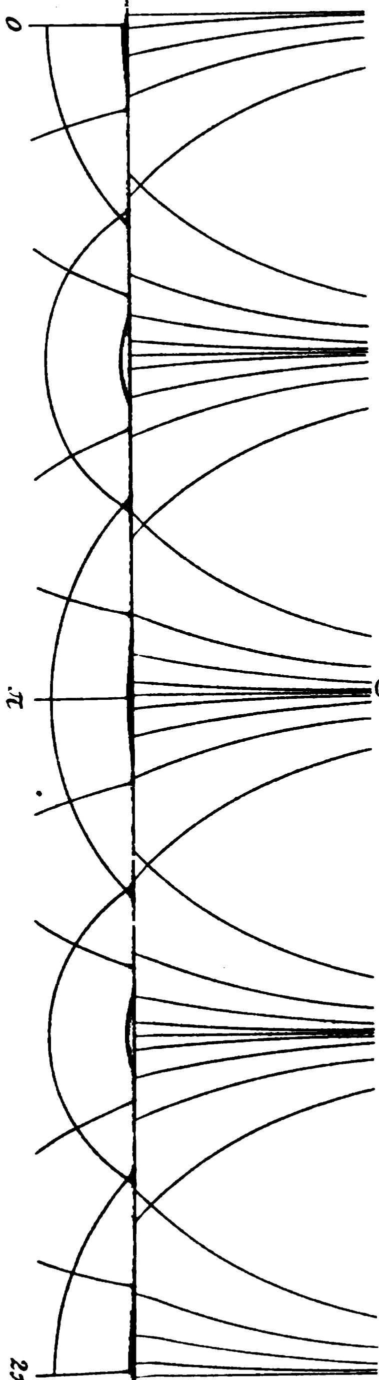


Fig. 2.

Zum Aufs

Zischrift:

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. R. Mehmke und **Dr. M. Cantor.**

42

Supplement zum zweiundvierzigsten Jahrgang.

Der Supplemente dreizehntes.

Zugleich der

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik

achtes Heft.

Mit 3 Tafeln und 45 Figuren im Text.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1898.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Achtes Heft.

Mit 3 Tafeln und 45 Figuren im Text.

Inhalt:

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1898.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Achtes Heft.

Zugleich Supplement zum zweiundvierzigsten Jahrgang

der

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. R. Mehmke und **Dr. M. Cantor.**

Der Supplemente dreizehntes.

Mit 3 Tafeln und 45 Figuren im Text.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1898.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Fiorini, Matteo, Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearbeitet von Siegmund Günther. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 138 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 4.—

Im Verlage der italienischen Geographischen Gesellschaft zu Rom erschien unlängst eine sehr interessante Schrift von Professor M. Fiorini (Bologna) unter dem Titel „Le sfere cosmografiche e specialmente le sfere terrestri.“ Wer da weiſs, wie viele wertvolle Beiträge Herr Fiorini zur Geschichte der Kartographie geliefert — wie denn auch sein groſses Lehrbuch der Kartenprojektionslehre eines der wertvollsten unter den vorhandenen Werken dieser Art ist —, der muſste von vornherein schon dieser neuen Monographie der Globen mit Spannung entgegensehen, und die Erwartung wird bei Durchsicht des kleinen Buches nicht getäuscht. Der Autor führt uns mit der ihn auszeichnenden Sachkunde und Belesenheit ein in die Entwickelungsgeschichte der Globenkunde und verweilt mit besonderer Vorliebe bei den Hilfsmitteln, deren man sich zu verschiedenen Zeiten bediente, um das „Netz“ des Globus, d. h. die Zeichnungen herzustellen, welche dann über die gekrümmte Fläche der Kugel gelegt wurden. Unsere deutsche Litteratur besitzt einen Überfluſs an Anweisungen zum Gebrauche der künstlichen Erd- und Himmelskugel, aber eine geschichtlich-theoretische Schrift der bezeichneten Art hat bisher gefehlt, und aus diesem Grunde erbat sich Prof. Günther von dem Verfasser die Genehmigung zu einer Bearbeitung der „Sfere cosmografiche“ in deutscher Sprache.

Näheres siehe Teubners Mitteilungen 1895 Nr. 3, S. 77.

Galilei, Galileo, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauss, ordentl. Lehrer an der Realschule „Philanthropin“ in Frankfurt a. M. [LXXXIV u. 586 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M.* 16.—

Merkwürdigerweise gab es bisher keine deutsche Übersetzung von diesem berühmten Buche des Vaters der modernen Physik, von einem Buche, das ebenso hervorragend ist durch die Bedeutsamkeit seines Inhalts, wie durch die Schönheit seiner Form, das seinem Verfasser so viel Ruhm und so schwere Leiden eintrug. Und doch verdient dasselbe als Quelle der vielen landläufigen Argumente für das Kopernikanische System, als farbenprächtiges Gemälde des Ringens mittelalterlicher mit neuzeitlicher Weltanschauung, als Ausgangspunkt für eine Menge physikalischer Untersuchungen der Folgezeit die höchste Beachtung. Die Darstellung ist so klar, daſs die meisten Partieen einem Primaner völlig verständlich sind und für ihn eine belehrende und anregende Lektüre bilden würden, wie andererseits der Kulturhistoriker in keiner Geschichte der Philosophie eine anschaulichere Schilderung vom Stande der damaligen Naturphilosophie finden kann. — Eine Einleitung, welche u. a. eine biographische Skizze Galileis enthält, und eingehende historische und sachliche Anmerkungen werden das Verständnis und die Würdigung des Werkes erleichtern und mancherlei irrige Ansichten des Verfassers berichtigen; auch Irrtümer, wenn als solche erkannt, und namentlich Irrtümer eines Mannes wie Galilei, sind belehrend und verschaffen Einblick in die Geschichte der Wissenschaft.

Kepler's, Joh., weiland kaiserlichen Mathematikers, Traum oder nachgelassenes Werk über die Astronomie des Mondes. Übersetzt und kommentiert von Ludwig Günther. gr. 8. geh. [Unter der Presse.]

Dies Buch ist wohl die merkwürdigste Schrift aus der Reformationszeit der Sternkunde: gleich merkwürdig wegen ihres Inhaltes wie wegen ihres Geschickes. Es enthält in kurzen Umrissen, durch eingehende Noten erläutert, diejenigen astronomischen Erscheinungen, welche ein Beobachter auf dem Monde haben würde. Kepler giebt uns darin eine methodische Untersuchung aller die wechselseitigen Beziehungen zwischen Erde und Mond betreffenden Fragen; er streift dabei fast alle Gebiete des Wissens und bietet uns eine naturgemäſse Entwicklung derjenigen Betrachtungen, die er in seinen früheren Werken zerstreut und nur gelegentlich ausgeführt hat. Wir dürfen also den „Traum“ nicht allein als eine auf Kopernikanischen Prinzipien begründete Mondastronomie, sondern auch als ein Kompendium der Keplerschen Werke überhaupt ansehen.

Sein Vorhaben, einen gröſseren Leserkreis mit den groſsen Gedanken Keplers bekannt zu machen, auszuführen, ermunterten den Verfasser namhafte Kapazitäten auf dem Gebiete der Astronomie und der Erdkunde, deren Sympathie und Unterstützung er sich zu erfreuen hatte.

Das Werk ist mit mehreren Textfiguren, die der näheren Begründung der geschilderten astronomischen Vorgänge dienen, einer Tafel mit der Darstellung der selenographischen Einteilung der Mondoberfläche nach Kepler und einem wenig bekannten Porträt Keplers, welches der Verfasser glaubt für das wahre Bildnis des groſsen Astronomen halten zu können, geziert. Ein angefügtes Namen- und Sachregister, welches das Buch auch als Nachschlagewerk geeignet macht, beschlieſst das Ganze. So ist zu hoffen, daſs das Werk sowohl in Fachkreisen, die manches namentlich geschichtlich Neue und Bemerkenswerte darin finden dürften, als auch unter der Zahl der Naturfreunde und gebildeten Leser eine wohlwollende Beachtung und weitere Verbreitung finden wird.

UEBER EINE

ALGORISMUS-SCHRIFT DES XII. JAHRHUNDERTS.

VON

MAXIMILIAN CURTZE
IN THORN.

In Band 34 der *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Hist. litt. Abth. S. 129—146, 161—170 hat Dr. ALFRED NAGL in Wien an das von ihm an genannter Stelle veröffentlichte Fragment einer Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts höchst interessante allgemeinere Betrachtungen geknüpft. Da ich in der Lage bin, den vollständigen Tractat, dessen Bruchstück Herr Dr. NAGL veröffentlichte, vor mir zu haben, so will ich mir erlauben, im Folgenden über denselben zu berichten und am Schlusse einen Abdruck desselben zu bewirken, welcher die Wichtigkeit desselben augenfällig hervortreten lassen wird. Von diesem Tractate kenne ich zwei vollständige Exemplare. Das erste befindet sich auf Blatt 27—29 des *Clm 13021*, welcher dem XII. Jahrhundert angehört und mit dem veröffentlichten Fragmente die Form ⊢ für 3 gemein hat, welche, wie Herr NAGL hervorhebt,[1]) nur im XII. Jahrhundert gefunden wird; das zweite, dem XIII. Jahrhundert angehörend, auf Blatt 31—33 des *Clm 18927 (Teg. 927)*.[2]) Meine nachfolgenden Bemerkungen beziehen sich auf das erste Manuscript, welches mir durch die Liberalität der Direktion der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München für längere Zeit überlassen wurde, wofür ich hier meinen aufrichtigsten Dank zu sagen nicht unterlassen kann. Der *Clm 13021 (Rat. civ. 21)* ist auf Pergament in gross Folio seinem grössten Theile nach zweispaltig geschrieben und besteht aus drei deutlich unterscheidbaren Theilen. Der erste und älteste enthält auch die Abhandlung, von der wir einen Theil zum Abdruck bringen wollen. Dieser Theil umfasst die Blätter 1—96, 165 (164)—212 (211). Er ist zweispaltig mit 41 Zeilen auf der Seite geschrieben. Die einzelnen Blätterlagen (1—5, 7—11, 14—19 Quaternionen, 6 Duernio, 12 und 13 Ternionen) sind in der Mitte des untern Randes der Rückseite je des letzten Blattes mit den Zahlen 1—19 bezeichnet, doch ist bei 11 und 12 diese Bezeichnung vom Buchbinder weggeschnitten. Er ist unzweifelhaft aus dem XII. Jahrhundert, nach dem sachverständigen Urtheile des Herrn Direktor SCHWENKE von der königl. und Universitätsbibliothek zu Königsberg i./Pr. eher aus dem Anfange als

1) *A. a. O.*, S. 134.

2) M. s. *Catalogus Codicum latinorum Bibliothecae Regiae Monacensis. Tomi II. Pars III.* Monachii 1878, S. 221.

aus dem Ende desselben. Er beginnt mit *folio verso.* Der zweite Theil, in durchlaufenden Zeilen und erst gegen den Schluss hin zweispaltig geschrieben, umfasst Blatt 97—164, welches letztere Blatt aber leer ist, und wohl deshalb von demjenigen, welcher in neuerer Zeit die Foliirung ausführte, nicht mit beziffert wurde, weshalb die späteren Blattzahlen, um den wirklichen Bestand zu ergeben, je um 1 erhöht werden müssen. Es sind 8 Quaternionen und ein Duernio. Diese sind in der linken untern Ecke der Rückseiten des je letzten Blattes mit den Zahlen 1—9 versehen gewesen. Davon sind nur noch 1, 5 und 7 erhalten, während die übrigen vom Buchbinder weggeschnitten sind. Die Schrift ist bedeutend stärker als die des ersten Theiles und gehört sicher erst dem XIII. Jahrhundert an. Sie beginnt *folio recto* und hat 40 Zeilen auf der Seite. Der dritte Theil umfasst die Blätter 213 (212)—284 (283). Es sind lauter Quaternionen ohne jeden Zahlencustoden. Er beginnt wieder *folio verso* mit 41 Zeilen auf der Seite in gespaltenen Columnen und ist nicht rubricirt. Die Schrift, der des zweiten Theiles sehr ähnlich, aber wie das *f* und das *m* und *n* zeigen, sicher von anderer Hand, könnte wohl noch aus dem Ende des XII. Jahrhunderts stammen. Diese drei Theile sind dann in ihrer jetzigen Verfassung nicht vor dem Ende des XV. Jahrhunderts gebunden worden, wie der schöne Holzband mit gepresstem Lederüberzug unzweideutig ergiebt.[3]) Aus derselben Zeit dürfte wohl auch die Notiz auf der Vorderseite des ersten Blattes datiren: „*In hoc libro continetur totum quadruuium scilicet Arismetica boecij. | Astronomia. | Musica boecij. | Geometria, euclidis.*“, welche jedoch nur die beiden ersten Teile umfasst, so dass sie auch den Bestand aus früherer Zeit festlegen könnte.[4]) Auf Blatt 213^v (211^v) findet sich die Bemerkung: „*ANno dñi M°. CC° Nonagesimo. VII° Feria secunda In Annuntiatione bte Virginis Sub Dño Vlrico Abbate huius loci XVI° Magister Wernherus Medicus, Canonicus Veteris Capelle Ratisponensis, Amicus dñi abbatis et omnium fratrum specialissimus, hunc librum ex diuersimoda concessione ante multos annos perditum, et a memoria omnium quasi funditus subtractum. sua pecunia aput quendam Aurificem qui ipsum venalem publice portabat comparuit. et ipsum pro Remedio anime sue, ad honorem sti Geori (!) patroni nostri ecclesie in Prufening restituit; sine omni ipsius dampno liberaliter et precise. Vnde statuimus, vt nullus ipsum deinceps extra septa Ecclesie audeat commodare.*“ Die Worte „*sti Geori*“ bis

3) Nach Herrn Dr. Schwenke kommen ähnliche Einbände vor dieser Zeit nicht vor. Ich selbst habe solche aus 1598 in Händen gehabt.

4) Dem Duktus der Schrift zufolge würde ich die Notiz eher in das Ende des XV. oder den Anfang des XVI. Jahrhunderts verlegen.

„*Prufening*" stehen auf Rasur und sind, wie speciell das *r* und die *e* zeigen, von einer ganz andern Hand geschrieben, als das Uebrige. Jedenfalls hat ursprünglich ein anderer Besitztitel darunter gestanden, was ich im Gegensatze zu der Behauptung HEIBERGS[5]) hier mir zu bemerken erlaube. Herr Direktor SCHWENKE theilte darin vollständig meine Ansicht. Dass diese Bemerkung sich nur auf den ersten Theil des Manuscriptes, auf dessen letztem Blatte sie sich findet, bezieht, dürfte wohl anzunehmen sein, ob auch auf den im jetzigen Bestande zwischengeschriebenen zweiten, wäre möglich, scheint mir aber nicht wahrscheinlich; den dritten Theil umfasst sie sicherlich nicht, wie aus der obigen Notiz auf Blatt 1^r zu schliessen erlaubt ist. Die ganze Handschrift ist vortrefflich geschrieben und erhalten. Sie ist eine der schönsten, welche mir in ihrer Art bis jetzt vorgelegen hat. Der Inhalt derselben ist kurz folgender.

1 Blatt 1^v—26^v. *Arithmetik des BOETHIUS* ohne Titel und ohne Unterschrift. — 2. Blatt 27^r—68^v. *Tractatus astronomicus anonymi.* Von ihm ist unser Algorismus ein Theil der Einleitung. — 3. Blatt 69^r—72^r, col. 2. *Incipit liber HEREMANNI de compositione astrolabii.* — 4. Blatt 72^r, col. 2 bis 79^v, col. 1. *Incipit liber GERBERTI de compositione et exercitio instrumenti.* Es ist der erste Theil des von PEZ als *HERMANNI CONTRACTI de utilitatibus astrolabii* veröffentlichten Werkes.[6]) — 5. Blatt 79^v, col. 1—81^r, col. 2. *Incipit liber HEREMANNI de conpositione horologiorum.* Es ist der zweite Theil in der Veröffentlichung von PEZ. Unserem Exemplare fehlen jedoch die letzten drei Capitel.[7]) — 6. Blatt 81^v, col. 1—96^r, col. 2. *Incipit liber iudiciorum MESSEHALACH.* — 7. Blatt 97^r—150^r. *Incipiunt Capitula Libri Primi Artis Musicae.* Es sind die fünf Bücher *de Musica* des BOETHIUS. — 8. Blatt 150^r letzte Zeile — 150^v, col. 1, Z. 5. *Incipit GUIDONIS versus de Musicę, explanatione suique nominis ordine. Gymnasio Musas placuit revocare solutas, Ut pateant parvis habitae vix hactenus altis. Invidiae telum perimit dilectio caecum. Dira quidem pestis tulit omnia commoda terris.*

5) *Zeitschrift für Mathematik und Physik, 35, Hist. litt. Abth.*, S. 49 Anmerkung.

6) Einer freundlichen Notiz PAUL TANNERYS entnehme ich die Thatsache, dass auch in den Pariser Manuscripten dieses Stück — sicherlich mit Unrecht — einmal GIRBERTI ein zweitesmal GILLBERTI genannt wird. Auch diese Handschriften sind aus dem XII. Jahrhundert.

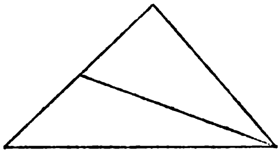
7) Derselben Notiz TANNERYS zufolge ist dieses Stück jedesmal von dem ersten Buche in der Ausgabe von PEZ *Thesaurus III.* gesondert, wie hier und in *Clm 14908.*, bezeichnet. In allen fehlen aber, wie in dem vorliegenden Exemplare, diejenigen Capitel, welche PEZ am Schlusse hat, und die mit einigen Capiteln der Geometrie GERBERTS übereinstimmen. Sie dürften daher wohl im Salzburger Codex, der sie enthält, als interpoliert anzusehen sein, und damit ein Argument gegen die Aechtheit der Geometrie GERBERTS hinfällig sich erweisen.

Ordine me scripsi, qui primo carmina finxi. — 9. Blatt 150ᵛ, col. 1, Z. 6 bis col. 2, Z. 21. *Epistola eiusdem ad* THEOBALDUM *quendam.* — 10. Blatt 150ᵛ, col. 2, Z. 22—157ᵛ, col. 2. *Explicit michrologus, id est brevis sermo,* GUIDONIS *peritissimi musici et venerabilis monachi.* — 11. Blatt 157ᵛ, col. 2, Z. 7—13. *Iteratur* GUIDONIS *prologus de camenae suae munusculis suique mentione nominis. Gliscunt corda meis hominum mollita camenis, Una mihi virtus numerosa contulit ictus. In caelis summo gratissima carmina fundo, Dans autem xp̃i munus cum voce ministri, Ordine me scripsi, primo qui carmina finxi.* — 12. Blatt 157ᵛ, col. 2—159ᵛ, col. 2. *Incipiunt item* GUIDONIS *musicae regulae in antiphonarii seu prologum prolatae.* — 13. Blatt 159ᵛ, col. 2—160ᵛ, col. 1. *Aliae regulae eiusdem.* — 14. Blatt 160ᵛ, col. 1 bis 163ʳ, col. 2. *Incipit Epistola* GUIDONIS *ad* MICHAHELEM *Monachum (de ignoto cantu).* — 15. Blatt 163ʳ, col. 2—163ᵛ, col. 2. *Fistularum mensura.* Es folgt das leere unbezeichnete Blatt. — 16. Blatt 165 (164)ʳ—187 (186)ᵛ. *Incipit (liber Primus) Geometriae* EUCLIDIS. Die berühmte Uebersetzung der Erklärungen und Lehrsätze EUKLIDS, zum Theil nach dem griechischen Originale gefertigt.[8]) — 18. Blatt 187 (186)ᵛ, Z. 26—188 (187)ʳ, Z. 70, Beweis der Sätze: *Omnium triangulorum maior angulus maiori lateri opponitur* und *Omnium triangulorum maius latus sub angulo maiore subtenditur.*[9])

8) Siehe über die Bedeutung dieses Abschnittes die in Anm. 5) erwähnte Abhandlung HEIBERGS.

9) Des grossen Interesses halber setze ich beide Beweise hierher.

„**Omnium triangulorum maior angulus maiori lateri opponitur.** *Concedit adversarius latus infimum, basim scilicet, maiorem, non autem vult, quod ei maior angulus obtendatur. Non est, inquit, ille maximus angulus in summo, immo alius, dexter scilicet super basim, illo maior est. Et quantum maior est, circa terminum abscindatur, iamque debebunt omnes anguli esse aequales, quod hoc inconuenientius. Exterior quippe angulus parcialis trianguli sursum maior est opposito summo compartiali dextro. Quod si maior partiali et compartiali. Non igitur aequales sunt anguli totalis in summo et partialis, quem adversarius per abscisionem voluerat aequum facere. Item sinister angulus minimi trianguli, quia exterior, maior est sinistro totali et eius contra iacenti partiali. Sed adversarius omnes angulos sibi post abscisionem factam posuerat aequales, igitur cum sequitur, ut maior sit exterior duobus oppositis, quorum uterque aequalis est summo totali, cum, inquam, maior est ambobus uni aequalibus et uno ipsi tertio duobus coaequali. Sed adversarius ipsius quoque parvi trianguli posuerat aequales angulos, licet laterum maius unum et aliud minus. Quod si exterior, de quo proxime diximus, maior est obposito, qui aequipollet summo, maior igitur et non aequalis est, secundum quod volebat adversarius. Quod si ipse exterior oppositum compartiale facit, oppositum autem partiali maior existit, utpote toto parte, aequalis oppositi nichilominus partiali maior existit.*

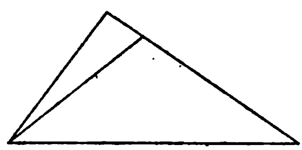


Auf dem Rande Figuren in verschiedener Weise Quadrate zu zeichnen. — 19. Blatt 188 (187)[r]. Auf dem Rande endlich nebenstehende Figur nebst Beischrift: *areę totius quadrati sunt XIIIIcies XIIII, id est C. XCVI. Unde ablatas secundum* G*ERBERTUM* *excedentias, id est XLII, diuide in* ꝝ, *et suis*

Ergo maior est summus totalis dextro partiali, quos ante adversarius posuerat aequales. Sin aliter, pars toti aequabitur, quod est inpossibile.

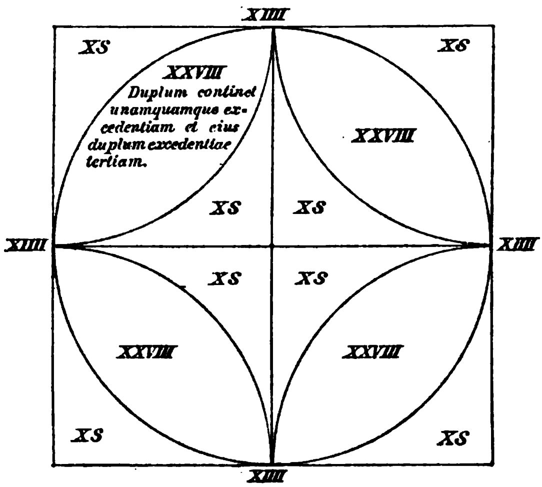
Si duae lineae aequales super eandem basim ceciderint, angulos super basim aequales faciunt, *quod supra probatum est, et etiam probatione non indiget. Erunt igitur aequales sinistrum dextro, siquidem dextrum non secetur. Si autem secetur, ita se ad illum habebit, ut partialis ad totum. Ergo maior est sinistrum dextro partiali ut iure toto parte. Si autem sinistrum dextro maior, coaequalis quoque eius minor erit; ergo non aequales, et probata est regula.*

Omnium triangulorum maius latus sub angulo maiore subtenditur. *Dicit adversarius: Immo dextrum trigoni latus maius est, non etiam basis, et tamen basi maior angulus subtenditur. Hoc enim vult probare adversarius, quod angulus maior etiam minori latere opponatur, et concedit, angulum maiorem in fronte trigoni, non etiam ei maius latus subtendi. Modo reduc adversarium ad inconveniens, et quia dicit, dextrum latus maius, abscinde de ipso, quantum maius est, per 3. theorema, eruntque iam aequalia omnia trigoni latera, dextrumque latus cum eo latere, quod totius*



est basis, super eam basim, quae in medio trahitur, aequales faciet angulos. Similiter et sinistrum latus cum basi totius super totalem dextram debebit facere aequos angulos iuxta illud theorema: **Si duo trianguli latera fuerint aequa alterum alteri, aequales super basim faciunt angulos.** *Igitur erunt aequalia latera duum trigonorum ex concessione adversarii, et aequos debent facere angulos super bases. Ergo triangulus, qui ex dextro latere et basi constituitur, facit dextrum angulum exteriorem ex XVI theoremate maiorem duobus oppositis. Quod si angulus ille maior in summo in fronte trianguli et sinistro partiali, maior nimirum est et conpartiali, et iure, qui maior est maiore, et minore iuxta conceptionem unam. Non ergo cadunt aequales anguli super basim. Similiter et aliud considera triangulum, quod constat ex sinistro totali latere et basi totali pro latere assumpta super dextram basem, anguli ibi aequales erunt, si habent aequalia latera, quod concessit adversarius. Ergo summus in fronte iam dextrum, hoc est cadens super basem dextram, aequalis erit alteri dextro. Si autem dextrum prioris anguli maior est, ut probavimus, illo, qui est aequalis suo frontali et insuper partiali illius, aequali maior est similiter et prioris partialis conpartiali. Non ergo aequales faciunt angulos secta et basis super mediam rectam, unde nec recte abscisa est, quae etsi non abscinderetur, minor tamen esset alio latere trianguli. Sed et hoc fortissimum argumentum, quod si in triangulo parvissimo latera ex concessione adversarii erunt aequalia, inferetur statim, quia angulus exterior suo opposito et partiali maior est. Oppositus autem aequalis esse probatur iam summo in fronte totius trianguli, quod si minor aequali illius et ipso. Iam igitur non erunt aequales illae lineae, latera scilicet parvissimi trianguli*“.

in locis pone.[10]) — 20. Blatt 189 (188)^r, col. 1—195 (194)^r, col. 1. *Geometria* Gerberti *Cap. 1—13,* ohne Titel und Schlussschrift.[11]) — 21. Blatt 195 (194)^r, col. 1 bis 203 (202)^r, col. 2. *Ars geometrica* Boethii, ebenfalls ohne Titel und Schlussschrift in sehr gutem Texte. — 22. Blatt 203 (202)^r, col. 2—212 (211)^r, col. 1. *Practia geometriae*, höchst interessant.[12]) — Blatt 212 (211)^v. Die oben abgedruckte Bemerkung. — 23. Blatt 213 (212)^v bis 284 (283)^v. *Chalcidius in Timaeum Platonis,* ebenfalls anonym, wohl nur, weil sie nicht rubricirt ist.



Wir gehen jetzt wieder zu der unter Nr. 2 verzeichneten grossen Arbeit über Astronomie zurück. In der Einleitung giebt der Verfasser zunächst den Grund an, weshalb er dem eigentlichen Werke in einer Vorarbeit die Principien der Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie vorausschickt, und theilt dann dieses Vorstück in fünf Bücher: 1. Ueber ganze Zahlen; 2. Ueber Minutien; 3. Ueber die (quadratische) Wurzelausziehung; 4. Ueber musikalische und geometrische Verhältnisse; 5. Ueber Zeiten und Bewegungen. Wir betrachten hiervon eingehend nur die drei ersten, werden aber einiges über das vierte und fünfte anzuschliessen uns erlauben. Was der Punkt für die Geometrie ist, das ist der *Instans* für

---

10) Hierzu vergleiche man Cap. LXIII der *Gerbertschen Geometrie* bei Olleris, *Oeuvres de* Gerbert, S. 456—457 und die dazu gehörige Figur 82. Es ist diese Stelle unseres Manuscriptes ein Zeugnis dafür, dass am Anfange des XII. Jahrhunderts auch der dritte Theil der fraglichen Geometrie Gerbert als Verfasser zugewiesen wurde.

11) Eine genaue Collation mit Olleris' Text ergab eine grosse Zahl augenscheinlich besserer Lesarten, die zum grossen Theil mit denen zusammen stimmen, welche ich aus *Clm 14908* im 7. Hefte der *„Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“* veröffentlicht habe.

12) Eine Ausgabe dieses hervorragenden, für die Entwickelungsgeschichte der praktischen Geometrie hochbedeutsamen Werkes, ist im VIII. Jahrgang (1897) der *„Monatshefte für Mathematik und Physik“* S. 193—224 veröffentlicht worden.

die Zeit. Dass so die Auffassung des Verfassers ist, geht schon aus der gewählten, Euklids Erklärung nachgebildeten Erklärung hervor, *Instans est pars temporis, cuius nulla pars est.* Es ist wohl gut, hier auf den Ausdruck bei *Bradwardin Tractatus de continuo* hinzuweisen, *Instans est atomus temporis,* welcher dasselbe mit andern Worten ausdrückt.[13]) Solche *Instantia* enthält das *Momentum* 574; 4 *Momente* bilden eine *Minute,* $2^1/_2$ *Minute* einen *Punkt*, endlich 4 *Punkte* eine *Stunde*, welche danach aus 22960 *Instantia* zusammengesetzt ist. Er geht weiter fort bis zum Jahre, welches der Zeitraum ist, in welchem die Sonne zu dem nämlichen Thierkreiszeichen zurückkehrt. Jedes Volk habe verschiedene Jahreslänge; er würde den Arabern folgen, welche nach Mondjahren rechneten. Die Aegypter hätten eine andere Zeiteintheilung eingeführt, die sexagesimale. Das wäre deshalb, weil 60 sich so vielfach theilen lasse. Je mehr Faktoren eine Zahl habe, je vielfacher lasse sie sich eben theilen, wie z. B. $2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7$. Da nun aber ohne Betrachtung der Zahl keine Wissenschaft existiren kann, so will er zunächst diese, *und zwar nach der Methode der Inder,* behandeln. Wir sehen also, dass unser Verfasser ebenso wie die übrigen Algorithmiker weiss, dass das, was er lehrt, in letzter Instanz aus Indien stammt. Bis hierher hat Verfasser sich immer der römischen Zahlzeichen bedient, nun führt er die indischen Ziffern ein, und von hier an bedient er sich nur noch dieser zur Zahlbezeichnung. Seine Ziffern sind die bekannten der damaligen Zeit. Nur für 3 kommt ausser dieser Form in überwiegender Zahl die schon von Dr. Nagl als dem XII. Jahrhundert charakteristisch gekennzeichnete Form ⊢ vor, und in den astronomischen, sehr umfangreichen Tabellen, da, wo sie allein ohne Verbindung mit andern Ziffern steht, die Null in der Form *t*, deutlich wie das im Texte benutzte *t* geschrieben. Es dürfte das die Abkürzung des Wortes *Teca* sein, wie nach dem *Algorismus vulgaris,* der dem Sacrobasco zugeschrieben wird, eine Bezeichnung der Null lautet,[14]) nach Petrus de Dacia in seinem Commentare zu diesem Algorismus eigentlich der Name des kreisrunden Brandmals, das man Dieben und Räubern auf die Stirn oder den Kinnbacken einzubrennen pflegte.[15]) Es gebe drei Arten der

---

13) M. s. meine Abhandlung „*Ueber die Handschrift R. 4°. 2 der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn*“ (Zeitschr. f. Math. und Phys. XIII. Supplement. S. 85. § 12): „*Instans est certus athomus temporis*“.

14) „*Decima vero 0 dicitur teca, vel circulus, vel cyfra, vel figura nichili, quoniam nichil significat; ipsa tamen locum tenens dat aliis significare.*“ (Johannis de Sacrobosco, *Algorismus vulgaris.* Cap. I *De Numeratione.* Hauniae 1897, S. 2, 10—12.)

15) „Decima vero etc. *Hic addit conditiones cuiusdam figurae non significativae, et primo facit hoc, secundo removet dubium, cum dicit* Ipsa tamen

Zahlen, die Einer, die Zehner, und die aus beiden gemischten. Namen für dieselben, wie *digitus*, *articulus*, *numerus compositus*, die wir in andern Algorismustractaten finden, kennt unser Verfasser nicht, auch da nicht, wo sie, wie bei der Multiplikation und Addition, ihm seine Sprachweise wesentlich abgekürzt hätten. Auch die Minuten werden mit den Ziffern geschrieben, von den altrömischen Zeichen ist keine Spur vorhanden. Wie Leonardo von Pisa beginnt unser Tractat mit der Multiplikation, und zwar in drei Paragraphen entsprechend den drei Zahlenarten. Für die *prima species*, also Einer mal Einer, wird erst das Einmaleins in dreieckiger Tabellenform gegeben, dann aber für solche Multiplikationen, welche grösser sind als 5, die complementäre Regel aufgestellt:

$$ab = 10\,[a - (10 - b)] + (10 - a)(10 - b).$$ [16]

In dieser Regel ist *differentia* als Unterschied von 10 zu fassen, während im weitern Verlaufe der Abhandlung *differentia* die Bedeutung *Stelle* hat, wie auch bei Sacrobasco u. s. w. Bei der Multiplikation der *secunda* und *tercia species* dürfte wohl am auffallendsten sein, dass auch mit der Null wirklich multiplicirt wird, was die spätern Algorithmiker, vor allen Sacrobasco, nicht mehr thun. So sind die einzelnen Phasen der Multiplikation von 40 . 300 folgende, wobei 300 der Multiplikator ist und an *erster* Stelle geschrieben wird, ganz gegen die Gewohnheit aller spätern Algorithmiker. $\begin{matrix}300\\40\end{matrix}$; $\begin{matrix}12300\\40\end{matrix}$, 12000, und es heisst deutlich, *ter nihil nihil est*, also ist an Stelle der 3 die 0 zu setzen. Das Beispiel für die Multiplikation der dritten Art ist $\begin{matrix}1024\\306\end{matrix}$. Hier sind die weitern Phasen $\begin{matrix}306024\\306\end{matrix}$, wo wegen der Null im Multiplikator der Multiplikandus 306 gleich zwei Stellen nach rechts gerückt ist, $\begin{matrix}312124\\306\end{matrix}$, endlich, nachdem auch

locum. *Dicit, quod decima figura habet quatuor nomina, quia dicitur teca, circulus, cyfra, vel figura nichili, quia nichil significat. ... Quare autem aliis nominibus vocetur, non dicit auctor, quia omnia alia nomina habent rationem suae lineationis sive figurationis. Quia rotunda est, dicitur haec figura teca ad similitudinem tecae. Teca enim est ferrum figurae rotundae, quod ignitum solet in quibusdam regionibus imprimi fronti vel maxillae furis seu latronum. Haec etiam figura dicitur circulus, quia est figura circularis; vocatur etiam cyfra, quasi circumfacta vel circumferenda, quod idem est, quod circulus, non habito respectu ad centrum*" (*Clm 11067.*, Blatt 143^{v}, col. 2, Z. 20—37. Vergl. die Ausgabe: Hauniae 1897, S. 26, 15—28).

16) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II²*, 855 hat diese Formel zuerst in dem Salemer, etwa um 1200 entstandenen Codex nachweisen können, welchen er in der Zeitschr. für Math. u. Physik XI, 1—16 zum Abdruck gebracht hat.

noch mit 4 multiplicirt ist, erscheint das Resultat 313 244. Hier sieht man, dass der Verfasser, als er 12 als Produkt erhalten hat, sich so hilft, dass er diese in 2 + 10 zerlegt, wo in späteren Abhandlungen 2 als *digitus,* 1 als *articulus* bezeichnet werden. Die Methode des Verfassers dürfte wohl seinem arabischen Vorbilde näher liegen als die andere Gepflogenheit. Die Probe der Multiplikation geschieht mit der Neunerprobe. Jetzt folgen der Reihe nach Addition, Subtraktion vom Verfasser *Diminutio* genannt, Halbirung und Verdoppelung. Bei der Subtraktion wird die folgende Stelle des Minuendus beim Borgen vermindert, nicht die des Subtrahendus um 1 erhöht. Bei der Halbirung einer ungeraden Einerziffer soll für die überschiessende 1 unter diese Ziffer 30, als Hälfte von 60 Minuten gesetzt werden, bei jeder andern ungeraden Ziffer jedoch 5 der rechts vorhergehenden hinzugezählt. Hier steht schon „*posteriori differentia*" wie wir jetzt sagen würden; nach der sonst im Algorismus gebräuchlichen Sprechweise müsste es „*anteriori differentia*" heissen. Aus der Regel für die Verdoppelung scheint hervorzugehen, dass sie als Addition zweier gleicher Summanden ausgeführt werden soll. Auch bei ihr wird die Neunerprobe auseinandergesetzt. Für die nun folgende Division nimmt er als Beispiel 25 920 : 24. Die Zahl 25 920 wird als solche charakterisirt „*partes omnes fere continens*". Da sie gleich $2^6 . 3^4 . 5$ ist, so hat sie wirklich eine erstaunlich grosse Zahl von Theilern. Der Divisor kommt unter den Dividend zu stehen, der Quotient über denselben. Beim Fortrücken des Divisors nach rechts, kommt die Quotientenziffer stets über die Einerziffer des Divisors zu stehen, eine Regel, welche bekanntlich gegen die Abbacisten einen gewaltigen Fortschritt bedeutet. Hier sehen die einzelnen Phasen des Beispieles so aus:

	1	10	1080
25920;	1920;	1920;	000.
24	24	24	24

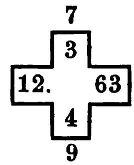
Dass die Nullen in der zweiten Reihe gesetzt werden sollen, sagt auch Petrus de Dacia in seinem oben erwähnten Commentare.[17] Während bei dem Verrücken des Multiplikandus, wenn im Multiplikator eine 0 steht, um zwei Stellen gerückt werden muss, warnt der Verfasser hier bei der Division etwa ein Gleiches zu thun. Die Probe der Division erfolgt durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor und Addition des etwaigen Restes.

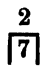
Es folgt das zweite Buch über die Minutien. Wenn Verfasser auch vorzugsweise Sexagesimalbrüche behandelt, so schliesst er doch die gewöhnlichen nicht aus. Für sie hat er aber noch keine schriftliche Darstellung im Contexte, d. h. er kennt nicht die Bruchform $\frac{a}{b}$; wie er sich beim

17) *A. a. O.,* Blatt 153.

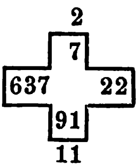
praktischen Rechnen hilft, werden wir später sehen. Sollen Sexagesimalbrüche multiplicirt werden, so multiplicirt man die Zahlen wie früher, die Benennung entsteht durch Addition der Benennungen der einzelnen Faktoren. Zur Bequemlichkeit wird eine Tabelle, ähnlich wie die Einmaleinstabelle, beigegeben, aus welcher man im Kreuzungspunkte der als Argumente überschriebenen Benennungen die resultirende ohne Rechnung findet. Die Zeichen für die Minutien gehen bis 18. Hier sieht man auch, dass das Zeichen ⊦ für 3, dessen Ursprung Dr. NAGL nicht zu wissen erklärte,[18]) aus diesen Zeichen für die einzelnen Sexagesimalbrüche entnommen ist. Ist der eine Faktor eine Anzahl von *Gradus*, welche Verfasser als Ganze bezeichnet, so ist die Benennung des Produktes dieselbe wie die der Minutie. Sind Gradus und Minutien mit solchen zu multipliciren, so bringt man alles auf die kleinste Benennung und reducirt zuletzt das Resultat wieder. So liefert $2^0 45'$ mit $3^0 10' 30''$ multiplicirt $1\,885\,950'''$, die nach Reduktion $\begin{array}{c}8\\43\\52\\30\end{array}$ ergeben, d. h. $8^0 43' 52'' 30'''$. So untereinander soll man dergleichen gemischte Zahlen anordnen. Dabei darf man aber, wenn eine Minutie fehlt, nicht unterlassen, an ihrer Stelle 00 einzufügen. Als Beispiel findet sich $\begin{array}{c}1224\\30\\45,\\00\\50\end{array}$ d. h. $1224^0 30' 45'' 0''' 50''''$. Bei der Division müssen Divisor und Dividend auf dieselbe kleinste Benennung gebracht werden. Ist dann die Division ausführbar, so ist der Quotient als Gradus zu bezeichnen, im Gegentheile löst man den Dividenden in die nächste Minutie auf. Bei der Addition, welche bei dem niedrigsten Bruche zu beginnen hat, sind je 60 Einheiten als eine Einheit der nächsthöhern Ordnung zuzuzählen. Ebenso gilt hier die etwa zu borgende Einheit bei der Subtraktion für 60 niedere Einheiten. Nun geht er zur Multiplikation von gewöhnlichen Brüchen, *fractiones*, über. Die Nenner, *denominationes*, bezeichnet er auch als *differentias*. Um $\frac{3}{7}$ mit $\frac{4}{9}$ zu multipliciren, entwirft er zunächst eine Figur in Gestalt eines griechischen Kreuzes. Die Zähler setzt er in die obere und untere Zelle, die Nenner, ausserhalb der Figur, also die 7 nach oben über 3, die 9 unter die 4, dann multiplicirt er die innern und äussern Zahlen; die Ergebnisse werden beziehungsweise in die rechte und linke Zelle gesetzt, und dann hat man Zähler und Nenner des

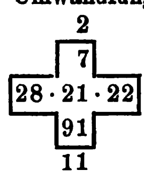
18) In der oben genannten Abhandlung, S. 134.

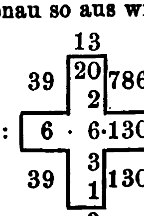
gesuchten Produktes. Das Exempel sieht also so aus 

. Hat man zwei gemischte Zahlen, z. B. $3\frac{1}{2}$ und $8\frac{3}{11}$ zu multipliciren, so werden diese so angeschrieben, dass in die obere Zelle 3 und 1 untereinander geschrieben werden, der Nenner 2 aber wieder ausserhalb über den Strich, 8 und 3 werden ebenso in die untere Zelle eingeschrieben, der Nenner 11 unter den Strich. Dann werden die Zahlen eingerichtet und nach der ersten Art eingeschrieben, also 

und 

, und man erhält das Resultat 

, wo dann nur noch die Umwandlung in Ganze und Bruch vorzunehmen ist, welche nun endlich 

, d. h. $28\frac{21}{22}$ ergiebt, wie der Verfasser sagt, *28 integri et viginti et una pars de 22 partibus unius.* Den spätern Ausdruck *21 vicesimae secundae* kennt er also noch nicht. Auch hier giebt er, in Form des Einmaleins, eine Tafel, aus der man für die ersten 9 Nenner den resultirenden Nenner ohne Weiteres entnehmen kann. Da dieselbe sich von der Einmaleinstabelle nur dadurch unterscheidet, dass statt der Ziffern von 1 bis 9, die Anfangsbuchstaben der Zahlworte geschrieben sind, so hat man wieder einmal ein deutliches Beispiel dafür, dass Betrachtungen, welche uns überflüssig erscheinen, für frühere Zeiten als nothwendig gefühlt wurden. Für damalige Zeit war also die Beziehung zwischen 2 und *una medietas*, 3 und *una tertia* u. s. w. nicht genügend, um das gewöhnliche Einmaleins auf die letztere Bezeichnung ohne Weiteres anwenden zu können. Die Division gemischter Zahlen (die der einfachen Brüche dürfte ähnlich zu behandeln sein, wird aber nicht direkt gelehrt), wird so bewirkt, dass beide auf denselben Nenner gebracht werden; Division der Zähler giebt dann das Resultat. Der Ansatz sieht zunächst genau so aus wie zur Multiplikation. Z. B. $20\frac{2}{13} : 3\frac{1}{3}$ setzt unser Verfasser so an: 

,

d. h. den gemeinsamen Nenner setzt er links neben die obere Zelle und ebenso links neben die untere, die entstehenden Zähler ebenso rechts neben die jedesmal entsprechende Zelle, das Resultat aber, wie bei der Multiplikation, in die mittlere offene Reihe. Den ihm noch fehlenden Bruchstrich hat er also in ganz geschickter Weise zu ersetzen gewusst.

Damit schliesst das zweite Buch. Das dritte beschäftigt sich mit der Ausziehung der Quadratwurzel. Nach Erklärung von Wurzel giebt er zunächst die beiden Sätze $\sqrt{a^2b^2} = ab$, $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$. Dass reine Zehner, Tausender u. s. w. keine Wurzeln haben, d. h. keine Quadratzahlen sein können, drückt er so aus: *Prima differentia*, das ist Stelle, *et ita omnes impares radicem possident, secunda vero et quarta omnesque pares nequaquam.* Bei den Sexagesimalbrüchen haben nur 2^a, 4^a u. s. w., das heisst die gradnamigen Wurzeln. Die Ausziehung der Wurzel wird in der gewöhnlichen Weise gelehrt; bei Sexagesimalbrüchen muss man dieselben auf Sekunden, Quarten u. s. w. resolviren, und die dann gefundene Wurzel wieder reduciren. Die Wurzel hat die halbe Benennung des ursprünglichen Bruches. Um aus einer gemischten Zahl die Wurzel zu ziehen, richtet man sie zunächst ein, dann erweitert man sie mit dem Nenner und zieht die Wurzel aus dem Zähler, die dann den frühern Nenner als Nenner hat, also: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$. Dann wird aber diejenige Methode auseinandergesetzt, welche sich bei Johannes de Lineriis und Johann von Gemunden findet.[19]) Nach Anhängung einer geraden Anzahl Nullen an die zu radicirende Zahl, zieht man so die Wurzel aus; ein etwaiger Rest wird vernachlässigt. Dann schneidet man halb so viele Stellen ab, als man Nullen angehängt hat, multiplicirt die abgeschnittenen mit 60, schneidet wieder ebensoviele Stellen ab, und wiederholt die Manipulation, bis alle abgeschnittenen Ziffern Nullen sind. Dann hat man in den links stehen gebliebenen Zahlen die Ganzen, Minuten, Sekunden u. s. w. der gesuchten Wurzel. So findet er als $\sqrt{26}$: 5 Ganze $5' 24''$.

Dies der Inhalt der Einleitung unseres Verfassers, soweit sie als *Algorismus* bezeichnet werden kann.

Das nun folgende vierte Capitel der Einleitung soll nach der Ueberschrift „*de musicis ac geometricis rationibus*“ handeln. Was allenfalls zur Musik gerechnet werden könnte, ist allein der erste Paragraph: *De pro-*

19) Man sehe Cantor, *Vorlesungen II,* 164 und meine *Miscellen zur Geschichte der Mathematik im 14. und 15. Jahrhundert.* (*Bibliotheca mathematica* VIII, S. 115, Anm. 11.)

portionibus. Derselbe hat folgenden Wortlaut: „*Omnis itaque numerus ad alium comparatus uel erit in multiplicitate, cuius species sunt duplus, triplus, quadruplus, sic in infinitum. Multiplex vero est, qui continet alium plus quam semel hoc modo 2 et 4; Vel superparticularitate, ut sesqualtera, sesquitertia et deinceps. Est autem superparticularis, qui relatus ad alterum continet ipsum totum et eius vel tertiam vel quartam*, *sic 3 et 4; Vel superpartiente, ut sunt superbitertius, superbiquartus, sic in infinitum. Superbipartiens dicitur, qui alterum semel continet et eius duas tertias vel tres quartas et sic in infinitum, ut hic 3 et 5; vel multiplicitate et parte sic: 3 et 7; vel multiplicitate et partibus hoc modo: 3 et 8.*“ Das ist alles. Hier kennt nun mit einem Male der Verfasser die Bezeichnung zwei Drittel, drei Viertel, welche er im Algorismus nicht benutzt. Das liegt doch jedenfalls an der Quelle, woher er für jedes seine Wissenschaft entnahm. Nun dieses vierte Capitel, das sich im weitern Verlaufe mit Geometrie beschäftigt, beruht eben vollständig auf römischer Tradition, die vorhergehenden auf indisch-arabischer. Wenn es da heisst: *Punctum est, quod parte caret, Punctum est principium lineae. Linea est longitudo sine latitudine. Linearum verum genera sunt tria: rectum, circumferens et flexuosum*“, und dazu dieselben Figuren wie zu den entsprechenden Worten der *Gromatici Veteres;*[20]) wenn es weiter heisst: *Rectarum linearum species sunt 6: cathetus, basis, ypotenusa, coraustus, diagonalis, diametrum;* wer, frage ich da, kann über den Ursprung solcher Wissenschaft in Zweifel sein? Und ähnlich geht es weiter. Ich will nur einiges noch hervorheben, was von Interesse ist, zum Theil wohl auch aus anderer Quelle. Ob ein Dreieck rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig ist, wird daraus erkannt, ob die Verbindungslinie der Mitte der Basis mit der Spitze gleich, grösser oder kleiner als die halbe Basis ist. Quadrirt man Basis und Cathetus und zieht aus der Summe beider Quadrate die Wurzel, so erhält man den **Podismus,**[21]) und zwar ist in denselben Paragraphen dieselbe Linie auch *hypotenusa* genannt worden. Den Paragraph *De inventione catheti in ysopleuro* setze ich vollständig hier her: *Cathetus igitur ysopleuri sic quaeratur. Dimidium lateris in se de altero toto in se enumeretur, residui latus cathetum sumpta unitate ponit.* Als Beispiel ist ein Dreieck gezeichnet, dessen drei gleiche Seiten 30 betragen, die Höhe ist als 26 bezeichnet. Da $30^2 - 15^2 = 26^2 - 1$ ist, so dürfte wohl diese Beziehung mit obigem Wortlaut gemeint sein, und es läge also eine unzulässige Induction vor. Beim gleichschenkligen Dreieck

20) Gemeint sind *Gromatici Veteres ed.* Lachmann, Berolini 1848.

21) Dieses Missverständnis stammt bekanntlich aus der Geometrie Gerberts, der dasselbe wieder selbst aus dem *Codex Arcerianus* der *Gromatici veteres* entnahm. Gerbert, Cap. 59.

ist das Probedreieck 25, 25, 14; die Höhe ist richtig zu 24 angegeben. Beim ungleichseitigen Dreieck wird in der bekannten Weise die *minor praecisura*, d. h. der kleinere Höhenabschnitt, gesucht. Als Beispiel das Dreieck 13, 14, 15 mit der Höhe 12, die *praecisura minor* 5. Rechtwinklige Dreiecke *sub eadem constituta ypotenusa* sind ähnlich. Kreise mit gleichem Durchmesser sind gleich, alle Radien sind gleich. Haben zwei Sehnen gleichen Abstand vom Mittelpunkte, so sind sie gleich. Den Umfang des Kreises findet man durch Multiplikation mit 3 und Addition eines Siebentel, oder durch Multiplikation mit 22 und Division durch 7. Umgekehrt ergiebt sich der Durchmesser nahezu *(paene)* aus dem Umfang, wenn man $\frac{1}{22}$ abzieht und den Rest durch 3 dividirt,[22]) oder indem man denselben mit 7 multiplicirt und dann durch 22 dividirt, genauer aber *(verius) latus decimae multiplicationis ambitus in se eius diametrum indicat,* d. h. $\pi = \sqrt{10}$ ist unserem Verfasser genauer als $3\frac{1}{7}$. Das Volumen der Kugel findet man durch Multiplikation des Cubus des Diameters mit $\frac{11}{21}$. Damit ist alles erschöpft, was der Verfasser aus der Geometrie an Vorkenntnissen für die Astronomie als nöthig erachtet.

Das fünfte Buch dieser Einleitung „*de temporibus et motibus*“ behandelt zunächst die verschiedenen Zeitrechnungen nach Jahren Christi, die Arabische und Hebräische, und giebt eine Tabelle für die Reduktion der verschiedenen Aeren aufeinander. An einer Stelle heisst es: „*Hebreorum autem literarum haec est descriptio*“, dann folgt ein leerer Raum, doch wohl weil der Abschreiber die hebräischen Buchstaben nicht zu schreiben verstand, und dann fährt der Text fort: „*quarum primae 9 primae speciei numeros naturaliter figurant, secundae vero omnes praeter geminatas secundae speciei terminos ordine recto usque ad 400 continent. Prima geminatarum 500, secunda 600, tertia 700, quarta 800, quinta 900 possidet*“, damit die genaue Bekanntschaft des Verfassers mit der hebräischen Zahlenbezeichnung bekundend. Es folgt dann eine gedrängte Darlegung des Weltsystems. In einer Schlussschrift dieser Einleitung ist weiter eine Vergleichung des Weltsystems mit dem menschlichen Körper gegeben, den er als *minor mundus* bezeichnet. In Anmerkung[23]) gebe ich den nicht uninteressanten Text. Dann folgen die drei Bücher der Astronomie, welche eine genaue Darstellung der Himmelserscheinungen mit einer Fülle von Tabellen umfassen.

---

22) Diese Regel findet sich schon bei Hermannus Contractus und bei Gerbert. Siehe Cantor, *Vorlesungen* I², S. 832.

23) „*In huius libri principio tria considerantur, scilicet de quo, cur, et qualiter tractet. Tractat hic de multitudine et magnitudine introductorie propter difficultatem et diversitatem motus superiorum corporum super hanc mundum inferiorum agentium. Non sine causa dicitur homo minor mundus, quia quaecumque sunt in*

EX CODICE LATINO MONACENSI 18921.

Quoniam de quarta introducendis matheseos nos fari disciplinarum 27r,1
praesens tempus ammonuit, oportet nos ab ipsius artis elementis principium sumentes ad tempora et motus coaequa quidem gradatim ascendere. Omnes enim arithmeticam unitatem, musicam motum, geometriam punctum, hanc instans propria principia. Sed quia tres sunt ad quartam introductoriae, de his primo quidem compendiose sermo futurus erit. Motus vero species sunt VI, quorum quidem duo sunt simplices et IIII compositi. Simplicium vero alter convertibilis, alter localis. Convertibilis autem duas habet species, alteram essentialem, ut constructio et destructio, sicut de aqua in christallum, et alteram qualitativam, ut de dulci in amarum, de calido in frigidum, sicut et de vino in acetum. Localis autem duos habet modos, unum circularem, ut firmamenti et planetarum, alterum vero directum, cuius sex species: ante et retro, dextrorsum et sinistrorsum, sursum et deorsum. Sed compositi sunt augmentatio et diminutio, constructio et destructio. Nam augmentatio fit ex vertibili essentiali et qualitativo, ut de grano in herbam, diminutio vero ex eisdem sed contrariis. Constructio quoque fit ex convertibili et locali, ut de quibuslibet confectionibus, destructioque ex contrariis. Sed temporis partes sunt haec: Anni, menses et dies, hora, minuta, puncta, momenta et instantia. Si vero caelestium corporum motus et naturas et proprietates et loca in directione, statione et retrogradatione caeterisque et alia ad iudicia necessaria commoverimus, plenam et profundam scientiam in terrenis actibus certissime consequamur, de quibus omnibus a PTOLEMEO in *Azige(!)* compendiose scribitur.

INCIPIT LIBER PRIMUS DE INTEGRIS NUMERIS.

Instans pars temporis est, cuius nulla pars est. Momentum vero pars temporis est constans ex DLXXIIII instantibus. Minutum quoque est ex IIII momentis collectum. Punctum vero temporis spatium duobus minutis

---

superiori et in inferiori mundo. In maiori quippe sunt VII planetarum orbes, id est fixarum circuli et aplanos suprema sphaera. In minori similiter, quia cerebrum naturae vim Lunae retinet, pulmo Mercurii, testes Veneris, cor Solis, renes Martis, epar Iovis, splen Saturni, Compago corporis circuli fixarum. Ut enim ibi quaedam signa, ita hic lacerti, musculi; ut ibi singulares stellae, ita hic nervi, venae, arteriae et alia. In hoc quidem infunditur quoddam divinum et subtile, scilicet anima, ubi ibi quoddam subtile et purum et quasi divinum, scilicet aplanos. In corpore quoque mundana sunt quatuor elementa: terra, aqua, aer et ignis; et in isto quatuor: malencolia, flegma, sanguis et colera. Illa superiora agunt inferiora per quatuor naturas. Si igitur aliquid horum fuerit in causa discrasiae, recurrendum est ad consimile, ut si cerebrum, et sic de caetero".

27r,2 et dimidio metitur. Hora etenim IIII punctis con|tenta est, XXIIII. diei. Dies autem mensis XXX. plusve minusve. Menses etiam anni XII. Sed annus est spatium, quo sol ad idem zodiaci punctum revertitur. Sunt tamen uniuscuiusque populi anni proprii, unde Arabes, quos immitaturi sumus, annos lunae secuntur. Egyptii vero pro compendio partes temporis alia denominatione, sexagenaria scilicet, habentes, plurimas partes, ut pote secundam, tertiam, quartam, quintam et sextam hoc modo vocantes: minuta, secunda, tertia, quarta, excogitavere. Quantocunque enim aliquis numerus plures partes habuerit, tanto melius dividitur, ut $\overline{\text{II}}$. DXX, et quia omnium numerorum praetermissa doctrina scientia nulla procedit, ab ipsis nostri tractatus inicium Indorum ratione sumatur: Oportet igitur eorundem multiplicationem et divisionem, augmentationem quoque et diminutionem tam in maximis quam minimis integris quam minutiis indagante differentiam subtili calculatione rimari. Nam ferunt unitatem in prima differentia, denarium in secunda, centenarium in tertia, millenarium in quarta, sic in infinitum his tribus ultimis progressione facta, principium possidere. In quibus etiam his VIIII figuris 1 2 3 4 5 6 7 8 9 tam integros quam minutias figurantibus utuntur. Utuntur etiam ciffrae hoc modo ⊖ vel 0. Verbi gratia prima in prima differentia unitatem, secunda binarium, sic in ordine naturali ultima novenarium significat, et idem in caeteris fiat. Eorum quoque tres esse species affirmant, quarum quidem primam unitatis principium sumere et in novenario terminare; secundam denarii principium et eiusdem incrementum, sed fine carere; tertiam ex utrisque confectam utrisque participare.

De multiplicatione primae speciei. Primae multiplicationis speciei summa in hac regula et in hac figura continetur.

1	2							
2	4	3						
3	6	9	4					
4	8	12	16	5				
5	10	15	20	25	6			
6	12	18	24	30	36	7		
7	14	21	28	35	42	49	8	
8	16	24	32	40	48	56	64	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Si quis primae speciei aliquem eiusdem multiplicaverit, differentia maioris
27v,1 de minori demere et | de reliquo denominationem facere et iterum differentias eorum inter se ductas eidem addere oportet.

De multiplicatione secundae speciei. Porro secundae speciei multiplicationis ac tertiae communis est haec regula. Inferiarum differentiarum prima sub superioris dispositis ultima ponitur, et una quaeque superiorum cum omnibus inferioribus confertur. In qua collatione, si quis primae speciei excreverit, presentialiter collatam locetur, secundae ad secundam transferatur convenit. Verbi gratia secundae speciei dispositio sic fiat. Ponatur prima multiplicandi sub extrema multiplicantis hoc modo $\begin{array}{r}10\\10\end{array}$. In prima differentia est circulus, qui nichil significat, sed secunda unitas, quae 10 significat, qui denarius est multiplicator. Inferior autem denarius multiplicandus est, qui inter se conferantur ita. Semel unitas unitas est, qui supra ultimam inferioris ponatur sic $\begin{array}{r}110\\10\end{array}$. Semel nihil nihil est hoc modo $\begin{array}{l}100\\10\end{array}$. Inferioribus ablatis centum sunt hac positione 100. Item aliud exemplum. 40 in 300 ducantur sic $\begin{array}{l}300\\40\end{array}$. Ter 4 sunt 12; super 4 fit 2, sed 10 ad superiorem differentiam erigantur hoc modo $\begin{array}{c}12300\\40\end{array}$. Ter nihil nihil est, hac scilicet descriptione 12000.

De multiplicatione tertiae speciei. Proponatur ergo nobis in tertia specie 1024 per 306 multiplicare hoc modo $\begin{array}{r}1024\\306\ \end{array}$. Semel 3 et nil et 6 idem sunt sic $\begin{array}{l}306024\\306\end{array}$. Reducantur inferiores a nullo circulo, ex quo nil crescit, hoc modo $\begin{array}{r}306024\\306\ \ \end{array}$. Bis 3 6 sunt, 6 et 6 12, cuius binarius in loco 6 remaneant, 10 ubi nil est locetur. Bis autem 6 . 12 . 2 ibi remaneant, sed 10 in secunda ponatur taliter $\begin{array}{r}312124\\306\end{array}$. Iterum reductis inferioribus quater 3 12 sunt, 2 cum unitate, 10 in secunda cum 2 numeretur. Quater nil nil confert. Quater 6 24 sunt. 4 assunt, sed 2 cum 2 ibi 40 significat hac ratione 313244.

De probatione multiplicationis. Cum multiplicationem probare voluerimus, ipsam novenario dividemus, residuumque pro nota servemus. Iterum multiplicantem multiplicatumque novenario dividentes et superfluos inter se ductos itidem novenario dispositione separantes reliquum sine errore similem notae inveniemus.

De additione. Si vero addere voluerimus, unumquodque sub uno
| genere conponatur, exigit. Si autem excreverit in aliqua differentiarum 27v,2
denarius, ad superiorem dirigatur. Sed si in aliqua nil remanserit ciffrae ponatur.

De diminutione integrorum. In diminutione quoque unusquisque ponendus est in propria statione, et minor de maiore auferendus est vel minor minuendus. Sed si superior minor fuerit vel etiam nihil habuerit, unitas auferenda erit de sequentibus. Si de secunda, in prima denarium, idem in caeteris significabit. Est autem notandum in additione et diminutione initium a primis debere sumi.

De mediatione integrorum. Cum autem mediare iubemur sumentes initium a prima differentia si numerus impar fuerit, mediando parem pro unitate sub eadem differentia 30 ex 60 ponemus, in secunda quoque vel aliis differentiis mediatis paribus pro unitate in posteriori differentia 5 reponemus.

De duplicatione. In duplicatione quoque principium ab ultima sumentes inferiora superioribus copulemus, in quibus si denarius excreverit superoribus aggregetur.

De probatione duplicationis. Si duplicationem probare voluerimus, quae duplaveramus novenario dividamus, reliquumque duplatum itidemque divisum notam notae integri duplati eademque divisi similem ostendit.

De divisione integrorum. Haec hactenus de multiplicatione. Nunc autem de divisione loquamur. Ultima divisoris sub ultima dividendi ponitur, si minor vel aequalis fuerit numerus. Si vero maior, secundatur; caeterae vero in propriis differentiis. Ultima dividenti quotiens in ultima vel ultimis dividendi fuerit denominatione super primam divisoris posita totiens de reliquo sequens aufertur. Verbi gratia 25 920 partes omnes fere continens per 24 dividantur hoc modo $\begin{array}{l}25\,920\\24\end{array}$. Ponatur talis numerus super primam dividentis, qui per ultimam eiusdem demat ultimam vel ultimas dividendi, tali tamen conditione, ut de reliquo per denominationem sequens minuatur sic $\begin{array}{l}1\\1920.\\24\end{array}$ Semel 2 2 sunt, qui de ultima dividendi auferantur. Minuatur sic, ut nihil remaneat. Et semel 4 4, et de secunda minuatur sic. Ite-
28r,1 rum | reducatur, ut idem fiat $\begin{array}{c}108\\1920.\\24\end{array}$ Octies itaque binario de 19 sublato 32, qui remanserant, idem etiam octonarius per quaternarium ductus prima et tertia differentia ciffre sumpta regulariter aufert hoc modo $\begin{array}{r}1080\\000.\\24\end{array}$ Si vero in reductione circulum inveneris, cave ne praetereas, ut in multiplicatione fecisti.

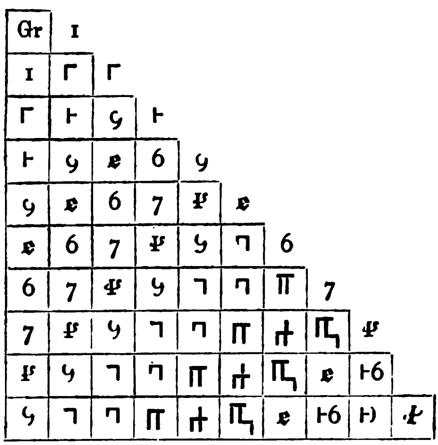
De probatione divisionis. Sed si divisionem probare cupis, multiplica

dividentem per id, quod de divisione evenerit, addendo tamen reliquias, et si integer numerus restaurabitur, bene divisisti. Sin errasti, reitera.

INCIPIT LIBER SECUNDUS DE MINUTIARUM NOTIS.

Et quia de integrorum multiplicatione, additione, diminutione, duplatione, mediatione et divisione compendiose diximus, nunc idem de minutiis ratio competenter postulat, ostendamus. Gradus autem integer est, cuius pars est minutum 60., secundum 3600., tertium 216000.

De multiplicatione minutiarum. Omnis itaque minutia ducta in se ipsam vel aliam decrescet in totam sui vel illius, quota est integri. Verbi gratia 12 minuta in 24 minuta ducta in 288 secunda decrescunt, et 14 minuta in 15 secunda 210 tertia fiunt. Et idem in caeteris, quarum haec est figura:



Harum minutiarum in se vel inter se collectarum summa sumit earundem minutiarum aggregatas denominationes.

De multiplicatione integrorum per minutias. Omnis autem integer si ducatur in aliquam fractionem, ex genere illius fractionis efficitur. Erunt quidem 25 gradus in 5 minuta 125 minuta, et 4 integra in 6 secunda 24 secunda. Idem in caeteris. At si unum et dimidium per unum et dimidium multiplicare voluerimus, unum et dimidium minuta faciemus, et erunt 90. Similiter de alio. Quos inter se | multiplicemus, erunt- 28^{r},2
que 8100 secunda. Quae si per 60 dividantur, ad minuta redibunt, quae iterum eadem divisione 2 gradus et 15 minuta erunt. Et iterum ponamus aliud exemplum integrorum et minutiarum et aliter. Sint quoque verbi gratia 2 gradus et 45 minuta, quae per 3 gradus et 10 minuta ac 30 secunda ducantur. Resolvatur itaque per 60 unusquisque ad suam ulti-

mam differentiam, id est minuta et secunda scilicet 165 et 11430, quae si inter se ducantur, erunt 1885950. Quae omnia si per 60 dividantur ad secunda reducentur, eruntque 31432 secunda, et remanebunt 30 tertia. Quae secunda eadem divisione 523 minuta remanentibus 52 secundis ostendunt, et hi itidem divisa 8 gradus indicant 43 minutis supereminentibus

hoc modo:
8
43
52.
30

De divisione minutiarum. Si vero eas dividere voluerimus, primo deducantur ad ultimam differentiam. Tunc si alterum per alterum dividi potuerit, integer restituitur. Sed si quid superfuerit, qui dividi non poterit, tota integri condenominatione sumenda est, quota illud residuum fuerit dividentis. Si vero pars denominationis non fuit, tunc summa denominationis integri et residui inter se primis divisor prioribus partiatur. Verbi gratia 15 tertiae si per 6 tertias dividantur, 2 et dimidium restituuntur, quia 15 tertiae 5 integros creant. Si medietas per medietates, quartae per quartas, et minuta per minuta, secunda per secunda. Iterum dividamus 10 secunda per 5 minuta. Ut hoc fiat, minuta in secunda resolvamus, 300que fient. Quod quia fieri non potest, dicimus, inde nullum integrum posse creari. Unde oportet ipsa per 60 multiplicare, et orientur 600 tertia, quae divisa unumquodque 2 secunda ostenditur

habere hoc modo
2
600.
300

De constitutione integrorum et minutiarum. Dum vero constituere integros et fractiones voluerimus, integros ut supra ponemus sic, sub prima et secunda minuta recto ordine collocabimus. 1224 quidem gradus suas sedes possideant, 30 quoque minuta sub his assistant, quae 45 secunda sequantur, sub quibus etiam 50 quarta interposita ciffrae statuantur hoc

modo
1224
30
45.
00
50

De additione minutiarum. Cum autem addere voluerimus, incipiemus
28v,1 ab inferioribus, in quibus | si 60 excreverint, unitas pro ipso superiorem

differentiam petat hoc modo
2999
59
59.
59
59

De diminutione minutiarum. Si vero minuere necesse fuerit, ab inferioribus principium diminutionis erit. Sed si in aliqua differentiarum minus vel nihil erit, a superiori unitas sexagecupla sumenda est ut in superiori figura.

De duplicatione et mediatione minutiarum. In duplicatione vero a superiori differentia, sed in mediatione ab inferiori, ut supra, incipiendum est.

De multiplicatione minutiarum diversorum generum. Si vero numerum cum fractionibus vel etiam fractiones multiplicare vel dividere quemque iubemus, ut sunt quintae et 9^{ae} et his similes, praedicta ratione utemur, deducendo ad inferiorem omnia differentiam. Verbi gratia si 3 septimas in 4 novenas multiplicare volumus, quasi minuta eas multiplicemus, postquam fient quasi ex genere secundorum. Cumque ipsas ad integros elevare cupimus, ⟨per⟩ easdem differentias utriusque generis inter se ductas dividendo reducemus. Dicimus autem differentias generis minutiarum denominationes esse, siquidem 5^{ae} a quinario, 7^{ae} a septenario, undecimae quoque ab undenario denominantur. Si autem ex divisione aliquis occurrerit, integer erit; si vero non, partes illius generis, per quod partiebatur, ut 3 septimae in 4 novenos 12 partes ex 63 unius, cuius haec est figura $\begin{array}{ccc} & 7 & \\ & \boxed{3} & \\ \boxed{12.} & & \boxed{.63} \\ & \boxed{4} & \\ & 9 & \end{array}$.

De multiplicatione integrorum et minutiarum diversorum generum. Si autem 3 et dimidium per 8 et 3 undecimas ducere vel etiam partiri praecipimur, eos in propriis sedibus prius collocamus oportet hoc modo $\begin{array}{c} 2 \\ \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ \\ 8 \\ 3 \end{array}} \\ 11 \end{array}$.

Tres posuimus, sub quo unum pro dimidio, sub quibus 8, hinc 3 minutias, utrarumque vero minutiarum denominationes, scilicet duos et undecim, extra figuram. Oportet etiam unamquamque ad suam fractionem retrahere hac ratione: bis 3 sex fiunt, quibus addatur unitas, eruntque 7, scilicet medietates, quae in loco trium et unius ponantur hoc modo $\begin{array}{c} 2 \\ \boxed{7} \end{array}$. Sic undecies 8 88 fiunt, quibus additis tribus 91 fiunt, quae in loco 8 et 3 undecimarum erunt hoc modo $\begin{array}{c} \boxed{91} \\ 11 \end{array}$. Quarum inter se multiplicatarum numerum,

scilicet 637, per numerum denominationum inter se ductarum, scilicet 22,

2
7
28v,2 divida|mus sic 637. .22. Qui numerus de divisione excreverit, integer
91
11

erit, residuum vero partes erunt dividentis, ut 28 integri et viginti

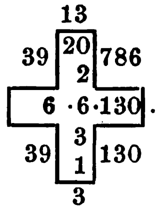
2
7
et una pars de 22 partibus unius hoc modo 28 · 21 · 22. Harum inter
91
11

se ducendarum minutiarum oriendae minutiae componunt denominationes, ut in hoc exemplo et hac figura monstratur: Duae tertiae per 3 quartas, ex quibus inter se ductis 12^{ae} efficientur. 2 tertiae per 3 quartas si ducantur 6 12^{ae} surgunt, nam tertiarum denominatio 3, quartarum 4, ex quibus inter se ductis 12 efficitur. In figura vero si ypotenusa per cathetum ducatur, in superficie denominationes minutiarum minutiarumque minutiarum directo inveniuntur hoc modo.

I	M								
M	4	t							
t	6	9	q						
q	8	12	16	Q					
Q	10	15	20	25	ʃ				
ʃ	12	18	24	30	36	S			
S	14	21	28	35	42	49	0		
0	16	24	32	40	48	56	64	N	
N	18	27	36	45	54	63	72	81	

De divisione minutiarum diversorum generum. Has autem minutias supradicta doctrina et resolvendo eas ad ultimum genus partiemus. Exempli causa 20 et duas partes et 13 per 3 et tertiam dividamus. Et quia non habent 13 tertiam, multiplicanda est tertiarum denominatio, id est 3, per differentiam partium, id est 13, ut sint unius generis, fietque numerus 39. Post haec ducas 20 per 39, eritque 780, quibus addantur duae partes de 13 ductae per denominationem tertiarum, id est 3, quae sunt 6, quia una pars 13 in 39 sunt 3, ut de 39 est 3, et erit 786. Iterum multiplica 3 in 39, ut sint unius generis; unde 130 partes additione 13, tertiae 39,

nascentur. Itaque utraque genera erunt aequalia. Ex divisione vero unius per alterum integer numerus progreditur, scilicet 6. Reliquum vero partes dividentis, scilicet 6, sic



.

INCIPIT LIBER TERTIUS DE INVENTIONE RADICIS.

Quoniam quod multociens necessaria est radix, | qualiter inveniri 29r, 1.
possit, breviter doceamus. Verumtamen radix, quae in geometria latus dicitur, est cuiuslibet numeri numerus, qui in se ipsum ductus, ipsum efficiet, ut 3 novenarii. In duorum inter se radicem habentium summa radix invenitur, unde in 4 et 9 6 est radix. Si duorum ad invicem dividendorum denominatio radicem habuerit, et eorum in se summa. Verbi gratia denominatio octonarii 18 dividentis est 2 et quarta habens radicem, et e converso in 4 novenis 18 octonarium dividente radix invenitur; habet itaque 144 radicem summa scilicet 8 et 18. Prima itaque differentia et ita omnes impares radicem possident, secunda vero et quarta, omnesque pares nequaquam. Hoc idem in minutiis spectatur. Prima quippe minutiarum differentia, scilicet minuta, radice caret, in secunda vero invenitur; tertia quoque non habet, sed quarta cum sexta continere probatur, et idem in reliquis, ut omnibus paribus sint radices, imparibus vero minime. Similiter in partibus minutiarum, ut medietatibus.

De inventione radicis integrorum. Cum vero radicem alicuius extrahere voluerimus, sub impari differentia talis numerus apponatur, quod in semetipsum ductus superiores consumat, et ibidem geminatus in secundam differentiam versus trans dextram transmutetur. Cui iterum talis subponatur a dextris, qui per duplatum et semetipsum multiplicatus diminuat superiores. Dupla itidem secundum et mutando eum ad secundum apponas eidem alterum, qui per differentias omnes et se ipsum superiores auferat, et id facias apponendo sive numerum sive ciffre, quousque superiores demas. Sed si aliquid remanserit, quod auferri non possit, erit pars inferioris duplati. Postea, quos duplaveras, media, et erit vera radix. Verbi gratia volo extrahere radicem de 5625, quorum positio est haec 5625. Quoniam sunt pares differentiae, sub impari haec figura 7 ponatur hoc modo $\begin{matrix}5625\\7\end{matrix}$, quae in se ducta 49 efficit. Quibus de 56 ablatis 7 restant sic $\begin{matrix}725\\7\end{matrix}$. In-

feriores duplati ibidem transferantur hoc modo $\frac{725}{14}$, quos 14 sequatur 5 taliter $\frac{725}{145}$, qui quinarius cum unitate 5 de 7 semovit, qui etiam cum 4
29r,2 20, qui | remanserant, abstulit, per semetipsum vero 25 consumit. hoc modo 145. Sed cum perveneris ad circulos, post quos non erit numerus, tuum numerum in suo loco geminabis et sub circulis transferes, cui apponendus est circulus, qui per duplatum et se ipsum superiores demat; et iterum transferas non geminando circulos, sed simplices reponendo, et hoc, quousque omnes consumes; vel medietas circulorum sumenda est.

De inventione radicis minutiarum. Si autem fractionum radicem invenire desideras, verte ipsas in ultimum genus. Deinde, ut in integris docuimus, faciamus. Sed si nihil remanserit, erit vera radix, et quod exierit, reducas ad integrum, ut poteris. Sed si aliquid superfuerit, non habet radicem. Tunc minuas, quia, quantocumque plus minues, eo magis numerum verae radicis propinquiorem generabis. Verbi gratia, si 120 minutorum radicem quaeris, vertas ea in differentiam habentem radicem, id est in secunda, fientque 7200, et si poneres quarta vel sexta, esset opus verius. Post haec extrahamus radicem 7200 secundorum, et sunt 84 minuta et fractio quaedam, quod sublevantes ad numerum integrum fit unum et 24 partes de 60, quae sunt minuta.

De inventione radicis integrorum et minutiarum diversorum ordinum. Radix duorum tertiaeve ac terciae decimae sic invenitur. Primo quidem omnia ad genus infimum ducenda sunt. Sed quoniam haec minutia sunt diversorum generum ex earum denominatione commune genus multiplicatione inveniendum est. Ex tribus enim et 13 39 consurgunt. Ad hoc ergo genus integra, ut sunt quasi minuta, deducantur hoc modo $\frac{2}{39}$, quibus 3 et 13 addatur ita $\frac{78}{16}$. Sunt etenim 94. Igitur ut sint secunda per suum genus iterum multiplicentur. Omnis autem genus harum est 39, quoniam ad modum praedictarum 3666 consurgunt, quarum itaque radix, ut praedocuimus 60 scilicet tricesimae nonae partes unius, supereminentibus 66 secundis, invenitur. Est autem radix ad integra reducta unum et 21 partes integri divisi in 39, quod leviter probanti illud patebit.

Item alia regula de inventione radicis. Cum volueris extrahere radicem,
29v,1 pone ipsum | numerum per differentias suas, sintque circuli versus dextram dumtaxat pares sive 4 sive 6, quia quanto plures fuerint circuli, tanto plus erit sic subtilis $\frac{260000}{5}$. Post haec extrahe radicem numeri

una cum circulis suis, quos addidisti, et quod exierit de numero integro mediato serva sic 509. Si vero aliquid superfuerit proice eum, et non cures de eo sic: 509. Et scito tunc, quod numerus ille non habet radicem; et si nihil remanserit, erit vera radix sine fractione. Post haec numera a dextris ab initio differentiarum radicis medietatem circulorum, et accipe, quod superfuerit, et scribe eum seorsum, et minue eum de loco suo hoc

00 9

modo 5 09, et multiplica, quod manserit, in 60 hoc modo 60, et numera similiter medietatem circulorum, quos addidisti, super numerum, et accipe superfluum, et scribes eum sub numero integro et minue eum de loco suo

00

sic: 5 40. Et quod remanserit multiplicabis iterum in 60, et numerabis

00

medietatem circulorum sic 2400, et accipies superfluum, et scribes eum sub numerum, quem scripsisti, et erunt secunda. Et si iterum aliquid remanserit, multiplicabis eum in 60, ut prius, et divides ut prius, et exibunt integri, minuta, secunda, 3^a, 4^a, 5^a, secundum circulos, quos posuimus

5	int.
5	min.
24	2^a

ante numerum. Integrorum vero et minutiarum radices inventae sunt. Si quidem omnia ad inferiorem differentiam deducenda sunt, quae deducta si fuerint secunda, habebit radix minuta, si 4^a 2^a, si 6^a 3^a; quia ista inter se illa producunt, quando radices ad sua integra reducantur, ut possunt. Hactenus de radicibus.

Nachschrift.

Es ist nachträglich gefunden worden, dass der Schreiber des *Clm 13021* für den hier in Frage kommenden Theil der unter dem Abte Eberhard des Klosters Prüfning bei Regensburg (1163—1168) schreibende Frater Sigsboto gewesen ist, welcher auch den Cassiodorius des *Clm 13027* gefertigt hat. Dadurch ist die Entstehungszeit des Codex auf die Mitte des XII. Jahrhunderts fest bestimmt. Durch die hier gegebene Beschreibung der Handschrift bitte ich das in den *„Monatsheften für Mathematik und Physik“* VIII, 193—194 über dieselbe Gesagte zu vervollständigen, beziehungsweise zu berichtigen.

Thorn, 29. November 1897.

M. Curtze.

DE

INQUISICIONE CAPACITATIS FIGURARUM.

ANONYME ABHANDLUNG AUS DEM FÜNFZEHNTEN JAHRHUNDERT.

HERAUSGEGEBEN VON

MAXIMILIAN CURTZE

IN THORN.

MIT 33 FIGUREN IM TEXT.

Die nachfolgende zum ersten Male gedruckte Abhandlung ist der Handschrift der königlichen Hof- und Staatsbibliothek zu München *Clm Nr. 56*[1]) entnommen, welche in der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts von einem gewissen Magister Reinhard von Wurm geschrieben ist. Es ist eine Foliohandschrift von 231 Blättern, welche oben rechts mit den Ziffern 2—232 foliirt sind, so dass wahrscheinlich ein Blatt vorn verloren gegangen ist. Auf der Rückseite des Deckels liest man folgendes Inhaltsverzeichniss:

„*In isto libro continentur infra scripta.*"

„*Primo almagesti abreviatum per Magistrum Thomam de Aquino Et continet libros sex incipit fol. 3.*"

„*Item liber theoreumatum tocius quadruuij et continet tractatus plures. Primus est de theoreumatibus arismetrice fol. 123. Secundus geometrice 131. Tercius musice 138. Quartus astronomie 145.*"

„*Item Alius tractatus theoreumatum astronomie circa theoricas planetarum et prius solis secundo lune deinde trium superiorum et veneris atque mercurij. fol. 161.*"

„*Item tractatus de quantitate trium solidorum magistri Iohannis schindel folio 197.*"

„*Item tractatus quidam bonus de capacitate figurarum folio 207.*"

Darunter das *Ex Libris* der Elektoralbibliothek zu München.

Auf dem untern Rande des Blattes 3^a befindet sich folgende Bemerkung, welche über die Schicksale der Handschrift Auskunft giebt:

„*Iste liber est conventus wienensis fratrum ordinis praedicatorum in austria. eidem attulit frater Iohanes fleckel Anno domini 1457 ante professionem suam de seculo, et fuit quondam magistri Reinhardi de Vurm, quem propria manu scripsit.*"

„*Quapropter scitote omnes et singuli, prout superius est narratum, quod idem liber est datus a prefato conventu Burchardo Keck civi Salzburgensi, prout habetur in literis sibi ab eodem conventu datis, pro pecunia satis legali.*"

---

1) Siehe *Catalogus Codicum manuscriptorum Bibliothecae Regiae Monacensis Tomi III pars I. Codices latinos continens Monachii 1868.* p. 10. Die dort gegebene Beschreibung ist unvollständig.

Danach ist also der Band von Magister REINHARDUS DE VURM geschrieben, kam nach dessen Tode in den Besitz eines gewissen JOHANNES FLECKEL, welcher ihn bei seinem Eintritt in den Predigerorden seinem Kloster in Wien überwies. Von diesem kaufte ihn später der Salzburger Bürger BURKARD KECK, nach dessen Tode er endlich in die Elektoralbibliothek zu München gelangte. Die königliche Hof- und Staatsbibliothek zu München besitzt noch einen zweiten Handschriftenband, der ein Bruder des vorliegenden genannt werden darf. Es ist dies *Clm 10662.*[1]) Derselbe hat auf Blatt 2ª folgende Bemerkung:

„*Iste liber est conventus wienensis fratrum ordinis predicatorum in austria, quem eidem attulit de seculo frater Iohannes Fleckel Anno dm̄i 1457, et fuit quondam magistri Reinhardi.*"[2])

Darunter steht dann:

„*Collegii Soc. JESU Molshemij*",

während auf dem vordern Deckel die Notiz steht:

„*Ex Bibliotheca Palatina Mannh. No. VI. 1298.*"

Auch dieser Band ist von REINHARD DE VURM selbst geschrieben. Seine weiteren Schicksale sind jedoch etwas anders verlaufen, bis sich beide Codices in derselben Bibliothek wieder zusammengefunden haben.

Blatt 3ª bis 120ª umfasst den nach obigem Inhaltsverzeichniss von THOMAS VON AQUINO verfassten Auszug aus dem Almagest. Er beginnt mit den Worten: „*Omnium recte philosophancium non solum verisimilibus coniecturis credibilibusque argumentis argumentandis, sed et firmissimis racionibus deprehensum est, formam celi spericam esse.*" Am Schlusse: „*Explicit Almagesti minor finitus Anno X 1434⁰.*"

Blatt 120ᵇ bis 122ᵇ ist leer. Von Blatt 123ª bis 153ᵇ schliesst sich dann der *liber theoreumacie* an. Anfang: „*Cum Ptolomeus in almagesti edisterat, quod bonum fuit sapientibus visum esse.*" Am Schlusse heisst es: „*Explicit liber theoreumacie finitus Salzburgi anno 1436.*"

Blatt 154—160 sind leer. Blatt 161ª bis 181ᵇ beginnt eine *Theorica planetarum,* welche, datiert von 1342, auch in der Thorner Handschrift R. 4⁰. 2[3]) sich befindet. Anfang: „*Philosophiae singulari exellentissimo doctori Magistro Johanni de ganduno Petrus de gluclina mathematicarum et*

---

1) Siehe *Catal. Cod. manuscript. Bibl. Regiae Monac. Tomi IV pars I. Monachii 1874,* p. 155.

2) Die Worte „*conventus wienensis fratrum ordinis predicatorum*" sind in der Handschrift ausradiert. Dieselben sind aber noch zweimal an andern Stellen derselben wiederholt, so dass an der richtigen Ergänzung Zweifel ausgeschlossen ist.

3) Siehe *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Supplementheft zum XIII. Bande,* Seite 79—80.

veracibus disciplinis cum studio intendere u. s. w." und schliesst: „*Et vos amantissimi magistri, qui astrorum et omnis phisice contemplacionis vacari proponitis et potestis, insufficienciam subportetis, quando poteritis, quociens videritis hoc opusculum in meam commemoracionem.*"

Es folgt, im Inhaltsverzeichniss auf der Rückseite des Deckels ausgelassen, eine Abhandlung „*De quadratura circuli*". Blatt 182ᵃ—186ᵇ. Sie beginnt: „*Ad probandum, quod sit dare quadratum equale aree circuli, assumitur ista proposicio Archimenidis.*" Wenn aus dem „*sit dare*" der Schluss richtig wäre, welchen Suter[1]) und nach ihm Cantor[2]) daraus gezogen haben, so müsste Albertus de Saxonia der Verfasser sein. Von der durch Suter veröffentlichten Arbeit ist jedoch die unsere wesentlich verschieden. Sie schliesst: *per 17am tercii igitur bf erit minor ipso.*"

Blatt 187ᵃ bis 188ᵃ umfasst dann eine kurze Abhandlung, welche in andern Handschriften „*Proposicio bona*" betitelt ist. Auch sie ist im Inhaltsverzeichniss übergangen.[3]) Sie beginnt: „*Si ab aliquo puncto signato, quod tantum distat a circumferencia alicuius circuli, quanta est semidyameter ipsius circuli, ducantur due linee una secans predictum circulum et transiens per centrum eius, alia contingens eum, tunc inter dua puncta circumferencie predicta, scilicet punctum sectionis et punctum contactus, continetur eiusdem circumferencie pars sexta precise.*" Dieser Satz wird dann auf astronomische Fragen angewendet. Blatt 188ᵇ, 189 bis 196 sind leer. Auf Blatt 197ᵃ beginnt dann der „*Tractatus de quantitate trium solidorum*", welchen das Inhaltsverzeichniss, sowie eine ganze Reihe anderer Handschriften dem Jsohannes Schindel[4]) zuweisen. Derselbe erstreckt sich bis Blatt 206ᵇ.

---

1) Suter, *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-litterarische Abth.* XXXII, 41—42.

2) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II, 181.

3) Sie fehlt auch in dem oben erwähnten Handschriftenkatalog.

4) Dass Johannes Schindel mit Johannes de Gamundia identisch ist, dürfte aus folgenden Handschriften der k. k. Hofbibliothek zu Wien hervorgehen:

1. Nr. 5412³, Blatt 155ᵇ—160ᵇ. *Johannes Schindel de Gamundia, Tabulae stellarum fixarum partim verificatae per Georgium praepositum Neuburgensem.*
2. Nr. 5415², Blatt 133ᵃ—160ᵃ. *Johannes Schindel de Gamundia, Canones pro ecclipsibus solis et lunae.*
3. Nr. 5418⁴, Blatt 128ᵃ—145ᵃ. *Johannes Schindel de Gamundia, Tractatus de quadrante horario.*
4. Nr. 5418⁵, Blatt 146ᵃ—164ᵇ. *Johannes Schindel de Gamundia, Tractatus de composicione cylindri.*
5. Nr. 5501¹, Blatt 1ᵃ—19ᵃ. *Johannes Schindel de Gamundia, Calendarium.*

Hiervon gehören Nr. 4 u. 5 sicher dem bekannten Johann von Gmunden an, so dass über die Identität kaum Zweifel bleiben kann. Der Wiener Handschriften-

Dort heisst es: „*Explicit tractatus de quantitate trium solidorum secundum sentenciam ptolomei in Almagesti etc.*“ Es handelt sich um Grösse und Entfernung von Erde, Mond und Sonne untereinander.

Nun kommt Blatt 207ᵃ—218ᵇ unsere Abhandlung, der sich Blatt 219ᵃ bis 222ᵃ diejenigen Sätze anschliessen, welche ich in etwas anderer Reihenfolge im 8. Jahrgange der „*Bibliotheca Mathematica*“ veröffentlicht habe. Die Blätter 222ᵇ bis 232 sind leer.

Was nun die vorliegende Abhandlung betrifft, so wird der Werth derselben sich aus dem anschliessenden Commentare ergeben. Orthographie habe ich insoweit geändert, als ich überall *ae* statt des einfachen *e* gesetzt habe, um leicht möglichen Missverständnissen aus dem Wege zu gehen. Auch habe ich „*sphaera*“ statt „*spera*“ drucken lassen, dagegen habe ich *c* statt *t* beibehalten. Die Handschrift unterscheidet sehr genau zwischen beiden Buchstaben, und es ist jedenfalls für das Verständniss des Textes durch Beibehaltung dieses Unterschiedes kein Schade geschehen. Der anonyme Verfasser kennt ausser EUCLIDES in der Ausgabe des CAMPANUS den *liber trium fratrum de geometria;* er citiert das Buch: ARCHIMENIDES *de curvis superficiebus*, eine Bearbeitung der Abhandlung *de cono et cylindro* von einem gewissen JOHANNES DE TLN̄. Auch JOHANNES DE LINERIIS wird angeführt, doch ist es mir nicht möglich gewesen, die fragliche Schrift, auf welche Bezug genommen wird, aufzufinden. Sie muss sich mit trigonometrischen Untersuchungen befassen. Sonst habe ich alle von unserem Verfasser angeführten Stellen unter dem Texte als Anmerkungen im Wortlaute abdrucken lassen. Es folgt daraus, dass sein EUCLIDES z. B. nicht vollständig mit der gedruckten campanoschen Uebersetzung gestimmt hat. Auch bei ARCHIMENIDES *de curvis superficiebus* ergiebt sich an einer Stelle eine andere Satzzählung. Da in letzterer Abhandlung die Oberfläche eines Kegels richtig angegeben ist, so berührt es eigenthümlich, dass hier der Verfasser eine auch sonst mehrfach im Mittelalter auftretende absolut falsche Formel der Berechnung zu Grunde legt, obwohl er die Oberfläche des Cylinders unter Berufung auf die Abhandlung *de curvis superficiebus* richtig berechnet.

Die in den einleitenden Worten erwähnten *penthadonae domini* MOYSIS, können doch wohl kaum etwas anderes als den *Pentateuch* des MOSES bedeuten. Doch ist freilich von dem, weshalb sie citiert werden, nichts zu

---

katalog hat daher im *Index nominum* bei JOHANNES SCHINDEL nur den Vermerk *vide* JOHANNES DE GAMUNDIA.

Nach dem *Codex Amplonianus Qu. 278* stammte JOHANNES DE GEMUNDEN aus Schwaben. Es heisst dort: *Scholae et sophismata a magistro* JOHANNE DE GEMUNDEN *Suevo de suppositionibus* MARSILII DE INGEN *instituta.*

finden. Oder sollte doch irgend eine andere Schrift eines gewissen Moses gemeint sein?

Figuren sind sehr sauber und exact gezeichnet; so ist z. B. in § 8 die Seite der vierfachen Fläche eines gegebenen Kreises genau gleich $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers gemacht worden.

Zwischen § 7 und § 8 schiebt das Manuscript wörtlich das nochmals ein, was ebenfalls nach dem Manuscript bei uns als letzter Paragraph gedruckt ist. Da an erster Stelle der in den einleitenden Worten angedeutete Grundgedanke der Abhandlung, nach dem die Kreisberechnungen denen der geradlinigen Gebilde vorausgehen sollen, unmotiviert unterbrochen wird, dagegen an der letzten Stelle ähnliche Betrachtungen nur weiter fortgesetzt werden, so dürfte die Auslassung an dieser ersten Stelle wohl als gerechtfertigt erscheinen. Ebenso habe ich den § 29, welcher zwischen § 39 und § 40 im Manuscript sich findet, an seine richtige Stelle gebracht. Dass er hier vergessen war, giebt die sonst dort beliebte folgerichtige Anordnung der Paragraphen deutlich zu erkennen, während wieder die im Codex beliebte Stelle den Gedankengang unterbrechen würde. Die Paragraphenzahlen, welche in der Handschrift sich nicht finden, es sind dort nur Absätze und grosse bunte Initialen hervorgehoben, habe ich hinzugefügt. Dass jedoch solche beabsichtigt waren, wird durch Rückbeziehungen, wie „*in 14ª huius*“ und ähnliche zur Gewissheit.

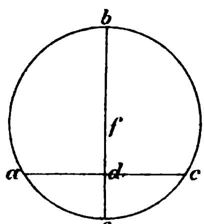
Vielleicht veröffentliche ich später auch die Abhandlung *De quadratura circuli,* welche auch neben der des Albertus de Saxonia Interesse beanspruchen darf.

Thorn, 9. Mai 1895. **M. Curtze.**

DE INQUISICIONE CAPACITATIS FIGURARUM.

| Aliquid de inquisicione capacitatis figurarum et quibusdam arismetricis orsurus dico, quod figurae capacitas dupliciter ad presens. Sumitur uno modo pro superficie tantum, et sic est planicies, area, podismus, campus, spacium, pedatura, fundus, embadum, seu superficies figurae absoluta vel linea seu lineis interclusa. Alio modo est tota moles solidi in relacione alicuius mensurae eam mensurantis considerata etc. Et quia circulus est figura omnium figurarum simplicissima, una enim tantum, ut vult Euclides[1]) in primo suorum elementorum, linea continetur, a qua ideo non immerito, ut testatur dominus Moyses in principio suarum penthadonarum,[2]) illud universale rerum commune opus incipit: ab illa igitur hic principium facere non indigne complacuit. 207

Fig. 1.



1. Dati circuli centrum invenire. (Fig. 1.)

Sit circulus datus *abc*, in quo ducam lineam rectam extremitates suas circumferenciae circuli applicantem, quomodocumque contingat; quae sit *ac*, quam per 10^{am} primi Euclidis[3]) diuidam per medium in puncto *d*. A quo puncto per 11^{am} eiusdem primi duco perpendicularem ad lineam *ac*, quam applico transscendere circulum ex utraque parte, quae sit *edb*; quam rursus divido per aequalia in puncto *f*, quem dico centrum circuli esse.

Patet per primam tercii Euclidis[4]) et per Campanum[5]) ibidem.

---

1. Fehlt im Mscrpt. — 11. *ille universalis rerum opus commune opus.* — 23. Hier schiebt das Mscpt. ein, was wir unten in § 8 am Schlusse haben abdrucken lassen: *Radix quadrata . . . 36* 2^{a}.

---

1) Euclides I, *Def.* 19 (ich citiere nach der Campanoschen Ausgabe): *Circulus est figura plana, una quidem linea contenta, quae circumferencia nominatur.*

2) Worauf sich diese Bemerkung beziehen soll, weifs ich nicht.

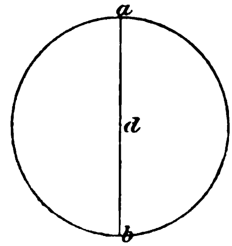
3) Euclides I, 10: *Proposita recta linea eam per aequalia dividere.*

4) Euclides III, 1: *Circuli propositi centrum invenire.*

5) Es ist hier offenbar der Beweis des Euclides dem Campanus zugeschrieben, wie dies so häufig geschehen ist. Die von unserem Autor beliebte Construction ist nichts weiter als die Euclidische.

2. Datae dyametri circumferenciam circuli invenire. (Fig. 2.)

Fig. 2.



Esto, ut sit circulus ab, et dyametrus eius data, verbi gracia 14, sit ab. Quam dyametrum tripla, et proveniunt 42. Producto si $\frac{1}{7}$ dyametri
7′ praedictae, scilicet 2, addideris, | 44, quae sunt circuli circumferencia, producuntur.

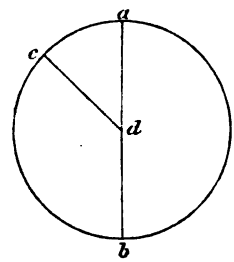
Patet per 7^{am} geometriae trium fratrum.[6])

3. Datae circumferenciae circuli dyametrum indagare.

Sit circumferencia circuli data, ut supra, verbi gracia 44. Ab ipsa igitur aufer 22^{am} partem, scilicet 2, et residui tercia pars, scilicet 14, fit dyameter circumferenciae circuli praedictae.

Patet per dictam 7^{am} geometriae trium fratrum.[7])

Fig. 3.



4. Dati circuli embadum invenire. (Fig. 2.)

Datum autem dico circulum, cuius dyameter est data.

Esto igitur circulus ab, cuius centrum d, et dyameter adb verbi gracia 14, et circumferencia 44. Ducta igitur medietate dyametri, scilicet ad, ut septem, in medietatem circumferenciae, ut in 22, provenit 154, quae sic dati embadum circuli producunt.

Patet per quartam trium fratrum.[8])

5. Arcus dati sectoris aream invenire. (Fig. 3.)

Circuli sector, ut vult Euclides[9]) diffinicione 10^{a} tercii libri, est figura, quae sub duabus a centro ductis lineis et sub arcu, qui ab eis comprehenditur, continetur.

Esto sector adc in dato circulo acb, cuius centrum d, dyameter adb ut 14, et circumferencia acb tota 44, arcus autem, scilicet ac, ut 11,

---

20. *quae sunt dati. — producuntur.*

---

6) Hier citiere ich nach meiner Ausgabe: Der liber trium fratrum de geometria. Halle 1884. Das Citat ist so, wie es gegeben ist, falsch. Es muss heissen: „per 6^{am}". Es heisst dort nach Archimedes Kreismessung: *iam ergo manifestum est ex eo, quod narravimus, quod proporcio lineae continentis circulum ad dyametrum eius est maior proporcione trium et decem parcium de septuaginta et una partibus ad unum, et est minor proporcione trium et septima unius ad unum, et illud est, quod declarare voluimus.*

7) Hier ist dieselbe Stelle des liber trium fratrum gemeint.

8) Liber trium fratrum, IV: *Medietatis dyametri omnis circuli multiplicacio in medietatem lineae continentis ipsum est embadum superficiei eius.*

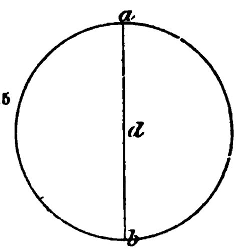
9) Euclides III, *Def.* 10: *Sector circuli est figura, quae sub duabus a centro ductis lineis et sub arcu, qui ab eis comprehenditur, continetur.*

embadum circuli per praecedentem 154. Sicut igitur se habet tota circumferencia *acb* ad arcum sectionis *ac*, sic se habet totum embadum circuli *acb* ad embadum sectoris *adc*.

Patet per PTOLEMAEUM[10]) in almagesti dictione sexta capitulo 7⁰, ubi dicit: „*Et quia proportio orbium ad arcus erit aequalis proporcioni superficierum ipsorum ad superficies sectorum.*" Idem patet per corrolarium quartae trium fratrum.[11])

Duc igitur arcum sectoris, ut numeri secundi, in circuli embadum, ut tercium, et divide per primum, scilicet per circumferenciam circuli, | 208
et 38 et $\frac{1}{2}$ unius, quod est embadum sectoris, producitur.

Fig. 2.



6. *Sphaerae, cuius maximus fuerit datus circulus, planiciem indagare* (Fig. 2.)

Esto sphaera, cuius maximus datus circulus sit *ab*, et dyameter tota verbi gracia 14. Ergo per quartam huius embadum circuli erit 154, quod si quadrupletur, exurgit embadum sphaerae praedictae, scilicet 616.

Patet per 15^am^ trium fratrum.[12])

Quod idem est, ac si dicatur: dyametrum in circumferenciam circuli multiplica. Idem enim producitur.

7. *Datum circulum incrassare.* (Fig. 2.)

Circulum incrassare[13]) voco sphaerae molem seu magnitudinem, cuius maior circulus fuerit datus, invenire.

---

10) PTOLEMAEUS citiere ich nach der Uebersetzung des GERHARD VON CREMONA in der Ausgabe: Almageſtū CL. Ptolemei | Pheludienſis Alexandrini Astronomoꝝ principis: | opus ingens ac nobile omnes Celorū mo-|tus continens. Felicibus Aſtris eat in | luceȝ: Ductu Petri Liechtenstein | Coloniēſis Germani. Anno | Virginei Partus. 1515. | Die. 10. Ja. Venetijs | ex officina eiuſ-|dem litte-|raria. |*⁎*| Cum privilegio. In dieser Ausgabe heisst es Blatt 68ᵃ, Dictio Sexta, Capitulum septimum, Zeile 44—45: *Et quia proportio orbium ad arcus est equalis proportioni superficierum earum ad superficies sectorum.*

11) Liber trium fratrum, IV, S. 19, Z. 5ff.: *Et iam scitur ex illo, quod narravimus, quod, cum sumitur ex circulo abg arcus, quicumque arcus sit, et protrahuntur ex duabus extremitatibus eius duae lineae ad centrum circuli, est embadum huius trianguli, quem continet iste arcus et duae lineae, quae protractae sunt ab extremitatibus eius ad centrum, illud, quod fit ex multiplicacione medietatis dyametri circuli abg in medietatem arcus assumpti ex eo, et illud est propositum.*

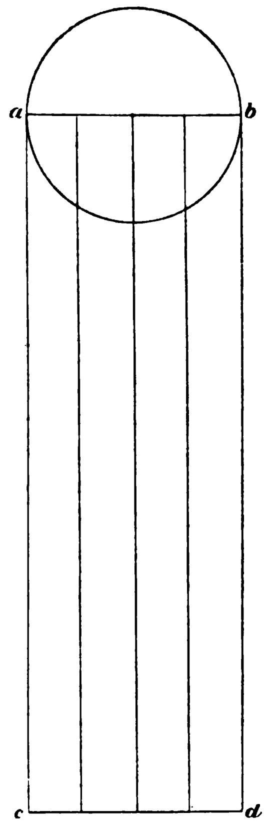
12) Liber trium fratrum XV: *Multiplicacio medietatis dyametri omnis sphaerae in terciam embadi suae est embadum magnitudinis sphaerae.*

13) Das Wort *incrassare circulum* für Berechnung des Rauminhaltes einer Kugel kommt meines Wissens zuerst bei GERBERT vor. Dort heifst es: *Circulum incrassare si vis* etc. (*Olleris*, C. LVI; LXXXII), obwohl BLUME in den *Gromatici*

Esto circulus datus, cuius volo crassitudinem, *ab*, cuius dyameter *ab* ut 14, quam cubabo, et proveniunt 2744, quae sunt cubus dyametri circuli dati. Qui cubus per 10^{am} ARCHIMENIDIS[14]) de curvis superficiebus habet se ad sphaeram dati circuli, sicut 21 ad 11. Ducatur igitur 11 in cubum, scilicet in 2744, et dividatur per 21, et 1437 et $\frac{1}{3}$ unius, quae sunt moles seu crassitudo circuli
8′ dati, producuntur. |

8. *Dati circuli orthoparallelogrammum quadruplum invenire.* (Fig. 4.)

Fig. 4.



Unde manifestum est, quod latus tetragonicum quartae orthoparallelogrammi praedicti est latus quadrati dato circulo aequalis.

Esto datus circulus *ab*, cuius dyameter *ab*. A terminis igitur dyametri *ab* ducam duas lineas rectas perpendiculares ad lineam *ab*, et ut quaelibet illarum sit aequalis circumferenciae circuli dati *ab*, quae sint *ac* et *db*, et complebo orthoparallelogrammum ducta linea *cd*: ergo per sextam ARCHIMENIDIS[15]) de curvis superficiebus ipsum orthoparallelogrammum *acdb* est aequale embado sphaereae circuli dati, ergo per 15^{am} geometriae trium fratrum ipsum orthoparallelogrammum est quadruplum ad circulum datum *ab*, quod erat assump-
9 tum. Rursus ex ultimo praedicti orthoparallelogrammi | quarta est aequalis circulo dato. Cuius quartae si per 40^{am} primi et ultimam secundi

---

7. *erit 1437.* — 8. Hier schiebt das Mscpt. den § 40 ein. Siehe die Einleitung. — 9. *orthoparalelogramum* und so immer. — 19. *sunt.*

---

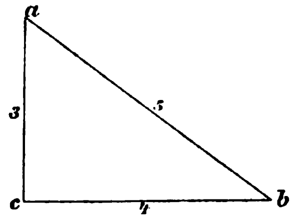
veteres (II), behauptet die Stelle bei GERBERT nicht aufgefunden zu haben. In den beiden vorhandenen Ausgaben steht sie sogar an zwei verschiedenen Stellen.

14) Von der Schrift ARCHIMENIDES de curvis superficiebus ist der Wortlaut der Theoreme in der Heiberg'schen Ausgabe III, LXXXVII—LXXXVIII zum Abdruck gekommen. Unser Verfasser muss die Sätze X und XI als einen betrachtet haben. Nur Satz XI enthält das, was er ausspricht: *Cuiuslibet sphaerae proportio ad cubum suae dyametri est tanquam proportio undecim ad 21.*

15) ARCHIMENIDES de curvis superf., VI: *Cuiuslibet sphaerae superficies est aequalis quadrangulo rectangulo, quod sub lineis aequalibus dyametro sphaerae et circumferencia maximi circuli continetur.*

Euclidis[16]) latus tetragonicum quaesieris, ipsum erit latus quadrati circulo dato aequalis. Radix quadrata areae circuli, scilicet 154, $14\frac{41}{100}$ fere, vel in phisicis 12 integra 24 M^a^. 36 2^a^.

Fig. 5.



9. Trigoni orthogoni omnium aut tamen duorum datorum laterum aream scrutare. (Fig. 5.)

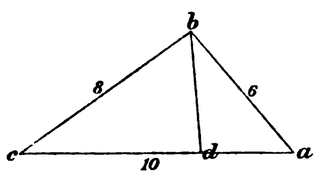
Sit triangulus orthogonus *abc*, cuius si duo latera angulum rectum ambiencia nota fuerint, verbi gracia *ac* ut 3, *cb* ut 4, duc unum in aliud, et producti medietas est area trianguli.

Patet haec per 41^am^ primi Euclidis.[17])

Si vero latus recto angulo oppositum, scilicet *ab*, cum uno tantum rectum angulum ambiencium, verbi gracia *bc*, nota fuerint, tunc subtrahe quadratum lateris *cb*, scilicet 16, de quadrato lateris *ab*, scilicet de 25, et remanet quadratum lateris *ac*, quod est 9, cuius radix quadrata est 3, et hoc latus *ac*. Quo cognito ut prius operatur.

Patet hoc per penultimam primi Euclidis.[18])

Fig. 6.



10. In trigonis oxigoniis et ampligoniis datorum laterum cathetum invenire. (Fig. 6.)

Cathetum voco lineam ab angulo oxigonii vel ampligonii ad latus oppositum perpendiculariter descendentem. In orthogonio enim illud quaerere non oportet: quaelibet enim linearum angulum rectum ambiencium potest dici, si placet, cathetus.

Sit igitur triangulus *abc* notorum laterum *ab* ut 6, *bc* ut 8, *ca* ut 10. Ab uno igitur angulorum trianguli ducatur linea perpendicularis super

---

2—3. *Radix.* — *2^a^* steht in der Handschrift an der oben erwähnten Stelle. — 17. *Patet* bis *Euclidis* steht im Mscpt. vor *quod est 9.* — 19. *oxigonii et ampligonii.*

---

16) Das Citat Euclides I, 40 ist falsch, es muss heissen I, 42. Dort heisst es: *Aequidistantium laterum superficiem designare, cuius angulus sit angulo assignato aequalis, ipsa vero superficies triangulo assignato aequalis.* — Das weitere Citat bedeutet II, 14: *Dato trigono aequum quadratum describere.*

17) Euclides I, 41: *Si parallelogrammum triangulusque in eadem basi atque in eisdem alternis lineis fuerint constituta, parallelogrammum triangulo duplum esse conveniet.*

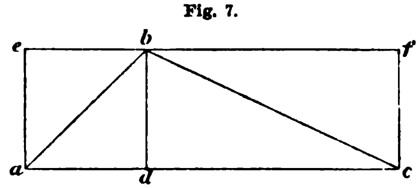
18) Euclides I, 46, der Pythagoreische Lehrsatz: *In omni triangulo rectangulo quadratum, quod a latere recto angulo opposito in semetipso ducto describitur, aequum est duobus quadratis, quae ex duobus reliquis lateribus conscribuntur.*

209′ latus | eidem angulo oppositum, quae sit verbi gracia *bd*. Est enim illa, quae quaeritur. Et quia per penultimam secundi Euclidis[19]) et Campani[20]) ibidem quadratum lateris *ab*, quod opponitur angulo acuto *c*, minus est duobus quadratis duarum linearum *ac* et *bc* tantum, quantum est ex *ac* in *dc* bis, duo igitur quadrata, scilicet *bc*, quod est 64, et *ac*, quod est 100, simul iungantur, et 164 proueniunt. De quibus demam quadratum *ab*, quod est 36, et remanent 128, et est illud, quod ex *ac* in *dc* bis sumptum. Cuius si medietatem acceperis, scilicet 64, et per lineam *ac*, scilicet 10, diviseris, 6 et $\frac{2}{5}$ unius, quae sunt linea *dc*, producuntur. Quadratum igitur *dc*, scilicet 40 partes 58 M^a, subtrahamus de quadrato *bc*, scilicet de 64, et remanent 23. et 2, quod est quadratum *bd*, cuius radix est 4.48, quae sunt cathetus *bd*, qui quaerebatur. Vel sic. Subtrahe quadratum *ab* de quadrato *bc*, et residuum divide per lineam *ac*, et producti medietatem adde super medietatem lineae *ac*, scilicet super 5, et proveniet maior pars lineae *ac*, scilicet *dc*, et si subtraxeris, minor pars producitur.

11. Trigoni oxigonii seu ampligonii datorum laterum aream inquirere. (Fig. 7.)

Sit trigonus quicumque iam dictorum *abc* datorum laterum *ab* verbi gracia ut 5, *bc* ut 8, *ca* ut 10. Et cathetus *bd* per praecedentem notus, verbi gracia 3 . 58, ducatur in lineam *ac*, et producitur orthoparallelogrammum *aefc* 39 . 40, quod per 41^{am} primi Euclidis[21]) est duplum ad datum triangulum *abc*. Medietas
210 | igitur eius, scilicet 19 . 50 est area trianguli *abc*, quod erat assumptum.

Fig. 7.



12. Trigoni orthogonii, ampligonii seu oxigonii duorum tantum laterum et unius anguli, aut duorum angulorum et unius lateris, aut omnium datorum angulorum et ignotorum laterum, aut e converso aream invenire.

---

5. *ac in dc* 𝔄 *Bis duo.* — 7. *et eius duplum est illud.* — 9. *10* fehlt.

---

19) Euclides II, 13: *Omnis oxygonii tanto ea, quae acutum respicit angulum, ambobus lateribus angulum acutum continentibus minus potest, quantum est, quod bis continetur sub uno eorum, cui perpendicularis intra superstat, eaque sui parte, quae perpendiculari anguloque acuto interiacet.*

20) Das bezieht sich wohl auf den von Campanus hinzugefügten Schlusssatz zu obiger Proposicio: *Notandum autem per hanc et praecedentem et penultimam primi, quod cognitis lateribus omnis trianguli cognoscitur area ipsius, et auxiliantibus tabulis de chorda et arcu cognascitur omnis eius angulus.*

21) Siehe oben Anmerkung 17.

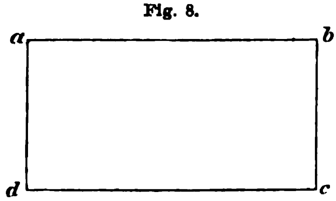
In his variacio diversa occurrit, ideo de hiis in hoc breviloquio figurarum subticeo, quia de hac materia in tractatu de triangulorum noticia satis scripsi. Ideo de invencione arearum praedictarum cum tractatu praedicto et cum cordis et earum arcubus et cum tribus praecedentibus te coadiuves, et habebis etc.[22])

Orthogonius autem est, cuius duorum laterum quadrata quadrato tercii lateris sunt aequalia. Si vero maiora fuerint, est oxigonius; si minora, ampligonius.

13. Si latera trianguli nota fuerint, et volumus scire cuiuslibet lateris oppositos angulos, quadra latera et quadrata simul iunge. Et quod productum sit primus numerus, et quadratum cuiuslibet lateris parciale sit secundus numerus, et duo anguli recti, quos quilibet triangulus rectilineus per corrolarium 32^{ae} primi Euclidis habet, sit tercius numerus. Duc igitur secundum in tercium et divide per primum, et sic angulos trianguli invenies.[23])

Quod si anguli noti fuerint, et latera ignota, circumscribe triangulo circulum. Quia sunt noti, arcus erunt ipsis subscipientes noti, quorum arcuum quaere cordas et habebis latera nota.[24]) | 210'

Fig. 8.



14. Orthoparallelogrammi datorum laterum aream inquirere. (Fig. 8.)

Esto orthoparallelogrammum *abcd*. Duc unum eius laterum in aliud angulum unum ambiencium, verbi gracia *ad* in aliud, scilicet in *dc*, et per primam diffinicionem secundi Euclidis[25]) producitur area orthoparallelogrammi praedicti.

15. Datorum laterum et angulorum almuhaim et sibi similium arcam invenire. (Fig. 9.)

---

10. *angulos* fehlt. — 23. *aliud* fehlt.

---

22) Hieraus geht hervor, dass unser Verfasser ein Buch mit dem Titel: *Tractatus de triangulorum noticia* geschrieben haben muss. Vielleicht ist es möglich aus dieser Bemerkung den unbekannten Autor wieder zu erkennen.

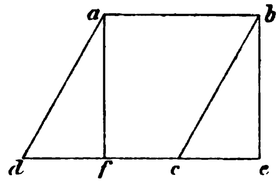
23) Euclides I, 32: *Omnis trianguli angulus extrinsecus duobus intrinsecis sibi oppositis est aequalis.* Omnes autem tres angulos eius duobus rectis angulis aequos esse necesse est.

24) Dass hier nur die relative Grösse der drei Seiten gefunden werden kann, ist von unserem Verfasser nicht scharf genug hervorgehoben worden.

25) Euclides II, *Def.* 1: *Omne parallelogrammum rectangulum sub duabus lineis angulum rectum ambientibus dicitur contineri.*

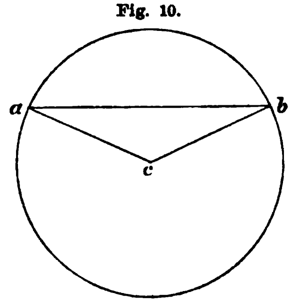
Almuhaim vero quadrangulum aequilaterum sed non aequiangulum. Similis almuhaim est quadrangulum solum laterum et angulorum sibi oppositorum aequalium.

Fig. 9.



Sit igitur almuhaim *abcd* datorum laterum, verbi gracia quodlibet ut 6, et angulo *d* $\frac{2}{3}$ recti. A punctis ergo *a* et *b* ducam perpendiculares ad *cd* ea ultra tracta, quae sint *af* et *be*, et quaeram quantitatem lineae *af*, secundum quod linea *ad* est 6. Triangulo *adf* per 5^{am} quarti Euclidis[25a]) ymaginabor transscribi circulum *adf*, et quia *f* est angulus rectus, erit per 30^{am} tercii[25b]) *ad* dyameter circuli *adf*, et arcus *afd* 180 gradus. Et quia angulus *d* per ypothesin $\frac{2}{3}$ recti, erit per ultimam sexti[25c]) arcus *af* similiter $\frac{2}{3}$ de 180, quod est 120 g^s, et corda eius *af* secundum quantitatem, qua dyameter *ad* est 120, erit 103 p^s et 55 minuta. Ergo secundum quantitatem, qua *ad* est 6, erit *af* 5 partes et 11 M^a. Patet posito *ad*, prout est 120, pro primo numero, *af*, prout est 103 partes 55 minuta, pro secundo, et *ad*, prout est 6, pro tercio etc. Duc igitur *af* in *fe*, et producitur quadratum *abef*, quod est aequale almuhaim datae.

Fig. 10.



Patet sic. Quia duo trianguli *adf* et *bce* sunt aequales, nam duo anguli | *d* et *f* unius sunt aequales duobus angulis *c* et *e* alterius per 29^{am} primi,[25d]) et duo latera *ad* et *af* unius sunt aequalia duobus lateribus *bc* et *be* alterius, ergo etc.; unde constat, quomodo quadratum aequale datae almuhaim describitur.

Et similis modus est recte de simili almuhaim.

16. Porcionis circuli dati arcus aream scrutari. (Fig. 10.)

Portio circuli est superficies inter datum arcum et cordam eius consistens.

Sit circulus *ab*, cuius centrum *c*, et arcus datus porcionis circuli,

3. *inaequalium.*

25a) Euclides IV, 5: *Circa trigonum assignatum, sive illud sit orthogonium, sive amplygonium, sive oxygonium, circulum describere.*

25b) Euclides III, 30: Siehe Anm. 30.

25c) Euclides VI, 32: Siehe Anm. 31.

25d) Euclides I, 29: *Si duabus lineis aequidistantibus linea supervenerit, duo anguli coalterni aequales erunt, angulusque extrinsecus angulo intrinseco sibi opposito aequalis, itemque duo anguli intrinseci ex alterutra parte constituti duobus rectis angulis aequales.*

quae quaeritur, *ab*, cuius corda *ab*. Quia igitur arcus *ab* est notus, erit corda eius *ab* nota, et lineae *ac* et *cb*, quia semidyametri dati circuli, notae. Ergo per 5^{am} huius sector *acb* erit notus, et per 11^{am} huius trigonus *acb* erit notus. Subtrahatur igitur trigonus de sectore, et residuum est porcio circuli inter arcum et cordam *ab* contenta.

17. Porcionis circuli seu figurae ovalis datorum arcuum inter duos se ipsos secantes contentae circulos aream perquirere. (Fig. 11.)

Sint duo circuli *afc*, cuius centrum *g*, et *abc*, cuius centrum *d*, in punctis *a* et *c* se intersecantes, ducanturque lineae *ag* et *gc*, *ad* et *dc*,

Fig. 11.

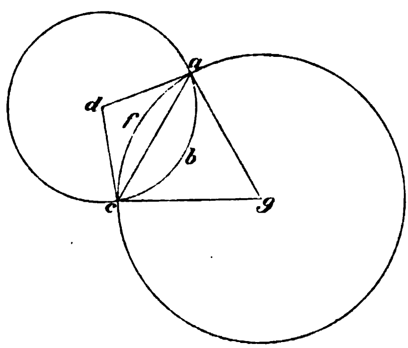
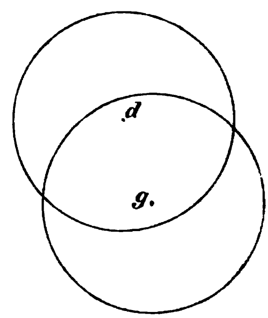
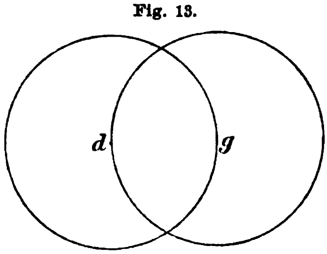


Fig. 12.



et linea *ac*. Quaerantur igitur per praecedentem areae duarum circuli portionum, scilicet *afc* et *abc*, quas *ac* corda mediat, et sic inventae simul iungantur, et area figurae ovalis *afcb* producitur. Unde (Fig. 12) manifestum est, si circuli aequales se intersecantes alter alterius arcum 132 graduum et 23 minutorum resecuerit, figura ovalis inter duos arcus praedictos inclusa erit fere medietas circuli cuiuslibet praedictorum. Et si (Fig. 13) duo circuli aequales se supra centra eorum 211' alterutri transeuntes intersecuerint, quilibet eorum aream inter alterutrius arcus inclusam continebit bis et fere 25 m^a.

Fig. 13.



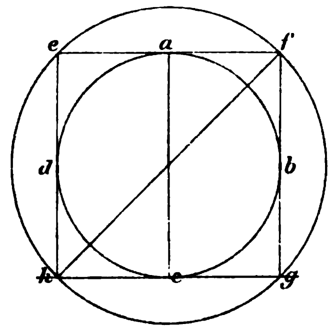
18. Dato circulo duplum circulum depingere. (Fig. 14.)

Sit circulus *abcd*, cuius dyameter *ac*, cui per 7^{am} quarti circumscribatur quadratum *cfgh*. Item per 9^{am} quarti Euclidis eidem quadrato

---

7. *ipsum*.

Fig. 14.

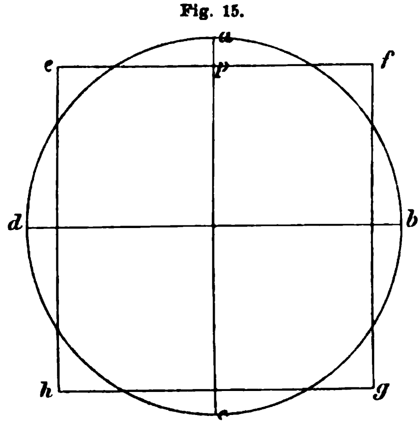


efgh transscribam circulum *efgh*. Quia igitur quadratum lineae *fh*, quae est dyameter circuli maioris, per penultimam primi est duplum ad quadratum lineae *fg*, quae est aequalis dyametro circuli minoris: ergo per 2^{am} duodecimi[26]) circulus, cuius dyameter est *fh*, est duplus ad circulum, cuius dyameter est *ca*.

19. Excessus quadrati datorum laterum ad circulum sibi inscriptum et e converso verisimiliter indagare. (Fig. 14.)

Sit quadratum *efgh* datorum laterum, cuius scias aream per 14^{am} huius. Deinde similiter scias aream circuli quadrato praedicto inscripti per quartam huius. Subtrahatur itaque unum ab alio, et habebitur intentum. Et similiter e converso, ut supra in figura, excessus quadrati inscripti ad circulum erit $\frac{8}{11}$ ipsius circuli.

Fig. 15.



20. Dato circulo quadratum aequale verisimiliter depingere. (Fig. 15.)

Sit circulus *abcd*, quam quadrabo duabus dyametris *ac* et *bd*, cuius dyameter ut 14, circumferencia 44 et area 154. Huius igitur areae quaeram radicem quadratam, et est 12 partes 24 m^a 35 2^a; et hoc est latus quadrati dato circulo aequalis, super quod si constituo quadratum per 45^{am} primi Euclidis,[27]) habeo, quod intendo. Si vero quadratum aequale circulo super idem centrum circuli depingere voluerim, radicem praedictam a toto dyametro demam, et residuum est 1 pars 35 m^a 25 2^a; cuius accipio medietatem, scilicet 47 m^a 42 2^a, quae sunt fere una 17^a, $\frac{1}{17}$ dyametri, et eam signabo in dya-

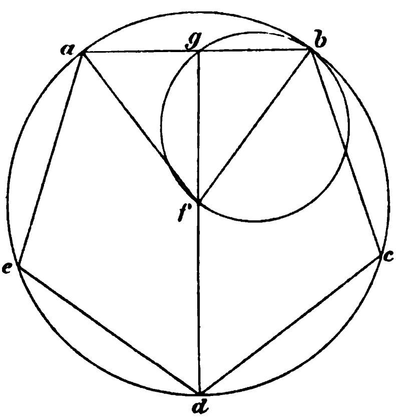
12. *per* 13^{am}. — 17. *circulum et* $\frac{3}{11}$·

26) Euclides IV, 7: *Circa propositum circulum quadratum describere.* — IV, 9: *Circa assignatum quadratum circulum describere.* — XII, 2: *Omnium duorum circulorum est proportio alterius ad alterum tanquam proportio quadrati suae diametri ad quadratum diametri alterius.*

27) Euclides I, 45: *Ex data linea quadratum describere.*

metro per lineam *ap*. Posito igitur *ap* synu verso, quaeram arcum eius per quartam primi Magistri de Lineriis,[28]) et habetur sic. Primum convertam eum in numerum, quo dyameter est 120 partes. Sit 14 primus numerus, et sinus praedictus, scilicet 47 m^a 42 2^a, secundus, et 120 tercius. Ducatur igitur secundus in tercium etc., et proveniunt 6 partes 48 m^a 51 2^a, quae sunt sinus versus praedictus secundum quantitatem, qua dyameter est 120 partes, cuius arcus est 27 gr^a 34 m^a. | A 212
qualibet igitur extremitate ambarum dyametrorum accipiam distanciam 27 graduum et 34 minutorum, prout circumferencia circuli est 360 partes, vel 3 partes et $\frac{1}{3}$ fere, prout circumferencia est 44 partes, quae sit verbi gracia *am* et *an*; et sic de aliis dyametrorum extremitatibus signando semper tales distancias per puncta. Deinde per illa puncta trahantur lineae rectae, donec extra circulum concurrant, et producitur quadratum, quod quaeritur. Unde constat, quod de qualibet dyametro in utraque eius extremitate resecabitur per costas quadrati minus $\frac{1}{17}$ et plus $\frac{1}{18}$ quasi per medium. Constat eciam triangulos et porciones circuli inter quadratum et circumferenciam circuli contentas sibi invicem esse aequales.

Fig. 16.



21. Figurarum poligoniarum datorum aequalium laterum, ut pentagoni, exagoni, ebdagoni etc. aream invenire. (Fig. 16.)

Notandum autem, quod omnis figurae poligoniae regularis, secundum quod vult Campanus[29]) commento 32^0 primi Euclidis, omnes anguli simul sumpti valent tot rectas, quot sunt | eius omnes anguli duplicati 212'
demptis inde quatuor.

---

3. *eam*

---

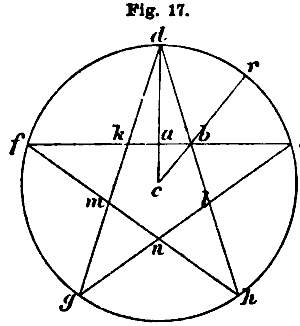
28) Das Werk des Magister de Lineriis, welches hier gemeint ist, kenne ich nicht. Es dürften vielleicht die *Canones primi mobilis* gemeint sein, welche am Anfange sich mit Trigonometrie beschäftigen.

29) In der berühmten Anmerkung des Campanus zu dem oben Anmerkung 23 angeführten Satze, welche die Sternpolygone behandelt, heisst es: *Similiter quoque patet, quod omnis figurae polygoniae anguli omnes extrinseci quatuor rectis angulis sunt aequales: sunt enim intrinseci et extrinseci bis tot rectis aequales, quot*

Esto igitur pentagonus *abcde*, cuius centrum *f*. A vicinis ergo angulis, scilicet *a* et *b*, ducam lineas *af* et *bf*, et a medio lineae *ab* lineam *gf*. Pentagoni igitur illius tocius omnes anguli simul sumpti valent sex rectos, ergo quilibet angulus eius singillatim valet unum rectum et $\frac{1}{5}$ unius; et medietas eius, scilicet angulus *fbg*, erit $\frac{1}{2}$ recti et $\frac{1}{10}$ eius, quod est $\frac{3}{5}$ unius recti, ergo reliquus angulus *bfg*, residuum unius recti, erit $\frac{2}{5}$ recti, cum angulus *g* sit rectus. Ergo per 30^{am} tercii Euclidis[30]) latus *fb* erit dyameter circuli circumscripti triangulo *fbg*. Et quia duo anguli recti in quolibet triangulo contenti valent 180 gr^a circuli sibi circumscripti, ergo per ultimam sexti Euclidis[31]) arcus *gf* habebit eciam $\frac{3}{5}$ de 180, scilicet 108, cuius corda 97 partes 5 m^a; et arcus *bg* habebit secundum hoc $\frac{2}{5}$, residuum scilicet de 180, quod est 72 gradus, cuius corda est 70 partes 38 m^a. Posito igitur, quod latus pentagoni sit ut 6, medietas eius *gb* erit ut 3, ergo secundum eandem proporcionem latus *fg* erit 4 partes et 8 m^a. Cum igitur duxeris *bg*, scilicet 3, in *gf*, scilicet in 4 partes et 8 m^a, producitur area trianguli *abf*, scilicet 12 partes et 24 m^a. Quae si quinquies accipies 62 proveniunt, area scilicet tocius, quod erat assumptum. Et per eundem modum de omnibus aliis figuris poligoniis aequilateris operare.

Si vero ex eis aliquae earum inaequalium laterum occurrant, prius in triangulos resolvantur, | deinde per undecimam huius operare.

Fig. 17.



22. Pentagoni Salemonis[32]) *aream invenire.* (Fig. 17.)

Sit igitur pentagonum Salemonis *fdehg*, cui circumscribam circulum *fdehg* super centrum *c*, et lineam *fe* dividam per medium in puncto *a*, et

7. $\frac{1}{5}$ *recti.* — *per* 3^{am} *tercii.* — 24. *decimam.*

habuerint angulos per 13 propositionem. Intrinseci autem sunt bis tot rectis aequales, quot habuerint angulos, demptis inde quatuor etc.

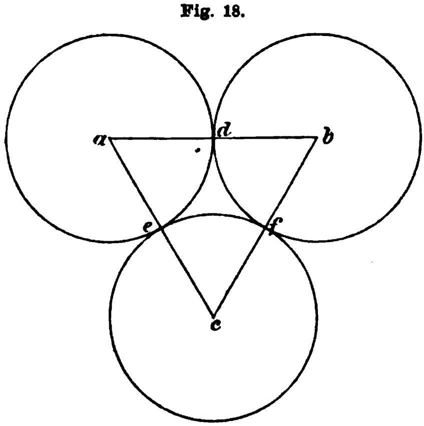
30) Euclides III, 30: *Si rectilineus angulus in semicirculo supra arcum consistat, rectus est.*

31) Euclides VI, 32: *Si in circulis aequalibus supra centrum sive supra circumferentiam anguli consistant, erit angulorum proportio tanquam proportio arcuum illos angulos suscipientium.*

32) In geometrischen Abhandlungen tritt uns hier wohl zuerst das Sternfünfeck als Salomonisches Fünfeck entgegen.

in punctis intersectionum laterum pentagoni iuxta *a* signabo *k*, *b*, dividamque arcum *de* per medium in puncto *r*, et protraham lineas *cb* usque ad *r* et *ca* usque ad *d*; igitur per terciam tercii Euclidis[33]) cadit perpendiculariter super *fe*, et quia arcus *de* est $\frac{1}{5}$ circuli, ipse erit 72 gr^{a}. Igitur sinus eius *ae* est 57 partes 4 m^{a} secundum quantitatem, qua semidyameter *ce* est 60 parcium. Ergo per penultimam primi Euclidis[34]) erit *ca* secundum eandem quantitatem 18 partes et 32 m^{a}. Quare eciam arcus *dr* per ypotesin est 36 gr^{a}, et angulus *acb* 36 gr^{a} similiter continebit, ergo sinus *ab* arcus circuli, cuius dyameter ymaginatur esse *cb*, est 35 partes 16 m^{a}, et angulus *abc*, qui est residuum recti, prout rectus continet 90 partes, est 64 partes, et sinus eius *ac* 42 p^{a} 32 m^{a} secundum quantitatem, qua est *cb* 60 partes. Ergo secundum quantitatem, qua *ca* sunt 18 p^{a} 32 m^{a} et *ae* 57 p^{a} 4 m^{a}, erit *ab* 13 p^{a} 28 m^{a}. Posita igitur semidyametro *cd* ut 7, erit *ca* 2 p^{a} 10 m^{a}, et *ad* 4 p^{a} 50 m^{a}, et *ab* secundum eandem quantitatem 1 p^{a} 34 m^{a}. Quia igitur *ab* et *ad* secundum quantitatem, qua semidyameter *dc* erit 7, sunt nota, erit per 11^{am} huius area trianguli *dkb* et cuiuslibet sibi comparium 7p^{a} 34 m^{a}, quibus quinquies sumptis exurgit area omnium triangulorum | sibi comparium pen- 213'
tagoni praedicti, scilicet 37 p^{a} et 50 m^{a}. Et quia *ab* est 1 p^{a} 34 m^{a}, erit *kb* 3 p^{a} 8 m^{a}, et quia *kblmn* pentagonus est aequilaterus, erit per praecedentem area eius 17 partes, cui si iungatur area triangulorum praedictorum, scilicet 37 p^{a} 50 m^{a}, 54 p^{a} 50 m^{a}, quae sunt tocius area praedicti pentagoni producuntur. Unde eciam constat proporcio circuli ad pentagonum ipsum circumscribentis.

Fig. 18.



23. Figurae curvilineae inter tres aut quotlibet circulos datos aequales se ipsos contingentes contentae aream invenire. (Fig. 18.)

Sit igitur triangulus curvilineus *def*, contentus inter tres circulos

---

13. *ac 47 p^{a} 4 m^{a}.*

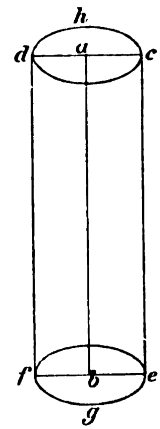
---

33) Euclides III, 3: *Si lineam intra circulum praeter centrum collocatam alia a centro veniens per aequa secet, orthogonaliter super eam insistere, et si in eam orthogonaliter steterit, eam per aequalia dividere necesse est.*

34) Euclides I, 46: Der pythagoreische Lehrsatz. Siehe oben Anm. 18.

aequales, scilicet *dc*, cuius centrum *a*; *ef*, cuius centrum *c*; et *fd*, cuius centrum *b*, et trahantur lineae rectae *ac*, *cb*, *ba*. Ergo per 11^am tercii Euclidis[35]) omnes tres lineae praedictae transibunt per puncta contactus circulorum, et per consequens per fines trianguli *def*. Quia igitur latera trianguli nota sunt, quia aequalia dyametris circulorum, et sit verbi gracia quilibet ut 14, ergo per 11^am huius area trianguli est 84. Deinde omnium trium sectorum latera sunt nota, arcus autem sic scientur. Angulos figurae per lineas inter centra circulorum tractas causatae dupla, et erunt verbi gracia in triangulo sex. De quibus deme quatuor, et remanent duo anguli recti, quos duos rectos divide per numerum angulorum figurae, scilicet per 3, et proueniunt cuilibet angulo trianguli $\frac{2}{3}$ unius recti. Et quia cuilibet angulo recto super centrum circuli constructi prout circumferencia cir-
4 culi est | 360, correspondent 90 gr^a, ergo $\frac{2}{3}$ unius recti correspondent $\frac{2}{3}$ de 90 gradibus, quae sunt 60 gr^a, et idem est arcus cuiuslibet sectoris. Prout autem circumferencia est 44 partes, uni recto correspondent 11 p^a, scilicet $\frac{1}{4}$ circuli, et duabus terciis recti correspondent 7 partes et $\frac{1}{3}$ unius. Igitur per ultimam sexti Euclidis[36]) quilibet arcus sectoris erit totidem, scilicet 7 partes et $\frac{1}{3}$ unius. Ergo per quartam huius area unius porcionis erit 25 p^a et 35 m^a, et omnium trium simul 76 p^a et 45 m^a. Dempta igitur area omnium sectorum de area trianguli remanent 17 p^a 15 m^a, quae sunt area figurae curvilineae *def*, quae quaerebatur.

Fig. 19.



24. Columpnae rotundae datorum basis et altitudinis aream invenire. (Fig. 19.)

Columpna rotunda, ut vult Euclides[37]) 11ma diffinicione undecimi, est transitus parallelogrammi rectanguli latere rectum angulum continente fixo ipsaque superficie, donec ad suum locum redeat, circumducta.

Columpnae datae basis circumferenciam, verbi gracia ut 44, duc in

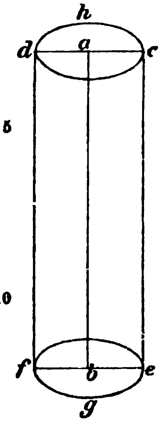
27. *lateris.*

35) Euclides III, 11: *Si circulus circulum contingat, lineaque per centra transeat, ad punctum contactus eorum applicari necesse est.*

36) Euclides VI, 32: Siehe Anm. 31.

37) Euclides XI, *Def.* 11: *Figura corporea rotunda, cuius bases sunt circuli duo plani extremitatibus et crassitudine, id est altitudine, aequales, est transitus parallelogrammi rectanguli latere rectum angulum continente fixo ipsaque superficie, donec ad locum suum redeat, circumducta. Diciturque haec figura columna rotunda.*

Fig. 19.



axem seu altitudinem columpnae, ut in 12, et per secundam Archimenidis[38]) provenit tota curva superficies columpnae, scilicet 528. Cui si areas duorum circulorum columpnae per quartam huius scitas adiunxeris, totalis superficies columpnae exurgit, scilicet 836.

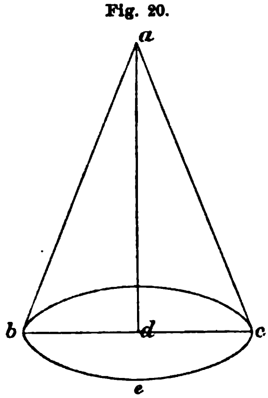
25. Columpnae rotundae datorum basis et altitudinis capacitatem seu crassitudinem invenire. (Fig. 19.)

Sit columpua ut prius, cuius basis *fge* verbi gracia 154, et altitudo *ba* ut 12. Duc igitur basim in eius altitudinem, et proveniunt 1848, quae sunt crassitudo columpnae praedictae.

Et de hiis columpnis rotundis et doleis et vasibus et eorum capacitatibus satis | prius dictum est in tractatu 211 collacionum de virga visoria, ideo hic non repetam illud.[39])

26. Piramidis rotundae basis circulo et eius ypotenusa datis aream invenire. (Fig. 20.)

Fig. 20.



Piramis rotunda est transitus trianguli rectanguli alterutro suorum laterum rectum angulum continencium fixo, donec ad locum, unde cepit, redeat, triangulo ipso circumducto. Haec Euclides[40]) sui 11°. Quid autem sit ypotenusa patet in hiis versibus:

Protracta linea basis est, erecta cathetus;
Tenditur ad fines ypotenusa duos.

Sit rotunda piramis *abc*, cuius sit basis nota, scilicet circulus *bec*, et similiter nota ypotenusa *ac*; et sit eius axis sive altitudo *ad*. Duc igitur circumferenciam circuli *bce* in altitudinem *ad*, et producti medietatem accipe, quia ipsa est id, quod quaeritur, addita ei area circuli basis per 4am huius nota. Si vero nescieris quantitatem altitudinis *ad*, duc medietatem dyametri circuli *bec*

5. *scilicet 836* fehlt.

38) Archimenides de curv. superfic. II: *Cuiuslibet columpnae rotundae curva superficies aequalis est tetragono, qui continetur sub lineis aequalibus axi columpnae et circumferenciae basis.*

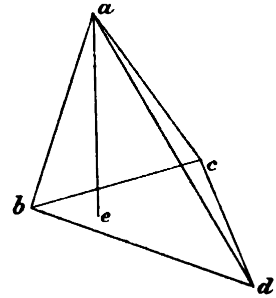
39) Unser Verfasser hat also auch eine Abhandlung *de virga visoria* geschrieben.

40) Euclides XI, *Def.* 10: *Pyramis rotunda est figura solida estque transitus trianguli rectanguli alterutro suorum laterum rectum angulum continentium fixo, donec usque ad locum, unde moveri coepit, redeat, triangulo ipso circumducto.*

in se, et similiter unam ypotenusarum in se, et subtrahe unum quadratum ab alio, et residui radix quadrata est ipsa altitudo.

27. Piramidis ortholateratae basi et ypotenusa datis aream inquirere. (Fig. 21.)

Fig. 21.



Istae piramidis lateratae sunt superficies plures triangulae. Ideo area illarum quaeratur per 11^{am} huius, et area basis per eandem vel 20^{am}, et omnia sic inventa simul iungantur, et constat propositum.

215 *28. Piramidis rotundae aut lateratae regularis* | *datae basis et altitudinis crassitudinem invenire.*

Duc superficiem basis eius in suam altitudinem, et provenit crassitudo columpnae basis praedictae. Cuius si $\frac{1}{3}$ acceperis, ipsa eadem $\frac{1}{3}$ erit crassitudo piramidis praedictae.

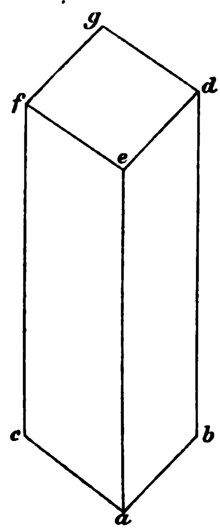
Patet per 9^{am} duodecimi Euclidis[41]) et per 12^{am} addicionis Campani[42]) ibidem.

29. Cubi et columpnae orthoquadrilaterae datorum laterum aream invenire. (Fig. 22.)

Age per 14^{am} huius et habebis intentum. Omnes enim horum superficies orthoparallelogrammi sunt.

30. Cubi et columpnae orthoquadrilaterae datorum laterum capacitatem invenire. (Fig. 22.)

Fig. 22.



Sit cubus seu columpna orthoquadrilatera *dbcf*, cuius basis orthoquadrangula nota per 14^{am} huius *defg*, altitudo vero *ea*. Duc igitur aream basis *defg* in altitudinem huiusmodi corporis, scilicet in *ea*, et producitur moles seu capacitas eius.

31. Solidi almuhaim seu sibi similis datorum laterum et angulorum aream invenire. (Fig. 23.)

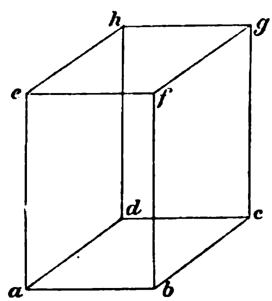
4—5. *circulo basis et ypotenusa.* — 7. *triangulos.* — 19—22. Finden sich im Manuscript zwischen § 39 und 40 eingeschoben. Siehe Einleitung. — 26. *per* 13^{am}.

---

41) Euclides XII, 9: *Omnis columna rotunda pyramidi suae tripla esse comprobatur.*

42) Es muss heissen: *per addicionem* 8^{ae} Campani *ibidem.* Dort heisst es nämlich: *Omnis laterata columna tripla est ad suam pyramidem.*

Fig. 23.



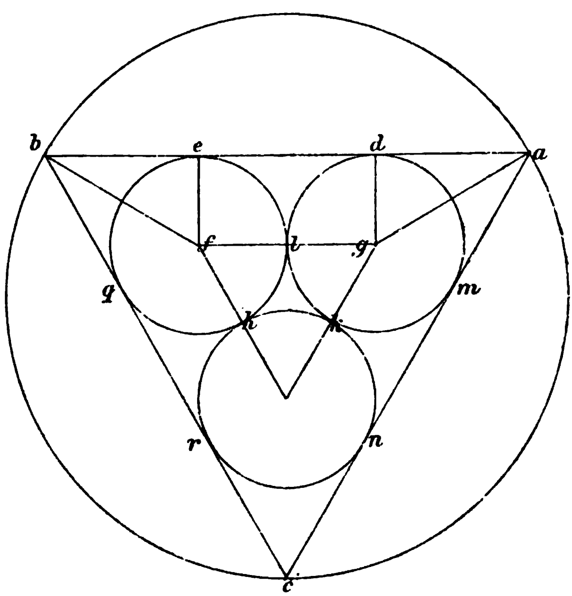
Primo duarum superficierum corporis supradicti almuhaicarum quaere aream per 15^{am} huius. Deinde aliarum superficierum quaere areas per 14^{am} huius, et eas omnes simul iunge, et habebis intentum.

Capacitatem autem eius seu molem vel crassitudinem scias sic. Postquam invenieris eius aream, ut praedicitur, duc aream basis eius in altitudinem eius, et productum est crassitudo eius, etc.

32. Trianguli aequianguli datis tribus circulis aequalibus se ipsos tangentibus iis circumscripti aream invenire. (Fig. 24.)

Sint tres dati circuli *dlk*, cuius centrum *g*; *elh*, cuius centrum *f*; et *hkn*, cuius centrum *p*, aequales se ipsos in punctis *l*, *k*, *h* tangentes, quibus circumscribatur triangulus aequilaterus *abc* eos in punctis *d*, *e*; *q*, *r*; *n*, *m* secundum sua latera contingens, cui triangulo circumscribam circulum *abc*. ¦ Dico, quod 215'
si noti fuerint circuli praedicti, notus erit et triangulus eis circumscriptus, unde manifesta erit ex hoc proporcio circuli magni praedicto triangulo circumscripti ad quemlibet circulorum parvorum triangulo inscriptorum. Ducantur lineae *ag*, *dg*, *fb*, *ef* et *fg*. Ergo per 17^{am} tercii Euclidis[43]) lineae *fe* et *gd* sunt perpendiculares ad lineam *ab*, et quia

Fig. 24.



---

2 *per 14am.* — 4. *per 13am.* — 28. *manifestum.*

43) Euclides III, 17: *Si circulum linea recta contingat, a contactu vero ad centrum linea recta ducatur, necesse est eam super lineam contingentem esse perpendicularem.*

arcus *bc* circuli *abc*, quia est tercia pars eius per ypotesin, est 120 gr^a, ideo per ultimam sexti Euclidis[43a]) angulus *bac* praedictum arcum suscipiens est eciam 120 gr^a, et medietas eius, scilicet angulus *gad*, est 60 gr^a. Ergo posita dyametro *ga* arcus *gd* erit eciam 60 gr^a, et corda eius *dg* erit similiter 60 gr^a. Ergo arcus, qui est super *da*, scilicet residuum de 180, erit 120 gr^a, et corda eius 103 partes et 55 minuta. Ergo secundum quantitatem, qua *gd* semidyameter est ut 7, erit linea *da* 12 p^a et 7 m^a. Patet posito *da*, scilicet 103 p^a 55 m^a, pro primo numero, *dg* ut 60 pro secundo, et *da* tercio incognito, et *dg* ut 7 quarto. Duc igitur primum in quartum et divide per secundum, et patet. Et eadem racione *bc* erit 12 p^a 7 m^a. Et quia *gf* per 11^{am} tercii vadit per contactum circulorum, scilicet punctum *b*; ipsa est duae semidyametri, ideo est 14; ergo per 33^{am} primi Euclidis[44]) erit *ed* eciam 14 partes. Quare tota linea *ab* erit 38 p^a 14 m^a secundum quantitatem, qua *gd* fuit 7 partes, et per consequens lineae *bc* et *ca* quaelibet earum erit similiter 38 p^a 14 m^a. Ergo per 11^{am} huius area trianguli *abc* erit 633 partes et 4 minuta
6 secundum partes, quibus area circuli *dlkm* est 154. | Cathetus enim huius trianguli est 33 p^a 7 m^a. Item per 13^{am} huius orthoparallelogrammum *efgd* est 98 partes, et per 5^{am} huius quilibet sectorum *efl* et *dlg* est 38 p^a et 30 m^a; qui si simul iuncti subtrahantur de orthoparallelogrammo *efgd*, remanet quantitas figurae curvilineae *eld* et cuiuslibet duarum sibi similium, scilicet *hqr* et *nkm*, 20 partes. Quilibet circulus *dmkl* fuit 154 partes; et per 22^{am} huius figura curvilinea *lhk* est 7 partes et 15 m^a. Quibus igitur hiis quatuor figuris curvilineis simul iunctis 67 p^a et 15 m^a producuntur. Nunc omnia simul a totali area trianguli, scilicet 633 p^a 4 m^a aufferantur, et 103 p^a 49 m^a remanebunt, quae per 3 parciantur, et 34 p^a 36 m^a, quae sunt quantitas cuiuslibet triangulorum, scilicet *adm*, *qbe* et *rnc*, producuntur, quod erat assumptum. Et quia arcus circuli magni *ab* est 120 gr^a, erit corda eius *ab* 103 . 55 secundum quantitatem, qua dyameter circuli *abc* est 120; ergo secundum quantitatem, qua linea *ab* fuit 38 p^a et 14 m^a et similiter circuli parvi *dg* 7 partes, erit dyameter circuli magni *abc* 43 p^a et 53 m^a. Patet posita dyametro circuli *abc* 120 pro primo numero, et corda *ab* 103 p^a 55 m^a pro secndo, et dyametro eadem priusquam ignota pro tercio, et *ab*, prout est 38 . 14,

---

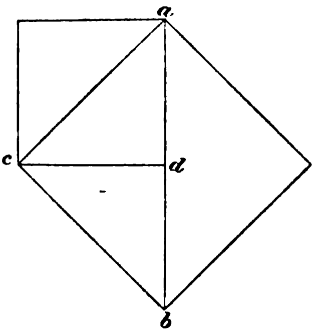
22. *scilicet lhg.* — 26. *et* fehlt.

43a) Euclides VI, 32: Siehe Anm. 31.

44) Euclides I, 33: *Si in summitatibus duarum linearum aequidistantium et aequalis quantitatis aliae duae lineae coniungantur, ipsae quoque aequales et aequidistantes erunt.*

pro quarto. Ducatur igitur primus in quartum et diuidatur per secundum etc. Ergo circumferencia circuli magni secundum eandem eius dyametrum iam inventam et secundum quantitatem, qua circumferencia circuli parvi *dmkl* est 44 partes, erit 138 partes et minutum unum. | Et secundum 215
hoc erit area eiusdem circuli magni *abc* 1514 partes et 33 m[a], quibus area circuli parvi *dmkl* est 154 partes. Nunc si aream trianguli *abc*, scilicet 633 p[a] et 4 m[a], de area circuli *abc*, scilicet de 1514 et 33 minutis, subtraxeris, et residuum, scilicet 881 et 29 minuta fueris in tres partes partitus, producetur 293 et 50 m[a], quod est cuiuslibet porcionis circuli extra triangulum relictae quantitas singillatim.

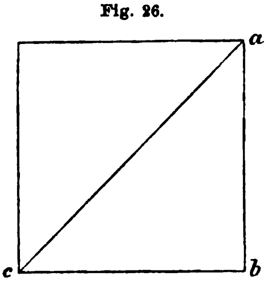
Fig. 25.



33. Dyametri quadrati ad costam esse medictatem duplae proporcionis ostendere. (Fig. 25.)

Sit quadratum *adb*, cuius dyameter *ab*. Quam dyametrum dividam per medium in puncto *c* et describam super hanc medietatem dyametri *ac* aliud quadratum minus *acd*, et quia proporcio *ab* ad *ac* est dupla per ypotesin, ergo *ab* ad *ad* est medietas duplae. Patet sic. Sicut se habet *ab* ad *ad*, sic se habet *ad* ad *dc* vel ad *ac*. Patet hoc per ultimam primi EUCLIDIS.[45]) Sed quia proporcio extremorum, scilicet *ab* ad *ac*, colligitur ex proporcionibus mediorum, scilicet ex *ab* et *ad* et ex *ad* ad *ac*, ut vult EUCLIDES[46]) per 19[am] diffinitionem septimi EUCLIDIS, et proporciones intermediae sunt continuae, ergo *ab* ad *ac* est medietas duplae, et similiter *ac* ad *dc* alia medietas duplae patet.

Fig. 26.



34. Dyametrum quadrati ad costam eiusdem secundum proporcionem racionabilem esse incommensurabilem demonstrare. (Fig. 26.)

Esto quadratum *abc*, cuius dyameter *ac* et costa *ab*. Dico, quod, qui-

30. *Dyametrorum.*

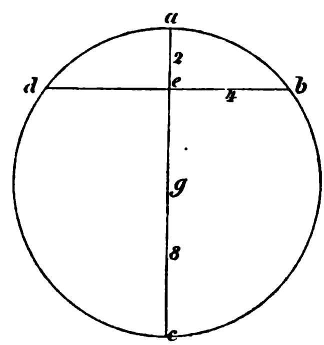
45) EUCLIDES I, 47: Dieser Satz, die Umkehrung des Pythagoras, hat hier jedenfalls mit dem Beweise nichts zu schaffen. Es kommt auch in dem Euclidischen Beweise nichts vor, was mit der Behauptung unseres Verfassers Aehnlichkeit hätte.

46) EUCLIDES VII, *Def.* 19: *Cum continuatae fuerint eaedem vel diversae proportiones, dicetur proportio primi ad ultimum ex omnibus composita.*

cumque numerus imponetur dyametro *ac*, nullus in universitate numerorum
217 numerus | dabitur costae *ab*, qui eum numeret secundum partes numeri *ac*. Sin autem sit, prout verbi gracia est dyameter *ac* 4, costa *ab* 3 est, non 4, neque 5, neque quicumque aequalis vel maior, quia esset contra 20^{am} primi elementorum Euclidis.[47]) Et quia per penultimam primi Euclidis[48]) quadratum dyametri est duplum ad quadratum costae, quadretur igitur dyameter, scilicet 4, et proveniunt 16; quadretur eciam costa, scilicet 3, et proveniunt 9. Ergo per eandem Euclidis[48]) penultimam primi 16 est duplum ad 9. Sed quia 16 est duplum ad 8, ideo per communem conceptionem, scilicet quaecumque uni et eodem sunt eadem, inter se sunt eadem, 9 et 8 erunt aequalia, scilicet superhabundancia erunt aequalia.

35. *Sit circulus abcd, cuius sinus versus ae ut 2, et sinus rectus eb ut 4, et volueris scire residuum dyametri, scilicet lineam ec,* multiplica sinum rectum, scilicet 4, per se, et proveniunt 16, et divide per sinum versum, scilicet per 2, et proveniunt 8, et illud est linea *ec*. (Fig. 27.)

Fig. 27.



Si vero sciveris *ec* et *ae*, et volueris *eb*, tunc multiplica *ec* per *ae*, et residui extrahe radicem, et provenit *eb*. Et per primam partem poteris cognoscere altitudinem turris, si funis dimissus fuerit ad infra facta parte circuli cum fune etc.

36. *Si circulum in sex partes aequales diviseris, quod fit non mutato circino*, dum praedictum circinasti, et unam sextam in duas partes aequales diviseris, et a centro
217′ circuli ad illam medietatem lineam ¦ duxeris, et aliam lineam intersecantem primam a proximis punctis divisionum feceris; dico, quod linea, quae est a centro usque ad intersectionem, est latus eptagonii circulo praedicto inscripti. Verbi gracia sit in circulo exagonus *abcdef*, cuius centrum *g*. Dividatur ergo latus *ab* in duo media in puncto *h*, et ducatur linea *gh*: dico quod ipsa est latus eptagonii praedicto circulo inscripti. (Fig. 28.)

---

15. *rectum, scilicet per 4 et proveniunt.*

---

47) Euclides I, 20: *Omnis trianguli duo quaelibet latera simul iuncta reliquo sunt longiora.*

48) Euclides I, 46: Der Pythagoras. Siehe Anm. 18 u. 34.

Et si a sexta parte circuli subtraxeris unam terciam $\frac{1}{3}$ illius sextae, remanebit arcus nonagoni; et si $\frac{2}{5}$, remanebit arcus lateris decagoni.

37. Et si volueris habere latus octogoni, subtrahe de sexta parte circuli prius habita $\frac{1}{4}$ eius, et residuum est arcus lateris octogoni.

Si vero curiosius velis invenire latus octogoni eciam praeter circulum, forma quadratum *abcd*, in quo trahe dyametrum *ac*, cuius medietas sit

Fig. 28.

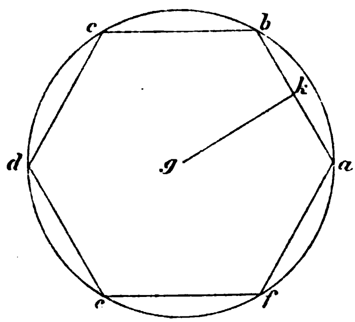
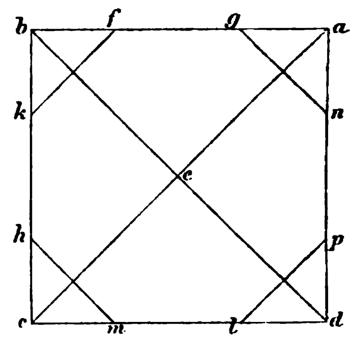
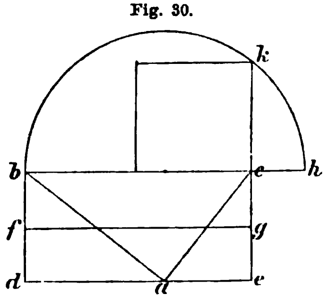


Fig. 29.



ae. Accipe igitur de linea *ab* secundum quantitatem *ae*, et sit linea *af*; et similiter de linea *ba*, quae sit *bg* et *bh*; et *ck* et *cl*; et *dm* et *dn*; et *ap* omnes sint aequales medietati dyametri *ae*. Tunc trahe lineas *fk*, *hm*, *lp*, *ng*, etc.: dico igitur, quod haec figura *fkhmlpng* est octogonus aequilaterus aequiangulus. (Fig. 29.)

Fig. 30.



38. Dato trigono aequum quadratum describere. (Fig. 30.)

Sit trigonus *abc*. Ducam lineam *de* aequalem et aeque distantem *be* et coniungam *bd* et *ec*; ergo per quadragesimam primam primi Euclidis[49]) parallelogrammum *bced* est duplum ad trigonum *abc*, ergo medietas parallelogrammi *bcgf* est aequalis trigono *abc*. Huius ergo parallelogrammi | *bcgf* quaeratur 218 latus tetragonicum sic. Lateri *bc* adiungam in continuum et directum lineam *ch* aequalem *ge*, et facta dyametro *bh* et centro in medio eius

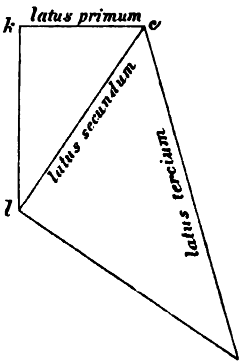
1—4. In der Hdschr. ist Z. 3—4 vor 1—2 gesetzt. Der Fortsetzung halber habe ich die Reihenfolge umgekehrt. — 16. *primam* fehlt: es ist vor *primi* ausgefallen. — 22. *ch* fehlt.

49) Euclides I, 41: Siehe Anm. 17.

circinabo semicirculum *bkh* et producam *ck*: dico igitur, quod linea *ck* est latus tetragonicum parallelogrammi *bcgf*, et per consequens trianguli *abc*.

39. Si vero velis latus tetragonicum duorum vel trium vel plurium triangulorum, vel parallelogrammorum, tunc expedies te de primo, ut dictum est, et sit illud latus verbi gracia, ut prius, *ck*. Deinde de secundo expediens ipsum prioris extremitate orthogonaliter in directo coniunge, quod verbi gracia sit *kl*, et protrahe lineam *cl*, et ipsa erit latus tetragonicum amborum triangulorum. (Fig. 31.)

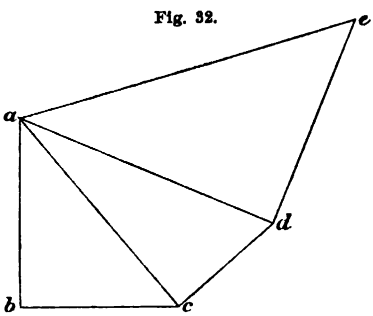
Fig. 31.



Si vero volueris latus trium triangulorum vel parallelogrammorum, tunc invento latere tercii per modum iam dictum ipsum lateri iterum orthogonaliter coniunge, quod sit verbi gracia *lm*. Deinde duc lineam *cm*, et ipsa est latus tetragonicum omnium trium triangulorum vel parallelogrammorum, de quibus operatus fueris.

40. Datae figurae rectilineae cuiuscumque latus tetragonicum invenire. (Fig. 32.)

Fig. 32.



Latus tetragonicum dicitur illud, quod, si in se ducatur, constituit quadratum aequale figurae datae.

Si igitur data figura rectilinea fuerit multiangula, ipsam, ut facit Campanus in commento 32ae primi Euclidis,[50]) aut secundum quod tibi figura ostendit, in triangulos ductis hincinde ab angulis eius lineis resolve, et cuiuslibet trianguli per ultimam secundi Euclidis[51]) quadratum aequale singillatim quaere, quia quodlibet latus quadrati huiusmodi est latus tetragonicum trianguli illius, cui quadratum aequale invenisti. Dum igitur omnium triangulorum, in quos data figura fuit resoluta, sicut praedicitur, scilicet cuiuslibet singillatim, latus tetra-

---

17. Hier ist im Mscpt. der oben als § 29 abgedruckte Abschnitt eingefügt. — 27. *inter angulos.*

---

50) Campanus *ad* Euclidis I, 32: Es zerlegt hier Campanus die Vielecke entweder durch Diagonalen, oder durch Radien bei regulären Vielecken, in Dreiecke. Hierauf verweist unser Verfasser.

51) Euclides II, 14: Siehe Anm. 16.

gonicum inveneris, ea in unum latus tetragonicum omnia sic convertas. Sit verbi gracia latus primi *ab*, secundi *bc*, tercii *cd*. Igitur applicabo *bc* orthogonaliter cum *ab* et protraham lineam *ac*; ergo per penultimam[52]) primi Euclidis latus *ac* est latus tetragonicum primi et secundi triangulorum. Deinde iterum cum linea *ac* coniungam orthogonaliter lineam *cd*, et protraham lineam *ad*, et per eandem eiusdem erit linea *ad* latus trium triangulorum etc., si plures habueris. Et latus ultimo repertum est latus tetragonicum figurae datae, quod latus si quadraveris, habebis quadratum figurae datae aequale.

COMMENTAR.

Die im Vorstehenden abgedruckte Abhandlung dürfte als eine werthvolle Bereicherung unserer Kenntnisse über das Wissen der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts auf dem Gebiete der Geometrie erkannt werden. Ihren Verfasser zu ergründen ist mir bisher nicht möglich gewesen. Ob es etwa der Schreiber der Handschrift *Magister* Rheinhardus de Vurm gewesen, muss unentschieden bleiben. Jedenfalls ist derselbe auch in der Trigonometrie ganz wohl bewandert. Meinen Commentar will ich in der Art durchführen, dass ich ihn an die einzelnen Paragraphen anschliesse. Wo eine Erklärung nicht nöthig ist, setze ich nur die von dem Verfasser benutzte Formel hin.

In der Einleitung erklärt der Verfasser zunächst den Unterschied der in dem Worte *capacitas* liegt je nachdem es Fläche oder Volumen bedeutet. Von Interesse ist die Fülle von Ausdrücken für Fläche, der nur ein solcher für körperlicher Inhalt gegenübersteht. Eigenthümlich muthet es uns jetzt an, dass von dem Kreise als einfachster Figur, da sie nur von *einer* Linie begrenzt sei, der Ausgangspunkt genommen wird. Verfasser bezieht sich dabei auf den Pentateuch des Moses, doch kann ich die Stelle, welche er meinen könnte, nicht auffinden.

§ 1. *Die Auffindung des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises* wird mit unbedeutender Aenderung nach Euklid III, 1 gegeben, also nicht durch Durchschnitt zweier Mittelsenkrechten von Sehnen, sondern dadurch, dass man eine solche zum Durchmesser erweitert und diesen dann halbiert. Der bei Euklid vorhandene Beweis wird hier dem Campanus zugeschrieben, wie allgemein im Mittelalter nur die Lehrsätze als Euklid gehörig betrachtet

---

1. *eam.*

---

52) Euclides I, 46: Der pythagoreische Satz. Siehe Anm. 18, 34, 48.

und die Beweise etc., das *commentum*, wie man sagte, als Campano gehörig angesehen wurden.

§ 2. *Bestimmung des Umfanges eines Kreises von gegebenem Durchmesser.* Dem Verfasser ist $3\frac{1}{7}$ der genaue Werth von π, was um so eigenthümlicher ist, als die aus dem Buche der drei Brüder angezogene Stelle denselben deutlich nur als Näherungswerth erkennen lässt. Die Wahl des Durchmessers gleich 14 ist, soweit ich die entsprechende Litteratur kenne, allen Autoren des Mittelalters gemeinsam, sobald es sich um ein Beispiel handelt.

§ 3. Die umgekehrte Aufgabe *bei gegebenem Umfang den Durchmesser zu bestimmen.* Hier wird π in der Form $\frac{22}{7}$ benutzt.

§ 4. *Die Fläche des Kreises zu bestimmen.* Sie wird nach den drei Brüdern gleich Halbmesser mal halben Umfang gesetzt. Für das Folgende ist festzuhalten, dass für den Durchmesser 14 der Umfang 44, die Fläche 154 wird. Nur diese und keine andern Werthe werden benutzt.

§ 5. *Fläche des Kreisausschnittes, wenn der Bogen bekannt ist.* Verfasser benutzt die Proportion $U : \alpha = J : S$, welche er dem Almagest des Ptolemaeus VI, 7 entnimmt. Letztere Stelle wird zu ähnlichem Zwecke in mittelalterlichen Schriften häufiger angewendet. Die Figur deckt sich hier nicht mit dem Beispiel, das den Viertelkreis gleich $38\frac{1}{2}$ berechnet.

§ 6. *Oberfläche der Kugel zu bestimmen, wenn der grösste Kreis gegeben ist.* Das ist zugleich wenn der Durchmesser gegeben ist, da in § 4 gesagt wurde, der Kreis sei gegeben, wenn sein Durchmesser bekannt sei. Wunderbar ist jedenfalls, dass hier *planities* statt *superficies* gesagt ist, das unpassendste Wort, das gewählt werden konnte. Die Fläche ergiebt sich als das Vierfache des grössten Kreises. Spätern Gebrauches halber wird aber auch darauf hingewiesen, dass man auch Durchmesser mal Umfang des Hauptkreises rechnen könne.

§ 7. *Den Körperinhalt der Kugel zu berechnen*, oder wie der Verfasser sich ausdrückt *einen gegebenen Kreis körperlich machen* (*incrassare*). Es ist diese Ausdrucksweise, welche unseres Wissens zuerst bei Gerbert auftritt, im Mittelalter ausnahmslos gebraucht. Adelbold spricht von *crassitudo sphaerae*, was klassisch ist, da *crassitudo* als Körperinhalt sich schon bei Cicero findet. Nach der mittelalterlichen Bearbeitung des Buches *de cono et cylindro* des Archimedes, welche sich in mehreren Handschriften erhalten hat, wird $v = \frac{11}{21} d^3$ gerechnet, was wieder auf $\pi = \frac{22}{7}$ führt.

§ 8. *Ein Rechteck zu bestimmen, welches das Vierfache eines gegebenen Kreises ist.* Unter Benutzung der zweiten Betrachtung des § 6 wird ein

Rechteck aus dem Durchmesser und dem Umfang construiert, welches nach der ersten Art von § 6 viermal so gross ist als der Kreis. Durch Parallelen zu der längern Seite theilt der Verfasser dasselbe in vier gleiche Theile und fügt nun hinzu, dass, wenn man diesen vierten Theil in ein Quadrat verwandele, man damit den Kreis quadriert habe. Zugleich setzt er die $\sqrt{154} = 12,41$ um eine Kleinigkeit zu gross. Er rechnet es in Sexagesimalbrüche um zu genau 12 . 24 . 36. Bei späterer Anwendung jedoch nimmt er die Wurzel zu 12 . 24 . 35.

§ 9. Nachdem die vom Kreise abhängigen Figuren vorläufig zu Ende sind, beginnt jetzt das Dreieck, trotzdem auch hier das Rechteck die einfacher zu berechnende Figur ist.

Zunächst in diesem Paragraph das rechtwinklige Dreieck. Sind die Katheten a, b gegeben, so ist $J = \frac{ab}{2}$. Ist dagegen c, a gegeben, so findet sich $J = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{2}$, das Letzte durch den Pythagoras bewiesen.

§ 10. *Im spitz- und stumpfwinkligen Dreieck die Höhe zu finden.* Zunächst Erklärung der Höhe. Im rechtwinkligen Dreieck ist diese Berechnung unnöthig, da jede der beiden Katheten als Höhe betrachtet werden kann. Verfasser geht von der Formel aus, dass, wenn c einem spitzen Winkel gegenüber liegt, $c^2 = a^2 + b^2 - 2bp$, wo p die Projection von a auf b ist. Er zieht daraus die Folgerung $p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$, dann ist $h = \sqrt{a^2 - p^2}$.

Das Beispiel ist auf das rechtwinklige Dreieck 6, 8, 10 angewendet. Natürlich wird die Höhe auf 10 gesucht. Der Verfasser rechnet nun so. Es ist $64 + 100 = 164$, davon 36 abgezogen giebt 128. Das ist also $2bp$. Folglich ist $p = 6\frac{2}{5} = 6 \cdot 24$. Davon das Quadrat ist $40 \cdot 57 \cdot 36$, was auf $40 \cdot 58$ abgerundet wird, da nur ausnahmsweise mit zweiten Sechszigsteln gerechnet wird. $a^2 - p^2$ ist also $64 - 40 \cdot 58 = 23 \cdot 2$, folglich $h = \sqrt{32 \cdot 2} = 4 \cdot 48$, wo die Wurzel wieder um eine Kleinigkeit zu gross angenommen ist. Dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, ist dem Verfasser entgangen.

Aus der zweiten Art folgt, dass, unter Bezeichnung des Halbierungspunktes von ac durch e, dem Verfasser bekannt ist, dass $de = \frac{p-q}{2}$ ist. Seine zweite Rechnung kommt eben darauf zurück, dass $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ ist, und man also $p - q$ erhält, wenn man $a^2 - b^2$ durch $p + q = ac$ dividiert. Durch Addition von $\frac{1}{2}ac$ erhält er dann p genau wie oben. Es ergiebt sich nämlich $de = 1\frac{2}{5}$, also $p = 6\frac{2}{5}$ wie vorher.

§ 11. *Die Fläche eines beliebigen Dreiecks zu berechnen.* Es ist $J = \frac{g \cdot h}{2}$. Das Beispiel lautet $c = 5$, $a = 8$, $b = 10$. Hier ist wieder $a^2 + b^2 = 164$, also $a^2 + b^2 - c^2 = 139$, daher $p = 6 \cdot 57$, $p^2 = 48 \cdot 18$. also $a^2 - p^2 = 15 \cdot 42$, und daher $h = 3 \cdot 58$, wiederum eine Kleinigkeit zu gross. Der doppelte Inhalt ist also $39 \cdot 40$, und daher $J = 19 \cdot 50$.

§ 12. Aus diesem Paragraphen folgt, dass unser Verfasser eine Abhandlung über Trigonometrie geschrieben haben muss unter dem Titel *De triangulis* oder *De triangulorum noticia.* Vielleicht lässt sich einst durch Auffindung eines ähnlichen Werkes der Verfasser näher bestimmen, Dass ihm Trigonometrie eine ganz bekannte Sache war, werden wir in den spätern Paragraphen sehen. Die beiden Fälle freilich, welche

§ 13 behandelt, sind nicht dazu angethan, das, was ich eben sagte, zu beweisen. Zunächst will dieser Paragraph aus den Seiten die Winkel durch folgende Proportionen bestimmen.

$$(a^2 + b^2 + c^2) : a^2 : b^2 : c^2 = 2R : \alpha : \beta : \gamma.$$

Wie man auf diese Idee verfallen ist, welche nur für das gleichseitige Dreieck richtig wäre, ist kaum zu ergründen. Ich habe sie jedoch auch bei andern Autoren angetroffen.

Die Berechnung der Seiten aus den Winkeln ist natürlich so zu verstehen, dass dem umgeschriebenen Kreise ein bekannter Durchmesser verliehen wird, etwa der, für welchen unser Verfasser eine Sehnentafel besitzt, d. h. 120.

§ 14. *Inhalt des Rechtecks.* Nach der Formel $J = ab$. Nach allen Kreis- und Dreiecksberechnungen also jetzt erst das Rechteck

§ 15. *Inhalt des Rhombus (Almuhaim) und des Rhomboids (similis Almuhaim).* Verfasser berechnet die Höhe des Rhombus und verwandelt mit Hilfe derselben den Rhombus in ein Rechteck. Er erhält so $J = gh$.

Die Höhe aber findet er so. Er benutzt die Cordentafel des Almagest I, 11. Beschreibt er um das durch eine Seite und die Höhe gebildete rechtwinklige Dreieck den Kreis, so ist die Seite Durchmesser und, weil der Winkel des Rhombus gegeben ist, so kennt er auch den zu dem Winkel gehörigen Bogen dieses Kreises, also nach der Sehnentafel auch die zugehörige Sehne h, wenn er die Seite des Rhombus zu 120 annimmt. Ist aber die Seite a, so findet er h aus der Proportion 120: der gefundenen Sehne $= a : h$. In seinem Beispiele ist die Seite $= 6$, der Winkel des Rhombus $= 60^0$. Der zu diesem Winkel zugehörige Bogen ist 120^0, welchem nach der Sehnentafel eine Sehne von $103 \cdot 55$ entspricht — die 23 zweiten Sechszigstel vernachlässigt er —, also ist für den Durchmesser $d = 6$ die

Höhe h nahezu 5 · 12. Multiplikation mit der Seite des Rhombus liefert dann den Inhalt zu 31 · 12.

Beim Rhomboid ist in derselben Weise vorzugehen.

Durch Congruenz von Dreiecken zeigt Verfasser am Schlusse noch, weshalb der Rhombus mit dem construirten Rechteck inhaltsgleich sein muss.

§ 16. *Die Fläche eines Kreisabschnittes bei gegebenem Bogen zu bestimmen.* Nach Erklärung des Kreisabschnittes geht Verfasser so vor. Nach § 5 kann man den Kreissektor berechnen und, weil nach der Sehnentafel die Sehne des gegebenen Bogens bekannt ist, nach § 11 auch das von dieser und den beiden Radien gebildete Dreieck. Die Differenz beider Flächen ist der gesuchte Inhalt des Abschnittes. Man sieht also, dass nur der kleinere Abschnitt berechnet wird. In andern Abhandlungen wird zwischen *portio minor* und *portio maior* unterschieden. Die *portio maior* wird dann gefunden, indem man die *portio minor* von der Kreisfläche abzieht.

§ 17. *Anwendung des vorhergehenden Paragraphen zur Bestimmung des gemeinsamen Stückes zweier sich schneidender Kreise.* Angenommen wird natürlich, dass von beiden Kreisen die abgeschnittenen Bogen, beziehungsweise Centriwinkel gegeben sind. Da nach vorigem Paragraph von jedem Kreise der Abschnitt berechnet werden kann, welcher durch die gemeinsame Sehne entsteht, so giebt die Summe beider Abschnitte das gesuchte linsenförmige Stück. Verfasser behauptet dabei 1. dass, wenn bei gleichen Kreisen der jeweils abgeschnittene Bogen $132^0\ 23'$ beträgt, die gesuchte Figur nahezu die Hälfte jeder Kreisfläche darstelle und 2. dass, wenn ebenfalls bei gleichen Kreisen der Mittelpunkt eines jeden auf der Peripherie des andern liegt, jeder Kreis ungefähr das $2\frac{5}{12}$fache des linsenförmigen Stückes sei. Wir untersuchen seine Behauptung im Folgenden. Der im Kreise vom Durchmesser 14 zu $132^0\ 23'$ gehörige Sektor ist auf 60tel genau 56 · 38. Nach der Sehnentafel des Almagest ist die Sehne des Bogens von $132^0\ 23'$ gleich 109 · 47 für den Radius 60 oder den Durchmesser 120, also für den Radius 7 gleich 12 · 53. Daher ist die Höhe des Dreiecks $\sqrt{49 - (6 \cdot 26)^2} = \sqrt{7 \cdot 37} = 2 \cdot 46$. Daher der Inhalt des Dreiecks $2 \cdot 46 \times 6 \cdot 26 = 17 \cdot 48$, so dass für jeden Abschnitt $56 \cdot 38 - 17 \cdot 48 = 38 \cdot 50$, also für das linsenförmige Stück 77 · 40, das heisst nahezu die Hälfte von 154 herauskommt.

Im zweiten Falle ist der Bogen natürlich 120^0, also jeder Sektor $= 51 \cdot 20$. Die zugehörige Sehne für $r = 60$ ist 103 · 55, also für $r = 7$ gleich 12 · 7. Da hier die Höhe jedesmal 3 · 30 sein muss, so ist die Summe der beiden abzuziehenden Dreiecke gleich $12 \cdot 7 \times 3 \cdot 30 = 42 \cdot 25$, also bleibt von dem doppelten Sektor 102 · 40 für den Meniscus 60 · 15

übrig. Nun ist aber $60 \cdot 15 \times 2 \cdot 25$ nur $= 145 \cdot 30$, also hat hier der Verfasser sich geirrt. Vielleicht hat er für 145 gelesen 154, oder es muss 33 *minuta fere* heissen.

§ 18. *Einen Kreis zu construiren, welcher das Doppelte eines gegebenen ist.* Verfasser beschreibt um den gegebenen Kreis das Quadrat und dann wieder um dieses Quadrat den Kreis. Dieser Kreis ist der gesuchte.

§ 19. *Den Ueberschuss des umgeschriebenen Quadrates über den Kreis und des Kreises über das eingeschriebene Quadrat zu bestimmen.* Man braucht nur die nach früheren Paragraphen berechenbaren Werthe der einzelnen Flächen zu suchen und in geeigneter Weise von einander zu subtrahieren. Für $\frac{3}{11}$ müsste eigentlich $\frac{2}{7}$ stehen, beide Brüche sind aber nahezu gleich.

§ 20. *Das Quadrat zu construiren, welches näherungsweise dem Kreise gleich ist.* Schon in § 8 ist die $\sqrt{154} = 12 \cdot 24 \cdot 35$ gefunden. Das Quadrat über dieser Geraden ist das gesuchte. Nun aber will Verfasser das Quadrat so construiren, dass es mit dem Kreise denselben Mittelpunkt hat. Zu dem Ende zieht er $12 \cdot 24 \cdot 35$ von dem Durchmesser 14 ab, und erhält $1 \cdot 35 \cdot 25$. Nimmt er nun die Hälfte davon, das ist $0 \cdot 47 \cdot 42$, auf jeder Seite des Durchmessers ab, so erhält er so die Seite des gesuchten Quadrates. Das Abgezogene ist aber nahezu $\frac{1}{17}$ des Durchmessers, oder wie später gesagt wird zwischen $\frac{1}{17}$ und $\frac{1}{18}$. Nimmt man $\frac{1}{18}$, so erhält man für π den Aegyptischen Werth $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, bei $\frac{1}{17}$ kommt $\left(\frac{30}{17}\right)^2$. Man sieht also, dass der bei den Aegyptern bekannte Werth auch auf den Werth $\pi = 3\frac{1}{7}$ zurückführt. Um aber die Construction genauer zu erhalten geht Verfasser weiter so vor: $0 \cdot 47 \cdot 42$ ist der Sinus versus des halben durch die Quadratseite vom Kreise abgeschnittenen Bogens, wenn der Radius $= 7$ ist, ist aber der Radius 60, so ist der Sinus versus entsprechend $6 \cdot 48 \cdot 51$. Für einen Durchmesser $= 120$ ist der Bogen $27^0\ 34'$, wobei der Kreis in 360^0 getheilt ist. Das ist nahezu $3\frac{1}{8}$, wenn, wie hier, der Umfang 44 Theile hat. Nun trägt er von zwei auf einander senkrechten Durchmessern aus diese Stücke auf dem Umfange ab, und verbindet je zwei benachbarte Punkte durch gerade Linien, welche sich ausserhalb des Kreises schneiden, so ist damit die Aufgabe gelöst.

Am Schlusse macht Verfasser die richtige Bemerkung, dass die ausserhalb des Kreises liegenden dreieckigen Stücke des Quadrates genau so gross sein müssen als die ausserhalb des Quadrates liegenden Kreisabschnitte.

§ 21. *Die Flächen regulärer Vielecke zu berechnen.* Wie das zu machen, wird an dem Beispiel des regelmässigen Fünfeckes gezeigt. Da nach

Campanus im bekannten Scholium zum 32. Satze des ersten Buches von Euklid in jedem Vielecke die Summe der Winkel gleich $2n - 4$ Rechten ist, so ist im Fünfeck diese Summe gleich 6 Rechten, also im regelmässigen Fünfeck jeder Winkel $1\frac{1}{5}$ Rechte. Zerlegt er nun das Fünfeck durch Radien vom Mittelpunkte aus in gleichschenklige Dreiecke und zieht in einem derselben die Höhe, so ist jeder Basiswinkel $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$ Rechten, und der von einem Radius und der Höhe gebildete Winkel daher $= \frac{2}{5}$ Rechten. Also lässt sich, da das Dreieck rechtwinklig ist, um dasselbe ein Kreis beschreiben, und es ist folglich der zu $\frac{3}{5}$ Rechten gehörige Bogen $= 108^0$, und seine Sehne nach der Sehnentafel $97 \cdot 5$; der zu $\frac{2}{5}$ gehörige Bogen ist ebenso $= 72^0$ und seine Sehne $= 70 \cdot 33$. Ist nun die Seite des Fünfecks $= 6$, so ist seine Hälfte gleich 3, und diese entspricht der Sehne $70 \cdot 33$. In demselben Verhältnis entspricht daher der Sehne $97 \cdot 5$, d. i. der Höhe des Dreiecks, nahezu $4 \cdot 8$. Die Fläche eines der fünf Dreiecke ist daher $3 \times 4 \cdot 8 = 12 \cdot 24$, und folglich ist die Fläche des Fünfecks selbst $= 5 \times 12 \cdot 24 = 62$.

Ist jedoch das Vieleck nicht regelmässig, so zerlegt man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke und berechnet jedes nach § 11 einzeln. Die Summe aller ist dann die gesuchte Fläche des Vielecks.

§ 22. *Die Fläche des regelmässigen Sternfünfecks* (**Pentagonum Salomonis**) *zu bestimmen.* Der Verfasser beschreibt um das Sternfünfeck den Kreis und halbiert eine Seite des Fünfecks fe in a, er nennt die beiden Schnittpunkte dieser Seite durch die andern Seiten k, b und zieht ca, c ist der Mittelpunkt, so wie cb. Dann steht erstens ca senkrecht auf fe und geht durch den dritten Eckpunkt d des Fünfecks, cb aber halbiert den Bogen de in r. Nun ist der Bogen $de = 72^0$, folglich dessen Sinus $ae = 57 \cdot 4$, wenn ce, der Halbmesser des Kreises, $= 60$ gesetzt wird; ca erhält man nun nach dem Pythagoras $= \sqrt{60^2 - (57 \cdot 4)^2} = 18 \cdot 32$. Bogen dr ist 36^0, also auch $\sphericalangle\, acb = 36^0$. Für $cb = 60$ ist also ab, der Sinus dieses Winkels, $= 35 \cdot 16$ und ac, der Sinus des Complementes von 54^0, ist $42 \cdot 32$. Nach dem Verhältnis aber, nach welchem $ca = 18 \cdot 32$ und $ce = 57 \cdot 4$ war, ist $ab = 13 \cdot 28$. Nimmt man jetzt den Radius des Kreises $= 7$, so erhält man $ca = 2 \cdot 10$ also $ad = 4 \cdot 50$, $ab = 1 \cdot 34$, immer auf ganze Minuten abgerundet. Die Fläche des Dreiecks kbd ist also $1 \cdot 34 \times 4 \cdot 50 = 7 \cdot 34$; alle 5 ähnlichen Dreiecke zusammen sind daher $5 \times 7 \cdot 34 = 37 \cdot 50$. Nun ist die Seite des innern regelmässigen Fünfecks $kb = 2ab = 3 \cdot 8$, also nach dem vorigen Paragraph seine Fläche $= 17$ (was um eine Kleinigkeit zu klein ist). Die Gesammtfläche des

Sternfünfecks ist folglich 54 · 50. Der Kreis ist daher fast um 100 grösser als die Fläche des eingeschriebenen Sternfünfecks. Hier hat der Verfasser also eine Sinustafel benutzt. Ob Magister JOHANNES DE LINERIIS eine solche berechnet hat, den er oben für den Sinus versus in Anspruch nahm? Oder hat er die Peurbachsche Tafel gebraucht?

§ 23. *Wenn drei oder mehr gleiche Kreise sich so von aussen berühren, dass jeder zwei benachbarte berührt, so soll die Fläche des innerhalb liegenden krummlinigen Vielecks gefunden werden.* Verbindet man die Mittelpunkte je zweier benachbarter Kreise, so müssen diese Geraden durch die Berührungspunkte gehen und eine jede gleich dem Durchmesser eines Kreises sein. Man erhält so ein regelmässiges Vieleck. Nach der oben benutzten Regel ist jeder Vieleckswinkel gleich $\frac{2n-4}{n}$ Rechten, folglich kann man in jedem Kreise den zu diesem Winkel gehörigen Kreisausschnitt, also auch die Summe aller berechnen. Aber nach § 20 kennt man auch den Inhalt des regulären Vielecks: daher ist die gesuchte Fläche gleich diesem Vieleck minus der Summe der Sektoren. Durchgeführt ist die Rechnung nur für drei Kreise. Sind die Radien wieder jeder = 7, so hat das gleichseitige Dreieck den Inhalt 84, es ist also die Gerbertsche Regel angewendet, dass die Höhe des gleichseitigen Dreiecks um $\frac{1}{7}$ kleiner sei als die Seite. Die einzelnen Centriwinkel sind aber je 60^0, also ist jeder Kreisausschnitt der sechste Theil von 154 = 25 · 35 (zu klein gerechnet), also alle drei = 76 · 45. Subtraktion ergiebt dann für den Inhalt des krummlinigen Dreiecks 7 · 15. Richtig käme jeder Sektor = 25 · 40, alle drei = 77, das gesuchte Dreieck also 7.

Mit dem folgenden Paragraphen geht Verfasser nun zur Stereometrie über.

§ 24. *Die Oberfläche eines geraden Kreiscylinders (columpna rotunda) zu bestimmen.* Die Mantelfläche ist Umfang der Grundfläche mal Höhe. Addiert man noch beide Grenzkreise hinzu, so erhält man die Gesammtoberfläche. Als Beispiel ist genommen der Radius der Grundfläche = 7, die Höhe = 12, dann ist der Mantel = 12 × 44 = 528; dazu die Summe der beiden Grundkreise 308 giebt 836 als Gesammtoberfläche.

§ 25. *Den Körperinhalt eines Cylinders zu bestimmen.* Volumen = G · h. Für den in § 24 behandelten Fall also 154 × 12 = 1848. Hier erwähnt der Verfasser eine dritte von ihm verfasste Schrift den *Tractatus collationum de virga visoria.* Dort habe er weitläufig über diese und ähnliche Dinge gehandelt, weshalb er hier sich nicht weiter dabei aufhalte.

§ 26. *Die Oberfläche eines Kegels (Piramis rotunda) von gegebener Grundfläche und Seitenkante zu finden.* Trotzdem er in dem für die Ober-

fläche des Cylinders angerufenen *Tractatus de curvis superficiebus* des ARCHIMENIDES in dem ersten Satze die richtige Berechnung der Kegeloberfläche finden konnte, benutzt unser Verfasser doch die grundfalsche Formel: Oberfläche = halber Umfang mal Höhe, wozu noch der Grundkreis zu addieren ist. Er lehrt sogar, wenn die Höhe nicht direkt bekannt ist, dieselbe aus Seitenlinie und Radius zu berechnen.

§ 27. *Die Oberfläche einer n-seitigen geraden Pyramide (ortholaterata) zu berechnen.* Die einzelnen Seitenflächen sind Dreiecke, die Grundfläche ein Vieleck. Man berechne nach früheren Paragraphen die einzelnen und suche ihre Summe: das ist die gesuchte Oberfläche.

§ 28. *Das Volumen eines Kegels oder einer regelmässigen n-seitigen Pyramide zu finden.* $V = \frac{1}{3} G \cdot h$.

§ 29. *Die Oberfläche eines geraden vierseitigen Prisma oder Würfels (Cubi et columpnae orthoquadrilaterae) zu bestimmen.* Da alle Seitenflächen Rechtecke sind, so findet man nach § 14 die einzelnen, und hat in ihrer Summe die verlangte Oberfläche.

§ 30. *Für dieselben Körper das Volumen zu bestimmen.* $V = G \cdot h$.

§ 31. *Oberfläche und Volumen eines geraden Prisma mit rhombischer Grundfläche (solidum almuhaim) zu bestimmen.* Nach § 15 kennt man die beiden rhombischen Grundflächen, nach § 14 die rechteckigen Seitenflächen. Die Summe aller ist die gesuchte Oberfläche.

Das Volumen ergiebt sich, wenn man die rhombische Grundfläche mit der Höhe vervielfacht.

§ 32. Der vorliegende Paragraph scheint von dem Verfasser mit grosser Freude ausgearbeitet zu sein. Er zeigt auch das wirkliche Können des Mannes. Auch heute liesse sich die Aufgabe als solche für obere Klassen der Gymnasien wohl gebrauchen.

Um drei gleiche sich gegenseitig von aussen berührende Kreise ist das gleichseitige Tangentendreieck beschrieben, es soll der Inhalt des Dreiecks, des ihm umgeschriebenen Kreises und aller in der Figur vorhandenen einzelnen Flächen bestimmt werden. Unter Voraussetzung der Figur ist der Winkel $bac = 60^0$, also $\sphericalangle\, dag = 30^0$. Denkt man sich aber um das Dreieck dag den Kreis beschrieben, so ist Bogen $dg = 60^0$ und Bogen $da = 120$, also ist Sehne $dg = 60$, Sehne $da = 103 \cdot 55$; ist aber $dg = 7$, so ist $da = 12 \cdot 7$, also ist auch $bc = 12 \cdot 7$. Es ist aber $ed = gf = 14$, also ist $ab = 38 \cdot 14 = bc = ca$. Die Höhe des Dreiecks ist aber nahezu $33 \cdot 7$ und also das Dreieck $abc = 633 \cdot 4$. Nun ist aber das Rechteck $efgd = 7 \times 14 = 98$ und jeder der beiden Sektoren gld und fle gleich $38 \cdot 30$ als Quadrant, folglich ist das krummlinige Dreieck $eld = 20$. Das

krummlinige Dreieck *lhk* ist schon in § 22 zu 7 · 15 berechnet, folglich ist die Summe aller vier krummlinigen Dreiecke 67 · 15. Dazu die Summe der drei gegebenen Kreise giebt 529 · 15. Zieht man dies von der Dreiecksfläche *abc* ab, so bleibt 103 · 49, wovon der je dritte Theil die Eckdreiecke *dma, elq, rcn* kennen lehrt zu 34 · 36. Da ferner Bogen $ab = 120^0$ ist, so wäre, wenn der Durchmesser des um *abc* beschriebenen Kreises 120 wäre, die Sehne *ab* = 103 · 55, sie ist aber in Wirklichkeit oben zu 38 · 14 berechnet, also ist der Durchmesser des grossen Kreises = 43 · 53 und sein Umfang 138 · 1 (etwas zu gross gerechnet), daher sein Inhalt = 1514 · 33. Zieht man hiervon den Inhalt des Dreiecks *abc* = 633 · 4 ab und dividiert den Rest durch 3, so entsteht die Fläche jedes der drei Abschnitte des grossen Kreises ausserhalb des Dreiecks = 293 · 50. Alle Werthe sind hier stets auf ganze 60stel abgerundet.

§ 33. *Das Verhältnis der Diagonale eines Quadrates zu einer Seite ist gleich der Quadratwurzel aus 2 (medietas duplae).* Wird in der Art der Figur über der Seite des Quadrates als Diagonale ein neues Quadrat construiert, so verhält sich das Quadrat *ab* zu dem Quadrat *ac* wie 2 : 1, folglich verhalten sich die Diagonalen selbst wie $\sqrt{2} : 1$.

§ 34. *Die Diagonale und die Seite eines Quadrates sind incommensurabel.* Ist z. B. die Diagonale = 4, so muss jede Seite mindestens grösser als 2 sein, wenn also ganze Zahlen genommen werden sollen, mindestens 3. Dann wäre aber nach dem Pythagoras 16 das Doppelte von 9, also da 16 auch das Doppelte von 8 ist, 8 = 9. Damit glaubt der Verfasser seine Behauptung richtig bewiesen zu haben.

§ 35. *Aus Sinus und Sinus versus eines Bogens die Ergänzung des Sinus versus zum Durchmesser zu berechnen, und umgekehrt aus Sinus versus und Ergänzung den Sinus zu finden.* Man hat Ergänzung = $(sinus)^2 : sinus\ versus$ und $sinus = \sqrt{sinus\ versus \times Ergänzung}$. *Sinus* ist die halbe Sehne des doppelten Bogens, *sinus versus* der Pfeil des Bogens.

Die am Schlusse befindliche Bemerkung über die Auffindung der Höhe eines Thurmes mittelst der ersten Forderung ist absolut unverständlich.

§ 36. Das Sechseck construiert durch sechsmaliges Abtragen des Radius. Halbiert man die Seite des Sechsecks und verbindet den Punkt mit dem Centrum, so ist diese Gerade Seite des Siebenecks, d. i. die bekannte indische Regel, es sei die Hälfte der Dreiecksseite die Siebenecksseite.

Den Bogen der Neunecksseite erhält man, wenn man vom sechsten Theile des Kreises $\frac{1}{3}$ abschneidet; schneidet man jedoch $\frac{2}{5}$ ab, so bleibt der Bogen des Zehnecks übrig. Wie man die Theilung ausführen soll, wird nicht gesagt.

§ 37. Um das Achteck zu construieren, nehme man $\frac{3}{4}$ des Bogens der Sechsecksseite, die zugehörige Sehne ist die verlangte Seite; oder man trage von den vier Ecken eines Quadrates auf den Seiten je die halbe Diagonale ab und verbinde je zwei benachbarte Punkte. Letztere Construktion findet sich auch anderweitig. M. s. z. B. CANTOR, *Vorlesungen* II.

§ 38. *Verwandlung eines Dreiecks in ein Quadrat.* Verwandlung des Dreiecks in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und halber Höhe und dieses Rechtecks durch den Satz von der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks in ein Quadrat.

§ 39. *Die Seite des Quadrats zu finden, das gleich der Summe mehrerer Dreiecke oder Rechtecke ist.* Jedes Dreieck wird einzeln in ein Quadrat verwandelt und dann die einzelnen Quadrate durch mehrfache Anwendung des pythagoreischen Satzes in ein einziges zusammengezogen.

§ 40. Anwendung des vorigen Paragraphen auf Verwandlung eines beliebigen Vielecks in ein Quadrat durch Zerlegung des Vielecks vermittelst Diagonalen in Dreiecke.

Nachschrift vom 5. December 1897.

In der Handschrift *Codex Vindobonensis Palatinus 5277* findet sich die vorliegende Abhandlung ebenfalls. In dieser heisst die S. 36, Z. 10—11 stehende Stelle so: *„a qua itu non immerito ut testatur dominus Moysis in principio suorum Pentadonarum illud universalis opificis commune mundi opus incepit“*. Es ist also der Weltkreis bei Erschaffung der Welt gemeint. Ebenso steht S. 45 neben MAGISTRI DE LINERIIS auf dem Rande *„Canones Linerij“*; die in der Anmerkung ausgesprochene Vermuthung ist also dadurch bestätigt.

DIE ERSTE ENTWICKLUNG

DER

ELEKTRISIRMASCHINE

VON

FERDINAND ROSENBERGER.

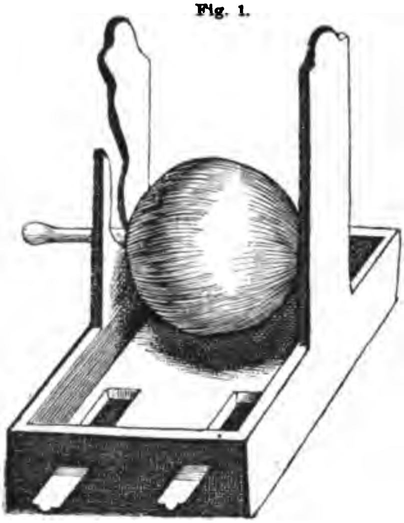
MIT 8 ABBILDUNGEN.

Man ist in der Geschichte der Elektricität im allgemeinen darüber einig, dass der Leipziger Professor Hausen im Jahre 1743 die Construktion der Elektrisirmaschine mit der Benutzung einer schnell rotirenden Glaskugel als Reibkörper begonnen, dass der Wittenberger Professor Bose im folgenden Jahre den Conduktor hinzugefügt und dass der Leipziger Professor Winkler danach endlich die Maschine mit dem Anbringen des Reibzeuges vollendet habe. Zu diesen Angaben sollen hier im Interesse eines richtigen Verständnisses der historischen Entwickelung einige Ergänzungen gegeben werden. Man darf nämlich bei ihnen nicht übersehen, dass alle Theile der Elektrisirmaschine, auch der Conduktor nicht ausgenommen, einzeln schon lange vor den genannten Jahren vorhanden waren, und dass die Verdienste der obigen Männer weniger auf originellen Neuschöpfungen, als auf der geschickten Zusammenstellung und zweckmässigen Zusammenpassung der Theile zu einer einheitlichen Maschine beruhen.

Wenn man den Namen Elektrisirmaschine im weitesten Sinne nimmt und dabei ganz allgemein nur an eine Maschine denkt, deren Zweck es ist Elektricität in möglichster Menge zu erzeugen, so muss man ohne jede Zweifelsmöglichkeit unsern grossen Physiker aus der Zeit des dreissigjährigen Krieges, Otto von Guericke, als den Erfinder der ersten Elektrisirmaschine bezeichnen. Bis auf Guericke hatten die elektrischen Arbeiten der Physiker ausschliesslich den Zweck gehabt, alle die Stoffe aufzufinden, welche durch Reiben überhaupt die wunderbare Fähigkeit der elektrischen Anziehung, der einzigen Wirkung, welche man damals von der Elektricität kannte, zu erlangen vermögen. Guericke aber, indem er für seine mannigfaltigen Untersuchungen nur einen einzigen Stoff, den Schwefel, als Reibkörper benutzte, zeigte dadurch, dass es ihm nicht darauf ankam zu erproben, welche Körper elektrischer Anziehungen fähig seien, sondern vielmehr zu erfahren, welche andere Wirkungen geriebene Körper ausser den elektrischen Anziehungen etwa noch hervorzubringen vermöchten. Für solche Absichten Guericke's spricht deutlich schon die Ueberschrift des betreffenden

Abschnitts[1]) in seinem grossen physikalischen Werke von 1672, welche nicht im früheren Sinne heisst „Von den Materien, welche elektrisch werden können," sondern die vielmehr lautet „Von einem Versuche, bei welchem die vornehmsten der aufgezählten Kräfte (Naturkräfte) durch Reiben in einer Schwefelkugel erregt werden können."

Fig. 1.



Die Maschine selbst, welche Guericke für so weittragende Pläne construirte, war freilich noch einfach genug und muss mehr nach dem guten Willen als nach der Kraft beurtheilt werden. Sie bestand, wie aus der nebenstehenden Copie der Guericke'schen Abbildung ersichtlich ist, der Hauptsache nach nur aus einer kindskopfgrossen Schwefelkugel, die um eine durch sie hindurchgehende eiserne Achse in einem Holzgestell drehbar war. Das Reibzeug bildete, wie Guericke's Worte lauten, die recht trockene Hand des Experimentators, und statt eines Conduktors musste, wenn man so sagen darf, die Kugel selbst dienen, die man zu dem Zwecke mit ihrer Achse leicht von dem Gestell abnehmen und überall hintragen konnte, wo man sie gebrauchte.[2])

So unvollkommen aber diese Elektrisirmaschine auch war, so entsprach sie doch in der Hand des genialen Experimentators allen möglichen Anforderungen in überraschender Weise. Guericke vermochte mit ihr nicht bloss die Existenz der bekannten elektrischen Anziehung, sondern auch die noch vollständig unbekannten Erscheinungen einer elektrischen Abstossung, der elektrischen Leitung, des elektrischen Ge-

1) Ottonis de Guericke Experimenta Nova (ut vocantur) Magdeburgica De Vacuo Spatio ... Amstelodami 1672. Liber Quartus: De Virtutibus Mundanis. Caput XV: De Experimento, quo praecipuae hae Virtutes enumeratae per attritum in Globo Sulphureo excitari possunt (p. 147 bis 150).

2) Die beiden, in der Zeichnung vorn am Boden des Maschinengestells bemerkbaren Vertiefungen stellen kleine, durch Schieber verschliessbare Kästchen dar, die zum Aufbewahren der bei den Versuchen gebrauchten Flaumfedern etc. dienen.

räusches[1]) und endlich sogar des elektrischen Lichts, wenigstens eines Glimmlichts, das die geriebene Schwefelkugel im Dunkeln zeigte, nachzuweisen.

Leider waren die Versuche des sonst mit so kräftigen Mitteln arbeitenden Guericke, der den Luftdruck mit sechszehn Pferdekräften demonstrirte und Barometer von Haushöhe verfertigte, auf elektrischem Gebiete so zart und schwächlich, dass weniger geniale Geister als er, ihre Tragweite nicht zu erkennen vermochten; und wenn auch Gelehrte von dem Range eines Huygens und Leibniz sich lebhaft für die wunderbaren neuen Erscheinungen interessirten, die Allgemeinheit nahm davon noch kaum Notiz. Darum ging vorerst der Weg der weiteren Erfolge nicht in Guericke'scher Richtung von der Elektricität zu den anderen Naturkräften, speciell zum Licht, sondern führte umgekehrt auf ganz ungeahnten Bahnen vom Licht zur Elektricität. An der Construktion oder Vervollkommung der Elektrisirmaschine hatte man vorerst noch kein weiteres Interesse.

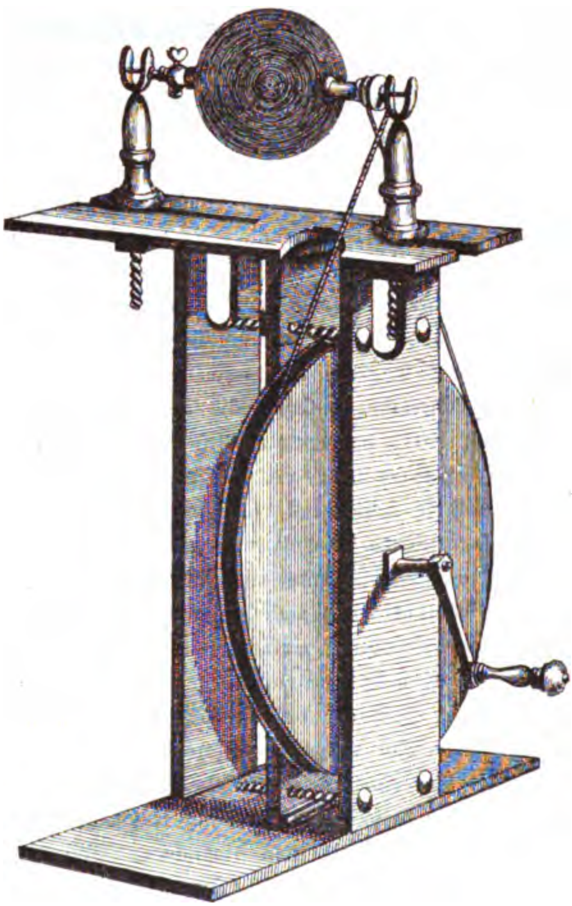
Der Franzose Jean Picard, derselbe, welcher die berühmte Gradmessung in Frankreich unternommen hatte, bemerkte zufällig im Jahre 1675, dass das Quecksilber in der Torricelli'schen Leere des Barometers leuchtend wurde, wenn man dasselbe im Dunkeln schüttelnd bewegte. Man glaubte damals, dass dieses Licht mit dem Lichte phosphorescirender Stoffe verwandt oder identisch wäre und gab ihm darum den Namen des merkurialischen Phosphors; doch bemühte man sich lange Zeit vergeblich sichere Vorschriften zu seiner Hervorbringung aufzufinden. Dies gelang vielmehr erst Hawksbee mehr als zwanzig Jahre später dadurch, dass er die Zusammengehörigkeit dieses Barometerlichts mit den elektrischen Kräften durch viele geistreiche Versuche feststellte.

Francis Hawksbee, der als Experimentator der Royal Society sich nothwendigerweise mit jenen so vieles Aufsehen erregenden Erscheinungen selbstthätig beschäftigen musste, schlug dabei einen besonderen Weg ein, der weit über das erstrebte Ziel einer sicheren Erzeugung des merkurialischen Phosphors hinaus zu einer weitreichenden Verbesserung der Methoden und Mittel Elektricität hervorzubringen führte. Er war in richtiger Erkenntniss bemüht sich bei diesen Untersuchungen von den schwer zu behandelnden und oft ohne sichtbaren Grund versagenden Barometern unabhängig zu machen und versuchte mit Eifer alle Möglichkeiten den merkwürdigen Phosphor mit Hülfe von Glas und Quecksilber im luftleeren Raume ohne

1) Wenn nicht, wie es wahrscheinlich ist, das Rauschen und Knistern, das Guericke in der geriebenen Schwefelkugel hörte, statt von der Elektricität, von dem Zerreissen der Krystalle in der durch das Reiben erwärmten Kugel herrührte.

die Barometer auf die kräftigste, aber doch einfachste Art hervorzurufen. Indem er dabei auf die verschiedenste Weise Glas an Quecksilber, dann Wolle an Glas, dann Wolle an Schwefel u. s. w. im luftleeren und lufterfüllten Raume reibend bewegte und dabei unter günstigen Umständen die Phosphorescenzlichter immer beobachten konnte, kam er zu der Ueberzeugung, dass zur Produktion dieser Lichter nichts weiter als die Reibung besonderer, geeigneter Stoffe, die schon als Elektricitätserreger bekannt, nöthig sei und ging dann direkt zur Construktion einer einfachen, sicheren Maschine für die bequeme Erzeugung und Beobachtung des merkurialischen Phosphors über. Diese Maschine aber erwies sich sogleich nicht bloss als eine äusserst reiche Quelle für Licht, sondern auch, was Hawksbee jedenfalls nicht unerwartet kam, als eine ebenso ergiebige Quelle für Elektricität, entpuppte sich also von selbst als eine Elektrisirmaschine.[1]) Ob Hawksbee bei der Construktion seiner Maschine die Guericke'sche vor Augen gehabt, lässt sich nicht sicher feststellen, da er

Fig. 2.



1) Die Elektrisirmaschine ist in Hawksbee's Werke „Physico-Mechanical Experiments on various subjects. Containing an account of several surprizing Phenomena touching Light and Electricity, producible on the Attrition of Bodies ... London 1709" auf Plate VII abgebildet. Die hier beigegebene Zeichnung ist eine Copie jener Figur.

selbst alle historischen Angaben unterlässt. Doch darf man aus einzelnen Aeusserungen Hawksbee's, die mit Stellen aus Guericke's Werk wörtlich übereinstimmen, schliessen, dass er dieses Werk recht gut gekannt hat.[1])

Wie die nebenstehende Abbildung zeigt, bestand die Hawksbee'sche Maschine wieder wie bei Guericke, im wesentlichen aus einer Kugel, die aber diesmal nicht eine massive Schwefelkugel, sondern eine hohle Glaskugel war und die mit Hülfe eines grossen Rades nnd einer Schnurenübersetzung durch eine Kurbel sehr schnell um ihre Achse gedreht werden konnte. Als Reibzeug sollte auch wieder die recht trockene Hand des Experimentators dienen; eines Conduktors aber entbehrte diese Maschine noch mehr als die Guericke'sche, denn die Glaskugel konnte nicht von der Maschine getrennt und alle Körper, deren Verhalten gegen die Elektricität untersucht werden sollte, mussten direkt an die Kugel selbst gebracht werden.[2])

Die Maschine war in erster Linie für das Studium der verschiedenartigen Lichterscheinungen bestimmt und dazu noch besonders mit einer hohlen Achse versehen, durch welche man die Glaskugel selbst während des Rotirens beliebig evacuiren oder auch wieder mit Luft füllen konnte. Doch bewies Hawksbee neben dem Studium der Lichterscheinungen durch viele sehr sorgfältige Versuche mit leichten Wollfäden, die er in mannigfaltigster Weise an Drahtbögen neben, über und unter der Kugel aufhing, dass die Lichterscheinungen nie ohne die gleichzeitige Wirkung elektrischer Anziehungen und Abstossungen auftraten, und dass die Lichter überhaupt nie ohne die Elektricität erregt werden konnten. Nur dem Namen nach trennte er die beiden Erscheinungen immer so sorgfältig von einander, dass er nie den naheliegenden Ausdruck eines elektrischen Lichts gebrauchte, und über ihren etwaigen

---

1) In der Bibliothek der Royal Society war Guericke's Werk vorhanden und stand also Hawksbee bequem zu Gebote. In Birch's History of the Royal Society, vol. III, p. 59, wird nach den Büchern der Gesellschaft ausdrücklich berichtet, dass Hooke, der damalige Curator of Experiments, in der Sitzung vom 6. November 1672 jenes Werk vorgelegt habe, und dass auf seine Empfehlung hin auch die Anschaffung desselben beschlossen worden sei. Hooke habe dabei vor allem die Experimente mit der Schwefelkugel als der Wiederholung werth bezeichnet. Die Ausdrücke, welche in Guericke's und Hawksbee's Werken wörtlich übereinstimmen, betreffen die trockene Hand des Experimentators als Reibzeug und die Aehnlichkeit des Leuchtens vom Zucker beim Zerbrechen mit dem Leuchten elektrischer Körper.

2) Nach einer Mittheilung von Prof. Hagenbach-Bischoff in Basel sind die Apparate Hawksbee's aus dessen Nachlass nach Basel verkauft worden und in der Sammlung der dortigen Universität noch vorhanden.

materiellen oder sonstigen ursächlichen Zusammenhang verweigerte er jede Auskunft.

Hawksbee hatte mit seiner Elektrisirmaschine nicht mehr Glück als Guericke mit der seinigen; sie wurden beide von der Mitwelt nicht weiter beachtet und beide bei der Weiterentwicklung zuerst vergessen, die Hawksbee'sche fast noch mehr als die Guericke'sche. Die Hauptschuld lag wohl daran, dass die Maschine des Hawksbee eben in erster Linie eine Lichtmaschine und als solche der nothwendigen Evacuirung wegen, mehr als für eine Elektrisirmaschine erforderlich, complicirt und kostspielig war, und dass sie trotzdem in Bezug auf die Erzeugung von Elektricität nicht auffallend Grosses, sondern eigentlich recht Wenig leistete. Dabei aber darf man, um nicht historisch ungerecht zu werden, nicht übersehen, dass mit der Elektrisirmaschine überhaupt noch nicht und zwar so lange noch nicht viel anzufangen war, als man die Elektricität nicht anders als nur direkt vom Reibkörper zu entnehmen wusste, als man noch nicht gelernt hatte, die Elektricität von einem Körper auf einen andern überzuleiten, auf diesem anzusammeln und dann von ihm auf einmal zu entnehmen. Diese zur Verbesserung der Elektrisirmaschine nothwendigen Entdeckungen aber erfolgten durch Stephen Gray, ebenfalls einem Mitgliede der Royal Society, erst mehr als zwei Jahrzehnte nach der Vollendung der Arbeiten des Hawksbee.

Da Gray, ebenso wie Hawksbee, in seinen Abhandlungen alle historischen Angaben vermieden, so können wir nicht direkt entscheiden, warum Gray bei seinen elektrischen Untersuchungen nicht nur die Hawksbee'sche Maschine gänzlich ausser Gebrauch gelassen, sondern derselben auch nicht einmal Erwähnung gethan hat. Gray ging im Jahre 1729 von der Idee aus, dass man aus dem Uebergange des elektrischen Lichtes von einem Körper zu einem andern, wohl auch auf einen entsprechenden Uebergang der Elektricität zwischen verschiedenen Körpern schliessen dürfe.[1]) Zur experimentellen Prüfung dieser Idee aber war ihm jedenfalls die Hawksbee'sche Glaskugel, die in einem Gestelle fest gemacht war, viel zu wenig beweglich und er griff für die Erzeugung der Elektricität zum Reiben einer ungefähr $3^1/_2$ Fuss langen Glasröhre, die mit Wolle gerieben, nicht weniger Elektricität gab als die Kugelmaschinen und leicht und bequem jedem beliebigen Körper zur Mittheilung von Elektricität genähert werden konnte. Gray erreichte auch damit sein Ziel; die Demonstration der Fortpflanzungsfähigkeit der Elektricität in, wie auch zwischen

1) Philosophical Transactions no. 417, p. 18, auch Philosophical Transactions abridged, vol. VI, pt. II, p. 5 u. f.

den Körpern in kürzester Weise, und als er bei der Durchprüfung der verschiedensten Substanzen auch den menschlichen Körper als leitungsfähig und damit als elektrisirbar nachwies, erwachte auf einmal das allgemeine Interesse für die neue physikalische Kraft, die Elektricität.

Dieses Interesse aber wurde noch weiter in ganz ungewöhnlichem Masse vergrössert, als gleich nach den ersten Entdeckungen Gray's Charles du Fay in Paris nachwies, dass der isolirte menschliche und thierische Körper die Elektricität nicht nur aufzunehmen, sondern auch in beträchtlicher Weise zu verstärken und verstärkt wiederzugeben vermöge. Gray hatte bei seinen Versuchen einen acht- bis neunjährigen Knaben in isolirenden Seilen horizontal aufgehangen und gezeigt, dass der Kopf und die Arme desselben, ganz ebenso wie elektrische Körper selbst, naheliegende leichte Goldblättchen anzogen, sobald nur die Füsse des Knaben mit der geriebenen Glasröhre berührt wurden.

Du Fay[1]) aber bemerkte bei der Wiederholung dieses Experiments die noch viel erstaunlichere Erscheinung, dass der in dieser Weise isolirte menschliche Körper nicht nur elektrische Anziehungskräfte entwickelte, sondern auch bei der Annäherung eines andern Menschen Lichtfunken abgab von einer Stärke, wie man sie bis dahin noch nicht beobachtet hatte. Solche Funken wurden danach zum Entsetzen vieler Beobachter aus lebenden menschlichen oder auch thierischen Körpern mit unfehlbarer Sicherheit durch andere lebende Körper entweder direkt oder auch indirekt mit Hülfe von Metallstäben gezogen. Diese Funken waren schon so stark, dass sie auf der Haut einen stechenden Schmerz verursachten, und der in Seidenschnüren aufgehängte menschliche Körper wurde danach mit Vorliebe dazu gebraucht, diesen interessanten Schmerz zu verursachen, wobei man noch gern die Wirkung dieser menschlichen Conduktoren, wie auch Du Fay selbst dies that, in besonders geheimnissvoller Weise auf die Lebenskraft derselben zurückführen wollte.

Gray aber fasste in physikalisch reinerer Weise besonders den andern von Du Fay erwähnten Punkt in's Auge, dass man nämlich die Funken aus den menschlichen Körpern nicht bloss direkt durch andere menschliche Körper sondern auch indirekt durch Metalle ziehen könne.[2])

1) Caroli de Cisternay du Fay: Versuche und Abhandlungen von der Elektricität der Körper, welche er bei der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Paris in den Jahren 1733 bis 1737 vorgestellt und bei denen Versammlungen derselben abgelesen hat. Aus dem Französischen ins Deutsche übersetzt. Erfurth 1745. S. 100 u. f.

2) Philos. Transact. no. 436, p. 16, 28. Januar 1735, auch Phil. Trans. abr., vol. VIII, p. 397.

Er hielt danach für möglich und vielleicht wahrscheinlich, dass die Metalle ebenso wie die lebenden Körper die Elektricität zu verstärken vermöchten und dass man vielleicht ebenso wie aus lebendigen Körpern auch aus Metallstangen die starken Funken ziehen könne. Da er in dem Augenblicke, als ihm der Gedanke kam, nichts anderes Geeigneteres zur Hand hatte, so legte er zuerst seinen Schürhaken, dann die Feuerzange, endlich sogar die Kohlenschaufel auf die isolirende Schnüre und immer mit dem gleichen günstigen Erfolge. Schliesslich aber fand er doch eine eiserne Stange von 4 Fuss Länge und $^1/_2$ Zoll Durchmesser von der kräftigsten Wirkung und eine solche Stange gab dann, wenn sie in seidenen Fäden aufgehängt war, auch gerade so starke Funken wie die lebendigen Körper.[1])

Diese Gray'schen Eisenstangen und Eisenröhren oder auch die ihre Stelle vertretenden lebendigen Körper müssen wir als die ersten Conduktoren im Sinne der Elektrisirmaschine und Gray als ihren Erfinder bezeichnen, denn erstens leisteten sie den Experimentatoren vor der Construktion der Elektrisirmaschinen ganz dieselben Dienste wie später bei dieser selbst und zweitens behielt man bei der Construktion dieser Maschinen die Gray'schen Conduktoren noch lange, nicht bloss ihrer ursprünglichen Form, sondern auch ihrer ursprünglichen Aufhängungsart nach bei. Selbst der Name Conduktor, der von Desagulières[2]) im Jahre 1738 für die in Fäden isolirt aufgehangenen leitenden Körper vorgeschlagen wurde, stammt auch in dieser engeren Bedeutung noch aus der Zeit vor der Erfindung der Elektrisirmaschine.[3])

---

1) Phil. Trans. abr., vol. VIII, p. 398: „We caused to be made an Iron Rod, 4 Foot long and about half an Inch Diameter, pointed at each End, but not sharp, being left about the Bigness of a Pin's Head, this being suspended on the Lines; then the Tube being rubbed, and held near one End of the Rod, and the Finger or Cheek being put near either End of the Rod, the Effect was the same as where an animal had been suspended on the Lines, with respect to the pricking Pain we felt.

2) Phil. Trans. no. 454, p. 193, auch Phil. Trans. abr., vol. VIII, p. 422: „I call Conductors those Strings, to one End of which the rubbed Tube is applied; and Supporters such horizontal Bodies as the Conductor rests upon .... Where it is not mentioned otherwise, an Ivory-Ball hangs at the End of the Conductor; and its Electricity is tried by a Thread applied near it."

(Experiment made before the Royal Society Febr. 2. 1738.)

3) Auch Priestley, der der Entwicklung dieser Dinge noch ganz nahe stand, stellt den Gebrauch des Conduktors noch vor der Erfindung der Elektrisirmaschine fest, indem er in seiner History of electricity (Deutsch von Krünitz, Berlin 1772, S. 335) sagt. „Als man von den Kugeln (Guericke's und Hawksbee's) keinen Ge-

Mit der Entwickelung des Conduktors verband sich dann auch schon eine Verbesserung des Reibzeuges. Man fand es zweckmässig, die langen Glasröhren statt mit der Hand mit Wollen- oder Lederlappen zu reiben, die man mit verschiedenen Pulvern, wie Kreide, Tripel u. s. w. bestreut hatte; und mit diesem so vollendeten Apparate aus Glasstange, Reibzeug und Conduktor vermochte man in der That grössere Mengen von Elektricität auf einmal zu erhalten, so dass geschickte Experimentatoren empfindliche elektrische Schläge austheilen und Zündversuche schon mit Erfolg unternehmen konnten.

Doch aber musste man bei der sich immer mehrenden Zahl und Bedeutung der elektrischen Untersuchungen die Unbequemlichkeit und Unsicherheit des zusammenzustellenden Apparates, bei dessen Gebrauch Gehilfen schwer zu verwenden waren, immer stärker empfinden und musste danach nothgedrungen sich der rotirenden Kugeln Guericke's und Hawksbee's erinnern und ihre Anwendung wieder versuchen.

Der erste Physiker, von dem die Beschreibung einer solchen Kugelelektrisirmaschine veröffentlicht wurde, war der erwähnte Leipziger Professor Christian August Hausen, dessen betreffende Schrift Novi Profectus in Historia Electricitatis im Jahre 1743 kurze Zeit nach seinem Tode erschien. Wie die umstehende Abbildung, welche das Titelkupfer dieser Schrift wiedergiebt, erkennen lässt, enthielt Hausen's Apparat auch schon alle wesentlichen Theile der Elektrisirmaschine, nur in den alten, gewohnten Formen, nämlich erstens die Hawksbee'sche Glaskugel, welche wie bei diesem durch eine Schnurenübertragung mit Hilfe eines grossen Rades in schnelle Rotation versetzt werden konnte, aber der nur für das Studium der Lichterscheinungen nöthigen Vorrichtung für das Evacuiren entbehrte, dann zweitens die trockene Hand des Experimentators als Reibzeug und endlich drittens den Conduktor in Gestalt eines Knaben, der in Schnüren von Seide hängt oder auch auf einem mit Pech ausgegossenen Fasse steht.

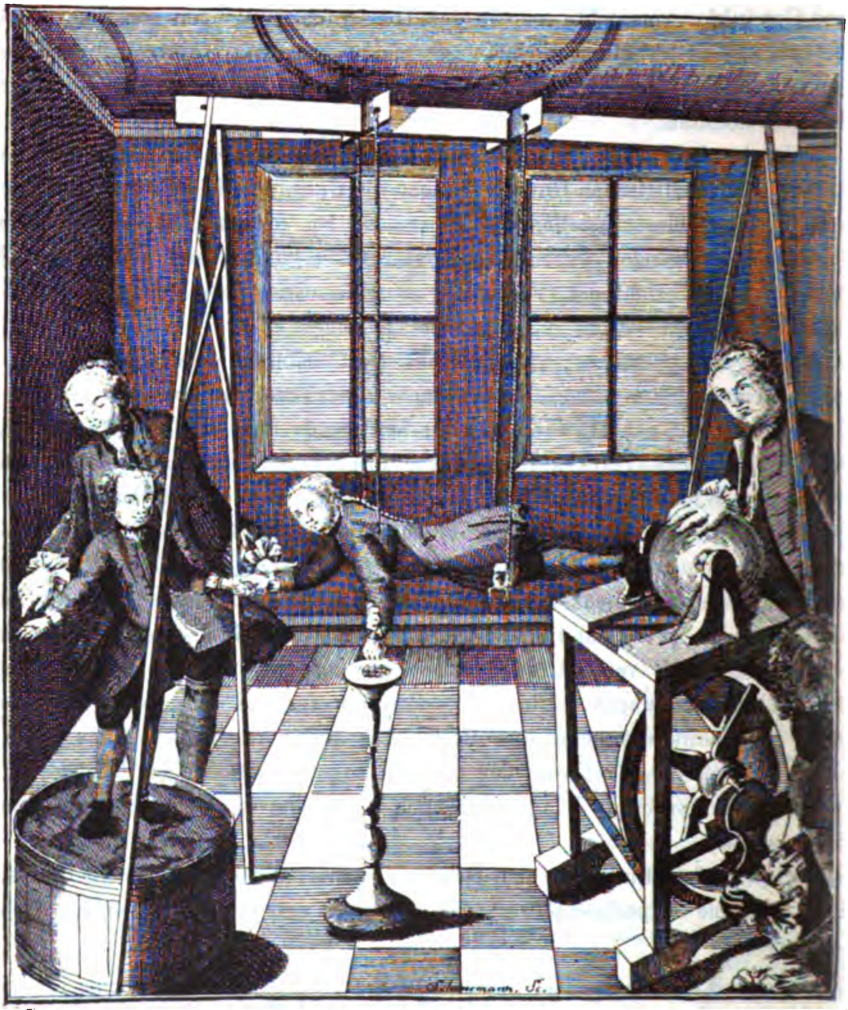
Da in der Einleitung zu Hausen's Schrift ausdrücklich bemerkt ist, dass er seine Experimente mit der Maschine erst kurz vor seinem Tode

---

brauch mehr machen konnte, nahmen die Naturforscher zu einer leichteren und wohlfeileren Geräthschaft, welche in Glasröhren und Schwefel- oder Siegellackstangen bestand, ihre Zuflucht, und die ersten Leiter, deren sie sich bedienten, waren nichts weiter als hänfene Stricke, welche auf seidenen Schnuren ruhten. An deren Statt nahm man bald darauf metallene Stangen. Nachher nahm man abermals zu Kugeln seine Zuflucht, weil dieselben weit geschickter waren, diesen isolirten Leitern die elektrische Materie auf eine mehr einförmige Art zu überliefern."

begonnen habe, so dürfen wir die Construktion derselben, jedenfalls nicht vor das Jahr 1742 setzen. Darnach aber macht ihm der Wittenberger Professor Matthias Bose in allen Dingen, nicht bloss in der Erfindung

Fig. 3.



des Conduktors und nicht einmal vorzugsweise in dieser, wie man nach den Historien der Elektricität vermuthen sollte, die Priorität streitig. Bose beschrieb gleich nach dem Erscheinen der Abhandlung von Hausen seine eigene Methode, die Elektricität in grössten Mengen hervorzubringen in

mehreren deutschen und lateinischen Schriften.[1]) Darin betonte er, allerdings ohne Hausen zu nennen, aber doch mit deutlicher Beziehung auf diesen, wie er gleich nach seinem Bekanntwerden mit den Dufay'schen Versuchen in Paris vom Jahre 1733 sich darüber gewundert, dass dieser statt der unbequem zu reibenden Glasröhre nicht die millionenmal bequemere Kugel Hawksbee's benutzt, und dass er selbst dann noch im Jahre 1737 bei seinen elektrischen Versuchen die rotirende Glaskugel mit grossem Erfolge angewandt habe.[2])

Auch Bose benutzte zuerst noch vielfach menschliche Conduktoren; er stellte bei seinen Zündversuchen Menschen auf isolirende Substanzen und liess von ihren Fingern, oder (mit Vorliebe) von einem Schwert, oder von einer Eisenröhre, die sie in der Hand hielten, die Funken ausgehen. Dann aber eliminirte auch er den Menschen und hing als Conduktoren lange eiserne Röhren in seidenen Schnüren auf, deren Enden er entweder direkt auf der rotirenden Kugel schleifen liess, oder die er zweckmässiger, nachdem ihm durch das Aufstossen einer solchen eisernen Röhre eine schöne Glaskugel zerstossen worden war, durch Leinenfäden, die aus der Röhre heraushingen, mit der Kugel in leitende Verbindung setzte. Doch rühmte er sich der zweckmässigen Anwendung und Gestaltung dieser Conduktoren nicht weiter, sondern schilderte nur enthusiastisch die starken Wirkungen, die er mit seinen Apparaten erhalten hatte. Die Schriften Bose's enthalten keine Abbildungen seiner Apparate, doch müssen seine Maschinen, abgesehen von der speciellen Form und Lage der Theile, ungefähr so ausgesehen haben, wie die umstehend abgebildete Elektrisirmaschine Nollet's, die trotz ihrer Unvollkommenheit noch lange und viel angewandt wurde.

---

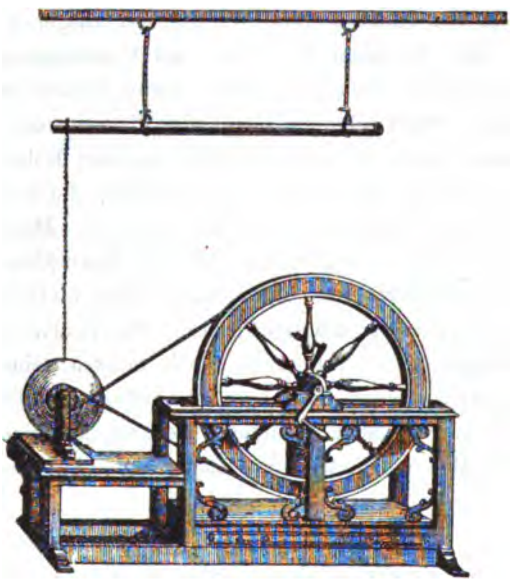
1) Die Elektricität nach ihrer Entdeckung und Fortgang mit Poetischer Feder entworfen von George Matthias Bose. Wittenberg. (Die Widmung dieses Lehrgedichts ist dadirt vom 20. Juli 1744.) Tentamina electrica in Academiis Regiis Londinensi et Parisina primum habita, omni studio repetita, quae novis aliquot accessionibus locupletavit G. M. Bose. Wittenbergae 1744.

2) In „Die Elektricität", S. XXIII, sagt Bose:

„Gepriesener Du Fay, so schön gingst Du mir für,
Das rühm' ich öffentlich. Ich folgte gleich nach Dir . . ,
Nur alles was Du thatst, thatst Du mit hohlen Röhren,
Die gut, wenn sie nur nicht so sehr beschwerlich wären.
Ich nahm zu allererst mit viel Bequemlichkeit
Des Hawksbees Kugel an, wodurch in wenig Zeit
Was sonst das Rohr mit Müh, nicht lang und schwach gezeigt,
Unendlich stärker wird, ja alles übersteigt."

Bose erstaunte alle Welt durch die Stärke der elektrischen Entladungen, die er mit seiner Maschine erhalten konnte, dann aber vor allem auch durch die sogenannte Beatification des Menschen, d. i. das Glimmleuchten des ganzen menschlichen Körpers im Dunkeln, wenn derselbe auf den Isolirschemel gestellt und stark elektrisirt worden war. Und da Bose nicht bloss das grosse Publikum, sondern auch die höchsten Herrschaften, deren Besuche in seinem Laboratorium er sehr enthusiastisch beschreibt, für seine Versuche zu interessiren wusste, da ausserdem die gewaltigen Wirkungen der 1745 erfundenen Verstärkungsflasche besonders das Verlangen nach starken Elektricitätsquellen erregten, so begann nun eine Zeit elektrischen Enthusiasmus, in der nicht bloss fast jeder Physiker, sondern auch fast jeder Dilettant seine besonderen Maschinen construirte, die jedoch alle wesentlich nicht viel von einander verschieden waren.

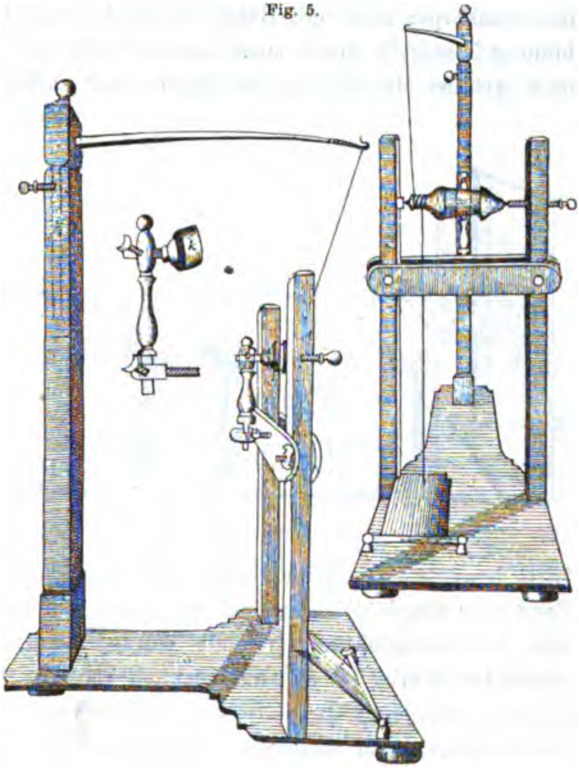
Fig. 4.



Noch aber war der letzte menschliche Rest aus der mechanischen Maschine, die menschliche Hand als Reibzeug, zu eliminiren. Das erste Bedürfniss dazu fühlte der Leipziger Professor der alten Sprachen, später auch der Physik, Johann Heinrich Winkler, der zur Ladung der von ihm zusammengestellten elektrischen Batterien, wie überhaupt zur Erzielung der starken Wirkungen, wie er sie liebte, stärkerer Elektricitätsquellen nothwendig bedurfte. Winkler baute für die Ladung seiner elektrischen Flaschenbatterien, um durch Summirung die ungenügenden Einzelwirkungen zu verstärken, Elektrisirmaschinen, statt mit einer, mit zwei oder vier, ja sogar acht Kugeln, zu deren Reibung wohl die Hände seiner Assistenten, oder vielmehr die Assistenten selbst nicht mehr ausreichten. Nach Winkler's eigner Erzählung hat ihn zuerst der Leipziger Drechslermeister Giessing, mit dem er über die Hausen'sche Maschine sprach, darauf aufmerksam gemacht, dass man auch bei der Hawksbee'schen Kugel, ganz wie bei den Gray'schen Glasröhren, statt der Hände, als Reibzeug Wollen-

und Lederstoffe anwenden könne.[1]) Er folgte dem Winke und construirte mit Erfolg eine Maschine, bei der statt der Hände zur Reibung der rotirenden Kugeln kleine mit Leder überzogene Zeugkissen gebraucht wurden, die zur besseren Wirkung mit Kreide überstrichen waren und die man mit Hülfe einer Feder stärker oder schwächer gegen die Glaskugel pressen konnte. Zuerst freilich zeigten sich diese Reibzeuge wohl bequemer, aber doch nicht so kräftig wirkend als die trockenen, menschlichen Hände, und das war wohl die Ursache dafür, dass das Reibzeug sich nur langsam einführte und dass selbst berühmte Physiker noch mehrere Jahre lang ihre Elektrisirmaschinen ohne mechanisches Reibzeug construirten. Erst nachdem man die Nothwendigkeit einer elektrischen Ableitung des mechanischen Reibzeugs erkannt hatte, führte sich dieses ganz allgemein ein.

Fig. 5.

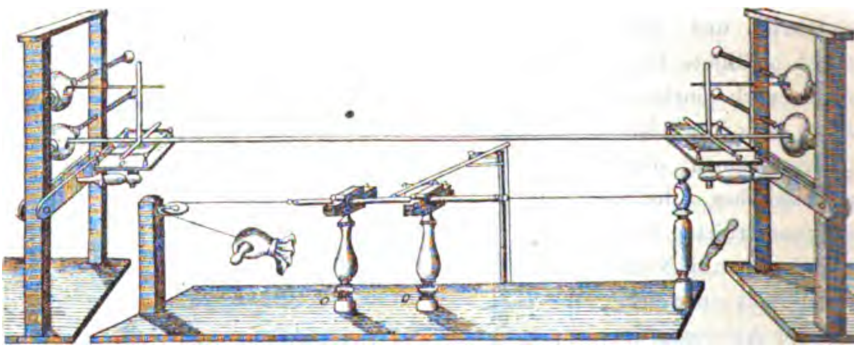


Ueberhaupt erhielten sich die alten Formen der einzelnen Theile des elektrischen Apparates noch merkwürdig lange und nur langsam gestalteten sie sich der Idee der Einheit einer Maschine entsprechend um. Auch Winkler versuchte noch seine ersten Maschinen in den einzelnen Theilen den alten Formen genau nachzubilden. Dem entsprechend beschrieb er in seiner ersten Schrift über die Elektricität vom Jahre 1744 eine Elektrisirmaschine, bei der er statt der rotirenden Glaskugel wieder eine lange Glasröhre nach

1) Gedanken von den Eigenschaften, Wirkungen und Ursachen der Elektricität, nebst einer Beschreibung zwo neuer elektrischen Maschinen. Herausgegeben von Joh. Heinrich Winklern. Leipzig 1744.

Grayscher Art anwandte. Diese Glasröhre konnte durch einen Fusstritt mit Hülfe einer an ihrem oberen Ende befestigten Feder in dem sie umschliessenden Reibzeuge auf- und niedergezogen werden. Und bei der zweiten Maschine, die Winkler ebenfalls im Jahre 1744 empfahl und die nach neuer Art eine Glaskugel oder vielmehr ein Bierglas als Reibkörper hatte, liess er wenigstens, nach seiner Meinung zur besseren Wirkung, die Rotationen in ihrer Richtung immer umwechseln, indem er den Glaskörper nicht mit Hülfe von Kurbel und Rad, sondern wie die Abbildung 5 zeigt[1]), durch einen um die Rotationsachse geschlungenen Faden nach Art der Metallbohrer der Handwerker ebenfalls mit Hülfe eines Fuss-

Fig. 6.



tritts bewegte. Die beiden ersten Maschinen Winkler's sind auch noch ohne Conduktor abgebildet, doch ist nicht zweifelhaft, dass auch dabei der Gray'sche Röhrenconduktor verwandt wurde, denn Winkler spricht in dem erwähnten Werke (S. 57) ausdrücklich von den Funken eines eisernen Rohres, welche die Quintam Essentiam Vegetabilem mit ausnehmender Geschwindigkeit zu entzünden vermöchten.

Winkler's Elektrisirmaschinen aus dem folgenden Jahre, d. i. von 1745, aber haben die obigen alterthümlichen Einrichtungen, wie die Figur 6[2]) erkennen lässt, nicht mehr; vielmehr sind bei ihnen als Reibkörper rotirende

---

1) Figur 5 ist der Tafel I des Werkes von 1744 über die Eigenschaften, Wirkungen und Ursachen der Elektricität entnommen. Das sonst wenig sichtbare Reibzeug ist innerhalb der linken Abbildung der Maschine noch einmal vergrössert dargestellt.

2) Die Figur 6 stammt aus Tafel IV des Werkes „Die Eigenschaften der elektrischen Materie und des elektrischen Feuers aus verschiedenen neuen Versuchen erklärt und, nebst etlichen neuen Maschinen zum Elektrisiren, beschrieben von Joh. Heinrich Winklern. Leipzig 1745.

Glaskugeln, ganz wie bei Hausen und Bose verwendet, und die Conduktoren, allerdings noch von alter Röhrenform, sind schon fest mit der Maschine verbunden, was als eine sehr wichtige Neuerung erscheint.

Noch im Jahre 1745 veröffentlichte auch der Hallenser Professor der Medicin Joh. Gottlob Krüger als Zuschrift an seine Zuhörer eine Abhandlung über Elektricität[1]), der die Abbildung (Figur 7) einer Elektrisirmaschine angehängt ist, die ebenfalls noch ganz primitive Formen zeigt. Trotzdem aber in der Abbildung nur ein Mensch als Conduktor dargestellt ist, spricht sich grade Krüger über die Art der Wirkung der Metallconduktoren näher aus. Zuerst hatte man wohl bei der Anwendung derselben an besondere Kräfte der gebrauchten Körper gedacht, jetzt führte Krüger die Wirkung der Conduktoren auf das Strömen, vielleicht auch das Fallen der Elektricität in ihnen zurück und fand damit anscheinend mannigfachen Beifall. „Nach der Zeit, so sagt er[2]), dass Hausen und Bose ihre Experimente angestellt, haben sehr viele Naturkundige und ich selbst, wenn ich mich unter dieselben zählen darf, diese Experimente angestellt, und immer mehreres Neue dabei entdeckt, wozu ich insonderheit dieses zähle, dass die Elektricität immer stärker wird, je weiter sie fortgepflanzt wird, welches aber der Knoten ist, der in dieser Sache am schwersten aufzulösen. Da ich nun gefunden habe, dass wenigen diese Art die Elektricität zu verstärken bekannt sei, so will ich beschreiben, wie man es damit anfangen müsse. Man legt so nahe, als es möglich ist, an die gläserne Kugel oder Cylinder der elektrischen Maschine eine eiserne Stange auf blaue Seidenfäden und bindet an dieselben einen dicken eisernen Draht, denn wenn er dünner ist, so ist die Wirkung viel schwächer. Dieser Draht wird weiter fortgeleitet und allenthalben mit blauen Seidenfäden angebunden, zugleich aber auch verhindert, dass er keinem andern Körper zu nahe kommt, oder die Seide nass gemacht wird. Auf diese Art habe ich die Wirkung dergestalt vermehrt, dass man einen an dem letzten Ende des Drahtes angehängten Schlüssel nicht ohne den empfindlichsten Schmerz anrühren konnte. Mein Freund und ehemaliger Zuhörer Herr Pope hat auf solche Art den Draht zweihundert Ellen weit fortgeleitet und es ist unbeschreiblich, was die elektrischen Funken am Ende des Drahtes für eine Gewalt hatten, welches man daraus abnehmen kann, dass Jemand, welcher unter dem elektrischen Drahte hinwegging, von den Funken der-

1) Joh. Gottlob Krügers Zuschrift an seine Zuhörer, worin er ihnen seine Gedanken von der Elektricität mittheilt und ihnen zugleich seine zukünftigen Lectionen bekannt macht. Halle 1745. Neue und mit Anmerkungen versehene Auflage.

2) Krüger's Zuschrift, S. 32. Anmerk.

gestalt auf den Kopf geschlagen wurde, dass er beinahe vor Schwindel auf den Boden gefallen wäre."

Uebrigens berichtigte man doch bald diese Vorstellung von der Wirk-

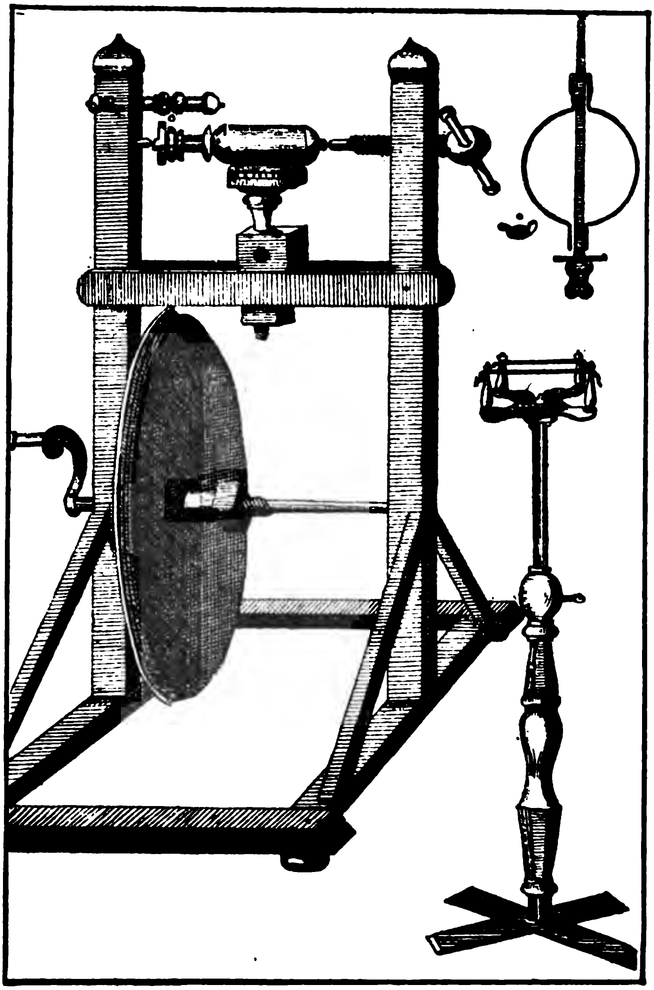
Fig. 7.



samkeit des Conduktors dahin, dass nicht sowohl die Länge allein, als vielmehr die ganze Oberfläche dabei von Einfluss sei, wenn man auch die langen Röhrenconduktoren beharrlich beibehielt. Beide Momente sind deutlich noch in den Briefen Franklin's über Elektricität zu erkennen. „Ich

habe, sagt er da[1]) in einem Briefe vom Jahre 1749, einen grossen Conduktor, der aus vielen Blättern von steifer Pappe zusammengesetzet, und wie eine Röhre gestaltet ist. Er ist beinahe zehn Fuss lang und hält einen Fuss im Durchmesser. Ich habe denselben mit buntem Goldpapier überzogen, welches fast gänzlich vergoldet ist. Diese grosse Metallfläche nimmt eine viel grössere elektrische Atmosphäre an, als eine eiserne Stange, die fünfzig mal schwerer ist. Der Conduktor ist an eine seidene Schnur aufgehangen, und wenn er geladen ist, schlägt er fast auf zween Zolle weit und giebt einen so starken Schlag, dass es dem Knöchel schmerzhaft wird."

Fig. 8.



Wohl die vollkommenste Maschine aus den Geburtsjahren unserer Elektrisirmaschine, ist diejenige, welche der Benedictinermönch und Professor der Physik in Erfurt Andreas Gordon in seinem „Versuch einer Er-

1) Des Herrn Benjamin Franklin's Esq. Briefe von der Elektricität. Aus dem Englischen übersetzet, nebst Anmerkungen von J. C. Wilcke. Leipzig 1758. S. 84.

klärung der Elektricität" (Erfurt, ohne Jahreszahl, Dedication vom 17. April 1745) beschrieb und auf Tafel I dieses Werkes abbildete (Figur 8). Die Maschine zeigt einige Verwandtschaft mit den Winkler'schen, vor allem auch darin, dass neben dem grossen Rade zur schnellen Drehung des Reibkörpers (eines Glascylinders oder gewöhnlichen Bierglases) noch eine Vorrichtung über demselben angebracht ist, um ihn, wie bei Winkler, nach Art der Metallbohrer vor- und rückwärts zu drehen. Das Reibkissen besteht aus Kalbsleder, das mit Rosshaaren ausgestopft und mit Tripel eingerieben ist. Der Conduktor, eine 4 Schuh lange und 2 Zoll weite Eisenröhre, wird auf ein kleines, mit der Maschine nicht verbundenes, in seiner Höhe verstellbares Tischchen gelegt, das rechts von der Zeichnung der Maschine dargestellt ist. Beim Gebrauch wurde die Eisenröhre dem geriebenen Glascylinder zur Ableitung der Elektricität bis $1/2$ oder $1/4$ Zoll Entfernung nahe gebracht, war aber sonst ohne weitere Vorrichtungen zur besseren Aufnahme der Elektricität.

Die eben beschriebenen primitiven Formen der Elektrisirmaschine zeigten eine ganz überraschende Beharrungskraft; sehr langsam nur wurde die Schnurenübersetzung der Drehung von einem grossen Rade auf den schnell rotirenden Reibkörper durch die direkte Drehung des letzteren eliminirt, und die lange Röhrenform des Conduktors erhielt sich gegenüber der Kugelgestalt noch bis weit in unser Jahrhundert hinein; ein sprechender Beweis für die zähe Lebenskraft nicht bloss wissenschaftlicher Theorien, sondern auch praktischer Formen wissenschaftlicher Apparate selbst lange nach dem Aufhören ihrer Daseinsberechtigung.

DIE ERSTEN BEOBACHTUNGEN

UEBER

ELEKTRISCHE ENTLADUNGEN

VON

FERDINAND ROSENBERGER.

Trotzdem man schon im Alterthume die Thatsache kannte, dass einzelne Stoffe durch Reiben mit andern die Fähigkeit erlangen leichte Gegenstände an sich zu ziehen, so dauerte es doch bis in das vorige Jahrhundert herein, bevor man an den geriebenen Körpern ausser jenen schwachen Anziehungen noch andere Eigenschaften bemerkte und dann alle diese beobachteten Erscheinungen als elektrische zusammenfasste. Gerade das letztere hatte seine besonderen Schwierigkeiten. Zwar waren die Abstossungserscheinungen, die Bürgermeister Guericke zuerst an seiner geriebenen Schwefelkugel nachwies, nicht schwer als mit den elektrischen Anziehungen zusammengehörig zu erkennen; dafür aber blieben die Erscheinungen, welche auf einen Uebergang von Materie aus den elektrischen Körpern in unelektrische hinzudeuten schienen und die wir wohl mit dem Namen der elektrischen Entladungserscheinungen bezeichnen, für lange Zeit in ihrem Verhältniss zu den elektrischen Kräften um so räthselhafter. Es hat lange gedauert, bis man auf diese Vorgänge überhaupt aufmerksam wurde; aber es hat selbst, nachdem man dieselben schon vielfältig und sorgfältig beobachtet hatte, noch lange gewährt, bis man sie als Entladungserscheinungen mit den elektrischen sicher zusammenzufassen wagte. Diese frühesten Versuche die Zusammengehörigkeit der elektrischen Kräfte mit den elektrischen Lichterscheinungen festzustellen möchte ich, da sie wenig bekannt und mehr als nöthig übersehen worden sind, in Kürze schildern.

In erster Linie ist dabei Francis Hawksbee zu nennen, der im Anfange des vorigen Jahrhunderts als Experimentator der Royal Society in London die Lichtentwickelungen geriebener Körper in vielfacher Weise bahnbrechend untersuchte und diese Untersuchungen im Jahre 1709 in einem besonderen Werke unter dem Titel Physico-Mechanical Experiments on various subjects touching light and electricity bekannt machte, nachdem die einzelnen Abhandlungen bereits vom Jahre 1704 an in den Transactions der Royal Society erschienen waren. Allerdings hatte schon Jahrzehnte vor ihm unser Bürgermeister Guericke an seiner geriebenen Schwefelkugel im Dunklen ein stetiges Leuchten bemerkt und dasselbe auch klar beschrieben; aber seine Versuche waren in dieser Be-

ziehung doch so wenig umfassend und Angaben über einen etwaigen Zusammenhang der Erscheinungen fehlten bei ihm so gänzlich, dass man Hawksbee trotzdem, wenn nicht als den ersten Entdecker, so doch als ersten und eigentlichen Erforscher der mit den elektrischen zusammen auftretenden Lichterscheinungen bezeichnen muss.

Guericke gab in seinem grossen physikalischen Werke Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de Vacuo Spatio ... Quibus accesserunt simul certa quaedam de Aeris Pondere circa Terram; de Virtutibus Mundanis, et Systemate Mundi Planetario .... (Amsterdam 1672) seine Versuche, die die Elektricität betreffen, in so allgemeiner Form und unter so allgemeinen Gesichtspunkten, dass es schwer hält zu erkennen, wie weit er selbst alle die beobachteten Erscheinungen für elektrische hielt. Nachdem er in den ersten vierzehn Kapiteln des vierten Buches, das von den Welt- oder besser Naturkräften handelt, gezeigt hat, dass der Erde verschiedene Kräfte ihrer Natur nach eigen sind, wie die Kraft der Beharrung, der Anziehung und Abstossung, der Direktion, der Rotation, des Tönens, des Wärmens und des Leuchtens, kommt er im fünfzehnten Kapitel zu den Versuchen, durch welche diese Kräfte mit Ausnahme der Direktions- und Rotationskraft auch an einer geriebenen Schwefelkugel nachgewiesen werden können. Die Kraft der Beharrung beobachtet man, wenn man die Schwefelkugel durch einen Stoss bewegt hat. Die Anziehung erkennt man nach dem Reiben der Kugel mit der recht trockenen Hand an der Bewegung kleiner Schnitzel von Gold- oder Silberpapier und anderer kleiner Körper. Zur Beobachtung der Abstossung an der geriebenen Schwefelkugel benutzt man am besten eine Flaumfeder, welche zuerst angezogen, danach abgestossen und dann erst wieder angezogen wird, wenn sie vorher mit einem andern Körper in Berührung oder einer Flamme auch nur nahe gekommen ist. Uebrigens können beide, die Abstossungs- wie die Anziehungskraft, durch Leinenfäden bis über eine Elle weit von der Schwefelkugel weg geleitet werden. Die Kraft des Tönens bemerkt man, wenn man die Kugel in der Hand hält und an das Ohr bringt. Die Kraft der Wärme ruft man in der Schwefelkugel, wie in jedem Körper durch Reiben leichtlich hervor. Die Leuchtkraft endlich anlangend, so entsteht sie, nach Guerickes Worten, in ähnlicher Weise. Denn wenn man die Kugel in ein dunkles Zimmer bringt und mit trockener Hand vorzüglich des Nachts reibt, so leuchtet sie auf gleiche Weise wie Zucker, wenn man ihn stösst.

Guericke gebraucht merkwürdigerweise in diesem fünfzehnten Kapitel seines Briefes das Wort Elektricität überhaupt nicht; doch bezeichnet er in dem vorhergehenden achten Kapitel wenigstens

die Anziehungskraft der Schwefelkugel, die er hier auch als fortleitungsfähig von der magnetischen bestimmt unterscheidet, ausdrücklich als eine elektrische Erscheinung. Man hat danach vielfach geglaubt, ihm auch die Erkenntniss der Zusammengehörigkeit des Tönens und Leuchtens der geriebenen Schwefelkugel mit den elektrischen Kräften mit Sicherheit zuschreiben zu dürfen, meines Erachtens jedoch nicht mit vollem Recht. Die im vierten Buche erwähnten Weltkräfte gehören nur insofern zusammen, als sie alle unkörperliche Kräfte d. h. solche Kräfte sind, die durch das Ausströmen sehr feiner, nicht direkt wahrnehmbarer, alle körperliche Materie frei durchdringender Flüssigkeiten aus den betreffenden Körpern verursacht werden. Solcher subtilen Flüssigkeiten und damit solcher unkörperlicher Kräfte kann es sehr verschiedene geben; als elektrisch bezeichnet Guericke direkt nur die Anziehungs- und Abstossungskraft (Virtus Conservativa & Expulsiva)[1]) der geriebenen Schwefelkugel. Die im fünfzehnten Kapitel als erste unter den unkörperlichen Kräften erwähnte Beharrungskraft (v. impulsiva) ist sicher nicht elektrisch; ob die Kraft des Tönens (v. Soni) den elektrischen Erscheinungen zuzuzählen, bleibt mehr als zweifelhaft, da die Töne, welche Guericke hörte, wenn er die Schwefelkugel mit der Hand an's Ohr hielt, wohl nicht den elektrischen Funken, sondern vielmehr dem Zerreissen der erwärmten Schwefelkrystalle zuzuschreiben sind. So erscheint es zum mindesten unsicher, ob Guericke einen festen Zusammenhang zwischen dem von ihm entdeckten Leuchten der geriebenen Schwefelkugel mit der elektrischen Anziehung wirklich klar erkannt hat, wenn derselbe auch insofern wenigstens nicht zu übersehen war, als alle wirklich elektrischen Kräfte sichtlich gemeinsam durch Reiben der Schwefelkugel erzeugt wurden.

Guericke hat mit Leibniz auf des Letzteren Anregung hin, während der Jahre 1671 und 1672, also kurz vor dem Erscheinen des Guericke'schen Werkes Briefe gewechselt, die vor allem von den Versuchen mit der ge-

---

1) Direkt im strengsten Sinne bezeichnet Guericke auch nicht einmal die Abstossungskraft als elektrisch, doch folgt dies von selbst aus dem erwähnten leichten Uebergehen der Attraction in Expulsion und umgekehrt. Auch bespricht Guericke die Leitungsfähigkeit, die er als bestes Merkmal der Elektricität bezeichnet, grade in dem Artikel des 15. Kaptils, der von der Virtus Expulsiva handelt. Seine Worte aber im 8. Kapitel über die elektrische Anziehung lauten: „Sed nos, qui, in antecedenti capite denominati globi Sulphurei attractionem, eandem cum Electricâ assumimus & ex virtute Conservativâ esse vel oriri percipimus, non possumus concedere, hanc attractionem mediante aëre fieri, quia experimenta ocolariter monstrant, hunc Sulphureum Globum (attritione antea excitatum) suam quoque virtutem per filum lineum, ulnam & ultra longum, posse excercere, & ibi aliquid attrahere."

riebenen Schwefelkugel handeln.[1]) Auch hier gebraucht Guericke die Wörter elektrisch oder Elektricität an keiner Stelle, sondern spricht nur von den Virtutes Mundanae, die fast alle an der Schwefelkugel hervorzubringen seien, und betont ausdrücklich die Anwesenheit mehrerer Kräfte in der Kugel. „Item, so sagt er im ersten Briefe, es können gar viel andere wunderbare Dinge durch diese Kugel demonstriret werden, so dass man siehet, dass nicht eine, sondern einige viventes virtutes darinnen verborgen, gleichwie man vom Magnetstein siehet, in welchem die Virtus directiva Telluris, kein mehreres aber stäcket." Der Einheitsbegriff der Elektricität war eben auch bei Guericke noch nicht ausgebildet oder doch wenigstens noch nicht bewusst vollendet, wenn auch eine dunkle Ahnung von der Zusammengehörigkeit der Lichterscheinungen mit den elektrischen wohl vorhanden war. Dafür zeugen jedenfalls die folgenden Worte, mit denen Guericke die Uebersendung einer seiner Schwefelkugeln an Leibniz unter anderm begleitet: „Wenn man nicht rächtt weiss, wie sie (die Kugel nehmlich) zu atteriren und zu perstringiren, so nehme man sie bey abends infs finstere vor, da wird man sehen vff welche art sie am besten schein von sich gibt, also will sie auch tractirt sein." Dass Guericke aber, trotz seiner Betonung des knisternden Geräusches in der Schwefelkugel und trotz der Abschätzung der Stärke der Elektricität nach der Stärke des Glimmlichts, niemals einen elektrischen Funken gesehen, das geht deutlich aus einem andern Briefe Guericke's hervor, in dem er Leibniz auf dessen Bemerkungen über die Experimente mit der erhaltenen Schwefelkugel antwortet: „Desselben gar angenehms vom 31. Jan., so heisst es da, hatt mich die Vberkunft der Schwäffelkugel verständigett und dass sie wegen andere geschöffte noch nicht probiret werden können; doch hette Er die Wärme und Funken gar wohl gesprühret etc. Nuhn weiss ich nicht, ob etwan ein missverstand hierbey, vielmehr von Wärme bey der Kugel nichts beweist, die Funken aber müssten etwa von dem leuchten zu verstehen sein, wan man Sie mit trucken henden bey der nachts oder im finstern gemach bestrichett, so gibbt sie, wie der Zucker, leüchtung von sich." Schade, dass gerade der hier angezogene Brief Leibnizens nicht mehr vorhanden, denn er müsste meiner Meinung nach beweisen, dass Leibniz der Erste gewesen, der einen elektrischen Funken

1) Guericke's Briefe sind in der Königlichen Bibliothek zu Hannover, wie es scheint, noch vollständig vorhanden, Leibnizens Briefe aber wohl bis auf zwei verloren. Die Briefe sind zum grössten Theile abgedruckt in den philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, herausgegeben von C. J. Gerhardt, I. Band, Berlin 1875, S. 93—112.

beobachtet hat.[1]) Elektrisches Glimmlicht hatte übrigens um diese Zeit auch schon Robert Boyle an einem geriebenen Diamanten im Dunkeln bemerkt.

Guericke hat sich um das Studium der elektrischen Entladungserscheinungen ein grosses Verdienst insofern erworben, als er das Strömen der Elektricität in Leinenfäden als Erster sicher nachwies und klar charakterisirte. Die Zusammengehörigkeit der Lichterscheinungen aber mit dem Auftreten von elektrischen Anziehungs- und Abstossungserscheinungen hat erst Hawksbee durch einfache überzeugende Experimente demonstrirt, und selbst diesem fiel es, wie allen damaligen Physikern, noch schwer, die beobachtete Gleichzeitigkeit des Auftretens beider Erscheinungen für ein wesentliches und nicht bloss zufälliges Moment zu halten. Hawksbee aber kam zu den entscheidenden Versuchen nicht wie Guericke von der Elektricität, sondern umgekehrt vom Licht her, wenn man nach der wirklichen Aehnlichkeit mancher Aeusserungen bei Guericke und Hawksbee auch annehmen muss, dass der Letztere das Werk des ersteren sehr wohl kannte.

In der zweiten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts beschäftigten sich die Physiker sehr lebhaft mit den Phosphorescenzerscheinungen von natürlichen Mineralien und künstlich hergestellten Verbindungen und probirten alle möglichen Stoffe auf solche Eigenschaften durch. Dabei hatte man auch das matte Leuchten des Quecksilbers in der Torricelli'schen Leere eines sanftgeschüttelten Barometers entdeckt und hatte ihm wegen seiner Aehnlichkeit mit dem Phosphorescenzlicht den Namen des merkurialischen Phosphors gegeben. Doch bemühte man sich lange Zeit vergeblich, sichere Vorschriften grade für die Erzeugung dieses am meisten interessirenden Phosphors aufzufinden. Dies gelang vielmehr erst Hawksbee im nächsten Jahrhundert, indem er den vermeintlichen Phosphor als eine stete Begleiterscheinung gewisser elektrischer Vorgänge nachwies, und auch dann noch wurde seine Ansicht von den Herstellern künstlicher Phosphore erst nach langem Kampfe anerkannt.

Hawksbee führte zur bequemeren Beobachtung des merkurialischen Phosphors durch den oberen Theil des Glasrecipienten einer Luftpumpe eine vermittelst eines Hahnes verschliessbare Röhre luftdicht bis hart an den Boden des Recipienten, wo sie mit ihrer unteren Oeffnung in Quecksilber,

---

1) Mir ist nicht bekannt ob das Magdeburger städtische Archiv, das nach Direktor Paulsick (Programm der Guerickeschule, Magdeburg 1885, S. 8) ein Volumen mit der Aufschrift, „Die Edition der Experimentorum Magdeburgicorum betreffend" enthält, schon nach diesen Briefen Leibnizens durchsucht worden ist. Wie aus dem obigen Briefe Guericke's hervorgeht, wäre das ein sehr zu wünschendes Unternehmen.

das dort in einem hohen Cylinderglase sich befand, eintauchte. Oeffnete man dann, nachdem man die Luft aus dem Recipienten ziemlich weit ausgezogen hatte, den Hahn der Glasröhre, so dass die äussere Luft durch die Glasröhre wieder in den Recipienten einströmen konnte, so glühten die emporgeworfenen Quecksilberkügelchen rings um die Röhre herum in heftigem Feuer und glichen einer flammenden Masse aus lauter glühenden Punkten. Diese Erscheinung hielt an, bis der Recipient nahezu halb wieder mit Luft gefüllt war.

Um die Abhängigkeit dieser merkwürdigen Lichterscheinungen von der Stärke der Luftverdünnung genauer zu untersuchen, construirte Hawksbee einen etwas complicirteren Apparat, an dem er alsobald sogar zweierlei verschiedene Arten der elektrischen Lichter beobachtete. Er brachte auf einem grossen Recipienten ein zweites kleines Gefäss an, das mit c. $1^1/_2$ Pfund Quecksilber etwas über die Hälfte gefüllt war. Dieses obere Gefäss stand mit dem Recipienten nur durch eine enge Oeffnung im Boden in Verbindung, die aber durch einen Holzpfropf mit längerem Stiel verschlossen werden konnte. In dem Recipienten befand sich dann noch ein kleineres oben geschlossenes und unten offenes Glasgefäss so aufgestellt, dass das Quecksilber beim Ausfliessen aus dem oberen Gefäss auf dieses innere fallen und an den Aussenwänden desselben herabfliessen musste. Wurde nun der Recipient genugsam ausgepumpt und dann der Verschlusspfropf des oberen Gefässes etwas gelüftet, so gab das ausfliessende Quecksilber beim Auftreffen auf das innere Gefäss einen prachtvollen Feuerschauer. Dabei leuchtete aber ganz unzweifelhaft nur das Quecksilber, welches an den Glaswänden wirklich herabfloss, nicht dasjenige, welches frei herunterfiel, und selbst die kleinen Theilchen, welche an dem Glase hängen blieben, leuchteten nicht.

Bei mehrfacher Wiederholung dieses Versuchs, besonders mit so grossen Mengen von Quecksilber, dass das Quecksilber mehrere Minuten zum Auslaufen brauchte, zeigte sich aber neben diesem beschriebenen matten und gleichmässig sich verbreitenden, fast continuirlichen Licht von purpurner Färbung noch ein anderes von mehr bleicher, weisslicher Farbe, das, in sich nicht zusammenhängend, eher den Blitzstrahlen[1]) glich und vor allem den oberen Theil des Recipienten erfüllte. Auch dieses Blitzlicht folgte in der Hauptsache den fallenden Quecksilber-

1) Hawksbee, Experiments, p. 9: And now the descending Mercury did not only appear like a Shower of Fire (which it did at the first Trial), but also the Light darted thick from the Crown of the included Glass, like Flashes of Lightning, of a very pale colour, and easily distinguishable from the rest of the Light produced.

kügelchen, ging aber von diesen aus nach allen Seiten und besonders von den Kügelchen nach dem Recipienten hin.

Hawksbee erkannte bald, dass die Art des Leuchtens bei diesen Versuchen durch die grössere oder geringere Verdünnung oder überhaupt durch die Dichte der Luft bedingt wurde, und glaubte in Betreff der Ursache der Erscheinungen annehmen zu dürfen, dass dieselbe nur in der Reibung des Quecksilbers an den Glaswänden zu suchen sei. Zur Prüfung der letzteren Annahme schüttelte er direkt das Quecksilber in gläserne Hohlkugeln, die er beliebig evacuiren oder auch mit Luft füllen konnte, und der Erfolg entsprach voll seinen Erwartungen. Wenn die Kugel nahezu luftleer war, so schien das Licht zusammenhängend und purpurn gefärbt; schüttelte er aber die Kugel lufterfüllt, so zeigten sich in derselben nur Lichtfunken, weisslich leuchtend wie die Sterne in der Milchstrasse.[1])

Aber auch das Quecksilber schien bei der Erzeugung der Lichter nicht einmal wesentlich zu sein, und nur das Reiben des Glases mit geeigneten Stoffen im luftverdünnten oder lufterfüllten Raume blieb schliesslich noch für jene Erzeugung nothwendig. Zur Prüfung der Vermuthung construirte sich Hawksbee besondere Apparate, mit denen er Glas oder Bernstein mit Wolle, oder Glas mit Austernschalen u. s. w. in Luft oder im Vacuum reiben konnte, und immer entstanden auch hierbei die schon früher beobachteten Lichter, das zarte, pupurngefärbte Glimmlicht, oder das weissliche, lebhafte Blitzlicht, je nachdem diese Lichter im luftverdünnten oder lufterfüllten Raume sich entwickelten.

Damit war die erste Aufgabe Hawksbee's, sichere Vorschriften für die Erzeugung des merkurialischen Phosphors zu geben, gelöst; er ging nun weiter dazu über die Eigenschaften dieses Phosphors noch genauer zu erforschen und vor allem sein Wesen, wenn möglich, zu ergründen. Für diese Untersuchungen construirte er sich wieder eine besondere Maschine, dieselbe bestand im wesentlichen nur aus einer hohlen, neun Zoll im Durchmesser haltenden Glaskugel, die mit Hilfe eines grossen Rades und einer Schnurenübersetzung sehr schnell um ihre Achse gedreht werden, und die man dabei durch die hohle Achse, selbst während des Drehens beliebig evacuiren oder auch mit Luft erfüllen konnte. Berührte man die luftleer gemachte Glaskugel während des Rotirens mit der trockenen Hand, so zeigte

1) Ibid., p. 15: The difference between these lights consists particularly in this, that the luminous Particles are distinct and separate in the one, and united or blended into one continued body of Light in the other ... That light which is produced in vacuo, or a very much rarefied Medium, is not the same whith this produced in the open Air.

sich bei Dunkelheit in jener ein continuirliches, purpurfarbenes Licht, das hell genug war um bei seinem Scheine in einiger Entfernung noch lesen zu können. Liess man aber die Luft in die Kugel ein, so änderte sich dieses Licht grade so wie das vorher erwähnte Quecksilberlicht um, es wurde blitzartig, und wenn man von aussen der Kugel nur einen Finger näherte, so fuhren in der Kugel leuchtende Blitze in der Richtung nach diesem Finger hin.

Ja, wenn während der Zeit, dass Hawksbee seine Hand leicht an die eine Seite der rotirenden Kugel hielt, irgend Jemand von der anderen Seite her seinen Finger der Kugel nur bis auf einen Zoll Entfernung näherte, ohne die Kugel zu berühren, so sah man, wie mehrere Anwesende bezeugten, sogar ein Licht aus der Kugel gegen den Finger fahren, und es wurde zu gleicher Zeit bemerkt, dass auch die Halsbinde von Hawksbee leuchtend wurde, ohne dass das Licht in der Kugel irgend wie mit ihr in Verbindung stand.[1])

Hawksbee hielt wohl jetzt für mehr als wahrscheinlich, dass der sogenannte merkurialische Phosphor nicht zu den eigentlichen Phosphoren zu rechnen sei; denn diese werden durch Belichten und Glühen besonderer Stoffe erregt, während jener durch das Reiben der verschiedensten Stoffe an Glas hervorzubringen ist. Doch giebt er zu, dass auch im Quecksilber vielleicht noch ein eigenthümliches Princip des Leuchtens enthalten sei, wie ja noch manche andere Stoffe, wie z. B. Zucker, beim Zerbrechen oder Zerstossen im Dunkeln leuchteten. Nur seien diese letzteren immer noch dadurch vom Lichte des geriebenen Glases zu unterscheiden, dass sie bei jeder Witterung gleich gut sichtbar wären, während Feuchtigkeit das Glaslicht sehr schwäche, oder gar unsichtbar mache. Hawksbee hatte bis dahin der Elektricität noch keine Erwähnung gethan, doch zeugt die letztere Bemerkung, wie überhaupt die Betonung, dass der merkurialische Phosphor nur durch Reiben erzeugt werde, dafür, dass er den Zusammenhang zwischen diesen Lichtern und den elektrischen Erscheinungen bis dahin wohl schon erkannt hatte, ein Zusammenhang, der ja auch, da man das Elektrischwerden des Glases durch Reiben seit langem beobachtet, kaum zu verkennen

1) Nay, while my Hand continued upon the Glass (the Glass being in motion) if any Person approached his Fingers towards any part of it in the same Horizontal Plane with my Hand, a Light would be seen to stick to 'em at the distance af an inch or there abouts, without their touching the Glass at all; as was confirmed by several then present. And 'twas observ'd also that my Neckcloth, at the same time, at an inch or two distance from the Globe appear'd of a fiery colour, without any Communication of Light from the Globe. (Hawksbee, Experiments, p. 37.)

war. Die Behutsamkeit aber, mit der Hawksbee die Brücke zwischen Licht und Elektricität schlug, lässt erkennen, wie schwer es ihm und der physikalischen Welt von damals wurde eine Verbindung zwischen diesen scheinbar so fremden Gebieten anzunehmen.

Trotzdem ging Hawksbee jetzt entschieden in dieser Richtung vor und statt wie früher vom Licht aus sich der Elektricität zu nähern, versuchte er nun von unzweifelhaft elektrischen Versuchen aus zum Licht zu kommen. Dabei gelangte er, der bis jetzt immer an erster Stelle die Vorgänge innerhalb der geriebenen Körper beobachtet hatte, von selbst zu genauerer Beachtung der Vorgänge ausserhalb derselben und näherte sich mehr der Erkenntniss des Ueberganges der Elektricität oder der Entladungserscheinungen zwischen verschiedenen Körpern, wenn auch das überwiegende Interesse, das er an den Lichterscheinungen im luftverdünnten Raume nahm, ihn immer an einer fruchtbaren Verfolgung dieser gewonnenen Erkenntnisse hinderte.

Hawksbee nahm also jetzt, um sich in der Form den gewöhnlichen elektrischen Versuchen noch mehr zu nähern, für seine weiteren Experimente statt der Glaskugel eine Glasröhre, und zwar zur stärkeren Wirkung von 30 Zoll Länge bei ungefähr 1 Zoll Durchmesser und rieb dieselbe wieder mit der recht trockenen Hand, bis sie ziemlich warm wurde. Dann konnte er an derselben in beträchtlicher Stärke alle die Erscheinungen nachweisen, die bis dahin als elektrische bekannt und anerkannt waren. Ja selbst dem Gefühl waren die elektrischen Effluvien, wenn die Röhre recht stark gerieben wurde, deutlich erkennbar; denn wenn man die geriebene Röhre nahe vor das Gesicht hielt, so hatte man die Empfindung, als ob man mit feinen Pinselhaaren überstrichen würde. Wurden aber diese Versuche im Dunkeln angestellt, so bemerkte man ausser diesen Erscheinungen auch noch, dass der reibenden Hand in der Röhre stetig ein helles Licht folgte; und wenn man eine andere Hand von aussen nahe an die geriebene Röhre hielt, so brach sogar das Licht nach der Hand hin frei aus der Röhre heraus und man hörte ein knackendes Geräusch, ähnlich dem eines grünen Blattes im Feuer, nur nicht so laut. So waren die Erscheinungen beschaffen, wenn die Röhre mit Luft erfüllt blieb; zog man aber diese fast ganz aus der Röhre heraus, so entstand bei dem Reiben in der Röhre der merkurialische Phosphor, dessen Licht auf die Röhre beschränkt blieb und nicht die Fähigkeit hatte auf einen Körper ausserhalb der Röhre überzuspringen.

Noch stärkere Lichtfunken als die Glasröhre gab die in der Hawksbee'schen Maschine rotirende Glaskugel, wenn sie lufterfüllt war, nach aussen ab, so dass die Funken dem genäherten Finger selbst fühlbar wurden.

Das Licht, sagt Hawksbee[1]), war nicht nur sichtbar, sondern es schien auf den Finger mit einiger Kraft zu treffen, die als eine Art von leichtem Druck gefühlt wurde, obgleich der Finger noch einen halben Zoll von der Kugel entfernt war. Das Licht verursachte bei seinem Hervorbrechen aus der Kugel ausserdem ein beträchtliches Geräusch, das leicht von dem Geräusch der Maschine zu unterscheiden war, und das man ebenso wie das Licht, selbst bei Tage bemerken konnte.

Diese Versuche Hawksbee's, welche, abgesehen von den nicht mehr direkt festzustellenden Erfahrungen Leibnizen's[2]), die ersten Beobachtungen elektrischer Funken enthalten, wurden in den Jahren 1706 bis 1708 angestellt und in den Philosophical Transactions der Royal Society veröffentlicht. In dem letzten der genannten Jahre erschien aber in denselben Blättern noch eine andere Abhandlung[3]) über solche Funken, die den Abdruck eines Briefes bildete, den ein anderes Mitglied der Royal Society, ein Dr. Wall, an Sloane, den Secretär der Gesellschaft, gerichtet. Obgleich diese letztere Abhandlung an wissenschaftlicher Sorgfalt und umfassender Erfahrung die Abhandlungen Hawksbee's bei weitem nicht erreicht, so ähnelt sie ihnen doch insofern, als sie von demselben Ausgangspunkt, den Phosphoren, ausgehend in Betreff der Funken ungefähr dasselbe Ziel erreicht, ein Zeichen dafür, dass der hier befolgte Gang der Entwicklung dem allgemeinen Stande der Kenntnisse entsprach. Merkwürdigerweise nehmen die beiden Experimentatoren, deren Arbeiten sich hier so nahe berühren, in ihren Veröffentlichungen von einander absolut keine Notiz.

Dr. Wall erzählt, dass er sich schon seit dem Jahre 1680 auf eine Anregung des berühmten Boyle hin mit dem Leuchten des künstlichen Phosphors beschäftigt habe, aber, weil dessen Herstellung so weitläufig, auf die Suche nach natürlichen Phosphoren gegangen sei. Da er nun den Bernstein von ähnlicher Zusammenzetzung wie den künstlichen Phosphor gefunden, so habe er in jenem einen natürlichen Phosphor vermuthet und danach ein Leuchtendwerden desselben im Dunkeln mit wirklichem Erfolge erzeugt, indem er nur den Bernsteingriff seines Stockes im Dunkeln mit der Hand leicht gerieben. Danach aber habe er sich ein besonders grosses

1) Hawksbee, Experiments, p. 51: I was surprized with the appearance of a brisk and vigorous Light continued between the point of my Finger and the Glass. It was not only visible, but seem'd as it were to strike with some force upon it, being easily to be felt by a kind of gentle pressure, tho'the moving Body was not touch'd with it by near half an inch . . .

2) Siehe Seite 94.

3) Of the Luminous Qualities of Amber, Diamonds, Gum-Lac, by Dr. Wall; Phil. Trans. no. 314, p. 69; auch Phil. Trans. abr. IV. pt. II, p. 275.

langes und schmales, gut polirtes Stück Bernstein verschafft, das schon bei ziemlich schwachem Reiben mit der trockenen Hand ein merkliches Licht von sich gegeben, und habe weiter durch vieles Probiren gefunden, dass der Bernstein durch Reiben mit wollenem Zeug stärker als durch alle anderen Reibstoffe leuchtend werde. Auf diese Weise seien auch ganz neue Erscheinungen beobachtet worden. Während der Stockgriff nur gleichmässig matt beim Reiben geleuchtet, sei beim Reiben des grösseren Stückes Bernstein mit Wolle ein erstaunlich mannigfaltiges Knistern oder Krachen gehört und bei jedem Krachen noch eine kleine Flamme, ein kleiner Lichtblitz, gesehen worden. Wenn man nur einen Finger in geringer Entfernung an den stark geriebenen Bernstein gehalten, so habe man einen starken Lichtblitz gesehen, dem ein starkes Krachen gefolgt sei; und was ihn am meisten verwundert, der Finger sei dabei wie von einem Stosse oder Windhauche ziemlich bemerkbar getroffen worden. Ja als zuletzt ein noch längeres und grösseres Stück Bernstein erkauft und mit vieler Sorgfalt gerieben worden sei, habe das Krachen und das Licht eine solche Stärke erlangt, dass man es sehr wohl mit Donner und Blitz habe vergleichen können.

Dr. Wall, viel kühner als Hawksbee, stellt diese Lichterscheinungen ohne weiteres mit den elektrischen Kräften zusammen und hält sich ohne weitere beweisende Versuche für überzeugt, dass alle oder doch die meisten Körper, welche durch Reiben elektrisch geworden sind, auch Lichterscheinungen zeigen müssen, weil eben nach seiner Meinung nichts anderes die Ursache der elektrischen Wirkungen sein kann als die in allen Körpern enthaltene Licht- oder Feuermaterie selbst.

Hawksbee strebte wohl sichtlich demselben Ziele zu, hielt es aber noch nicht an der Zeit die wesentliche Identität der elektrischen Licht- und Anziehungserscheinungen schon als sicher auszusprechen und bemühte sich durch immer neue Versuche wenigstens die zeitlichen Zusammenhänge beider nachzuweisen. Für die geriebene Glasröhre, deren elektrische Kräfte längst bekannt, waren diese Zusammenhänge nach der Demonstration der Lichterscheinungen innerhalb und ausserhalb derselben genügend klar; für die geriebene rotirende Glaskugel, für die neue Hawksbee'sche Lichtmaschine, aber musste die elektrische Natur der auftretenden Erscheinungen erst noch weiter nachgewiesen werden. Zu diesem Zwecke brachte Hawksbee über und neben der rotirenden Glaskugel, oder auch in derselben, an Metalldrähten frei herabhängende Baumwollfäden an, die dann immer, so wie die trockene Hand an die rotirende Kugel gehalten wurde und die Lichter in der Kugel sich zeigten, direkt nach der geriebenen Glasfläche, auch der Schwere entgegen, hingezogen wurden.

Dabei kam er am Schlusse seiner Untersuchungen nochmals zu einer neuen Entdeckung, welche wieder auf einen ganz neuen Zusammenhang zwischen Elektricität und Licht hindeutete, die aber zu ihrer Zeit fast ganz ohne Beachtung blieb und die bis auf unsere Zeit nicht wieder discutirt worden ist. Er überzog nämlich seine Glaskugel im Innern zu beiden Seiten des Aequators mit einer dünnen Schicht Siegellack, machte dann die Kugel möglichst luftleer und berührte dieselbe, während sie rotirte, von aussen wie gewöhnlich leicht mit der Hand. Dann bemerkte er in der Dunkelheit, wenn er von den Polen her in die Kugel hineinsah, auf der inneren Seite des Siegellacks deutlich die Umrisse der aussen auf dem Glase liegenden Hand, ganz so, als ob das Siegellack wie das Glas durchsichtig wäre. Eine geringe Menge von Luft aber, die in die Kugel eingelassen wurde, zerstörte die ganze Erscheinung und machte das Siegellack wie gewöhnlich undurchsichtig. Hawksbee wusste auch diese wunderbare Erscheinung, die an die modernen Röntgenstrahlen erinnert, noch ganz plausibel zu erklären. Die Elektricität und das Licht, sagt er, seien nach dem allgemeinen Dafürhalten beide durch körperliche Ausflüsse aus den elektrischen bezüglich leuchtenden Körpern bedingt. Wenn man nun zuzugeben vermöge, was an sich nicht unwahrscheinlich sei, dass ähnliche elektrische Körper, wie Glas und Siegellack, auch gleiche körperliche Ausflüsse hätten und wechselseitig einer die Ausflüsse des andern aufzunehmen und wieder auszusenden vermöge, so sei es ganz von selbst klar und durch die Natur der Sache gefordert, dass auch ein undurchsichtiger Körper, wie Siegellack, sich den Ausflüssen eines elektrisch ähnlichen, aber durchsichtigen Körpers, wie Glas, gegenüber ganz wie dieser verhalten und also für die Strahlen, die durch den letzteren hindurch gegangen, selbst eine gewisse Durchsichtigkeit zeigen könne.

Auch Hawksbee's schöne Entdeckungen fanden ihrer Zeit aus äussern und innern Gründen nicht die gebührende Beachtung. Zuerst wohl darum nicht, weil man die neuen Beobachtungsresultate noch nicht recht in dem System der physikalischen Disciplinen unterzubringen wusste und darum auch die Beschäftigung mit solchen Dingen noch nicht für voll berechtigt in der Wissenschaft anerkannte. Dann aber auch, weil die Interessen der damaligen Physiker in England vor allem der Ausbildung der Newton'schen mathematischen Physik zugewandt waren und jene elektrischen Erscheinungen nicht recht in das Spiel der Newton'schen Kräfte passen wollten. Vielleicht spricht für die starke Wirksamkeit dieser Ursache auch das geringe Interesse, das man zur Zeit an den Personen der elektrischen Arbeiter nahm. Hawksbee war Experimentator der Royal Society und also eines der bekanntesten Glieder dieser Gesellschaft, aber

von seinen Lebensumständen ist kaum etwas, nicht einmal eine ganz sichere Angabe seines Todesjahres, auf uns gekommen. Seine sehr zahlreichen Abhandlungen, die in den Philosophical Transactions von 1704 bis 1713 erschienen waren, wurden bei dem abgekürzten Wiederabdruck der Transactions mit nur ein paar Ausnahmen weggelassen, darunter auch diejenigen, die Hawksbee erst nach dem Erscheinen seines Sammelwerkes von 1709 veröffentlicht hatte. Von dem eben erwähnten Dr. Wall, der zuerst Funken hervorbrachte, die er mit dem Blitze verglich, und dessen Abhandlung ebenfalls in den Philosophical Transactions abgedruckt wurde, ist uns gar kein anderes Datum seines Lebens, nicht einmal sein Vorname erhalten. Selbst der gleich zu erwähnende Stephen Gray, dessen elektrischen Arbeiten nun nicht bloss das Interesse, sondern auch die Arbeit hervorragender Physiker in England wie in andern Ländern lebhaft anregten, wie auch sein Freund und Mitarbeiter Granville Wheler, konnten, obgleich beide Mitglieder der Royal Society waren, von persönlichen Nachrichten nichts weiter als Tag und Jahr ihres Todes auf die Nachwelt bringen. Der Elektricität fehlte damals in der Wissenschaft noch durchaus die Hoffähigkeit, die sie allerdings nach einigen Jahrzehnten schon um so schneller und günstiger erlangte.

Dabei darf man nicht verkennen, dass auch in den Arbeiten Hawksbee's selbst Gründe für die geringe Wirkung lagen, die sie ihrerzeit ausübten. Die Versuche Hawksbee's waren zum grössten Theile keineswegs einfach und liessen sich nur mit ziemlich complicirten maschinellen Vorkehrungen und darum auch nur mit ziemlichen Kosten wiederholen. Zur Aufwendung der erforderlichen Kosten und der grossen Mühen, die sie nöthig machten, reizten aber die zarten, nur im Dunklen zu beobachtenden Lichterscheinungen um so weniger an, als Hawksbee grade auf die erstaunlichsten Phänomene, die elektrischen Funken, das geringste Gewicht legte. Jedenfalls waren alle die hervorgebrachten elektrischen Lichter nicht so stark, dass sie sich ein Interesse, welches man ihnen nicht mit freiwilligem Verständnisse entgegenbrachte, hätten erzwingen können. Auch die grosse theoretische Bedeutung seiner Entdeckungen verbarg Hawksbee eher, als dass er sie klar stellte, indem er jeden kühneren Schluss aus seinen Erfahrungen entweder ganz vermied oder nur mit vorsichtigster Verklausulirung aussprach und stetig bemüht war, die neue Erscheinung in hergebrachter Weise zu erklären. So hielt Hawksbee bis zuletzt an den alten Vorstellungen fest, nach denen die elektrischen Kräfte geriebener Körper nur durch die Ausflüsse feiner Materien aus den Körpern zu erklären seien, die durch das Reiben herausgetrieben, in krummen Linien auch alsobald wieder in den Körper zurückkehrten, wodurch, wie das nach damaligen Erfahrungen

wahrscheinlich war, die durch das Reiben erregten elektrischen Eigenschaften in kurzer Zeit von selbst wieder verschwanden. Nach diesen Vorstellungen, die um den elektrisirten Körper Wirbelbewegungen annahmen, in deren Wirkungskreis nahe Körper leicht hineingezogen werden konnten, die aber doch, ohne auf andere Körper überzugehen, bald von selbst erlöschen mussten, war eine Mittheilung von Elektricität zwischen den Körpern, eine Bewegung von Elektricität in denselben, eine Ladung und Entladung, endlich eine Vermehrung der Elektricität über den geringen Grad der durch Reibung erzeugten hinaus niemals möglich, und ein bestimmter weiterer Fortschritt in der Entwickelung in keiner Weise angezeigt. In entsprechender Weise wurden die Lichterscheinungen aus dem Mitgerissen- und dadurch äusserlich Sichtbarwerden des Lichtstoffes durch die elektrischen Ausflüsse erklärt und für die weitertreibende Frage, nach dem Verhältnis zwischen dem Wesen der elektrischen Ausflüsse und dem Lichtstoff, verweigerte Hawksbee ausdrücklich eine sichere Antwort und unterschied bis zuletzt sorgfältig zwischen den elektrischen Kräften und den sie begleitenden Lichterscheinungen.

So blieben die Arbeiten Hawksbee's mehr als zwanzig Jahre ohne weitere Folgen, dann aber knüpfte der folgende rasche Fortschritt doch wieder direkt an diese Arbeiten an, und gerade die von Hawksbee entdeckte aber nicht recht gewürdigte Funkenentladung wurde, wie es auch natürlich war, die Ursache für die Entdeckung der Fortpflanzung der Elektricität ausserhalb und innerhalb der Körper.

Stephen Gray hatte schon im Jahre 1720 bei elektrischen Versuchen, die sonst nichts Neues zu Tage förderten, eine leise Ahnung von der Möglichkeit einer Mittheilung von Elektricität zwischen verschiedenen Körpern erlangt. Bei seinen Versuchen mit Glasröhren und Flaumenfedern, die zur Bequemlichkeit an dünnen Stäben befestigt waren, habe er, so schreibt er damals, oft bemerkt, dass die Fibern der Feder, wenn sie nach anfänglichem Anziehen durch die Glasröhre von derselben wieder abgestossen wurden, dann zu dem Stab sich hinbogen, als ob dieser elektrisch geworden oder als ob dem Stab oder auch der Feder Elektricität mitgetheilt worden sei.[1]) Er habe dann versucht die Feder selbst durch leises Reiben elektrisch zu machen und dabei auch vollen Erfolg gehabt.

Weiter aber kommt er hier nicht; zehn Jahre später dagegen knüpft er direkt an Hawksbee's Beobachtungen von dem Uebergange der

1) Phil. Trans., no. 366, p. 104; Sept. 1720, auch Phil. Trans. abridg., vol. VI, pt. II, p. 4: as if it had been an electric body, or as if there had been some electricity communicated to the stick or feather.

elektrischen Lichter zwischen verschiedenen Körpern an und constatirt dann glücklich die Bewegung der Elektricität in geeigneten Stoffen durch direkte Versuche. Er habe, so sagt er in einer ersten Abhandlung vom Januar 1731[1]), zunächst einige Versuche mit Metallen gemacht, um zu erkunden, ob nicht auch diese auf irgend eine Weise, durch Reiben, Hämmern oder Erhitzen, elektrisch werden könnten, doch ohne allen Erfolg. Danach habe er wieder zur Glasröhre gegriffen, um mit Hilfe dieser Neues zu entdecken. Ihm sei nämlich eine Idee, die er schon einige Jahre vorher gehabt, wieder in den Sinn gekommen, ob denn nicht die geriebene Glasröhre, ebenso wie Licht, den Körpern auch Elektricität mittheilen könne, wenn er auch damals nicht geahnt habe, dass die Anziehung der Röhre auf so weite Entfernungen so stark wirken könne, wie sich das nachher wirklich gezeigt. Gray ging dann in der Prüfung dieser Idee mit aller Sorgsamkeit zu Werke. Er nahm zum Elektrisiren eine Glasröhre von 3 Fuss 5 Zoll Länge und ungefähr $1^2/_{10}$ Zoll Durchmesser, die er zum Abhalten des Staubes an beiden Enden durch Korke verschloss, und untersuchte zuerst, ob dieser Verschluss irgend einen Einfluss auf die Elektrisation der Röhre habe. Im Verhalten der Röhre konnte er dabei, ob sie offen oder geschlossen, keinen Unterschied finden; dagegen bemerkte er zu seinem grossen Erstaunen, dass beim Reiben der Körper nicht bloss diese, sondern auch die Korke die Probefedern angezogen und dass also den Korken Elektricität mitgetheilt werden musste.[2]) Zur weiteren Prüfung dieser Idee steckte er in den Kork an dem einen Ende nach der Reihe dünne Stäbchen von vier, dann acht und endlich zwanzig Zoll Länge, an welche vermittelst dünner Baumwollenfäden eine Elfenbeinkugel gehängt wurde, auch ersetzte er die Stäbchen durch Drähte aus verschiedenen Metallen und fand immer, dass mit dem Reiben der Glasröhre auch die Elfenbeinkugel die Fähigkeit des Anziehens und Abstossens erlangte. Damit hielt er die Fortpflanzungsfähigkeit der Elektricität in Körpern für erwiesen und ging dann dazu über die verschiedenen Stoffe in der angegebenen Weise auf ihre Leitungsfähigkeit für Elektricität systematisch zu prüfen. Dabei entdeckte er nicht bloss sehr bald das Verfahren einen leitenden Körper in nichtleitenden Schnüren isolirt aufzuhängen, sondern konnte auch auf diese Weise sehr leicht den thierischen und sogar den menschlichen Körper als leitend nachweisen und Elektricität in denselben aufsammeln. Er legte einen Knaben von acht bis neun Jahren horizontal auf isolirende

1) Phil. Trans., no. 417, p. 18; Phil. Trans. abr., vol. VI, pt. II, p. 5.

2) „I was much surprized, and concluded that there was certainly an electric virtue communicated to it by the excited tube.“ Nach Gray's eigener Datirung stammen diese Arbeiten noch aus dem Anfange des Jahres 1729.

Seile und berührte die Füsse desselben mit der geriebenen Glasröhre; dann zog der Kopf des Knaben sogleich leichte Gegenstände, die auf einem Tischchen in seiner Nähe lagen, an, und vielfach variirte Versuche ergaben immer entsprechende Resultate.

Diese Thatsache, dass auch der menschliche Körper ohne jede Unbequemlichkeit die geheimnissvolle Kraft der Elektricität aufnehmen könne, erregte allgemeines Aufsehen[1]); doch wurde dieses sogleich durch weitere Ueberraschungen noch übertroffen, und damit eigentlich erst erlangte die Elektricität als wissenschaftliches Object die allgemeine Anerkennung. Die Versuche Gray's wurden überall, besonders auch in Frankreich, sogleich wiederholt. Der Aufseher der königlichen Gärten, Charles du Fay in Paris, legte sich selbst, weil er den Knaben etwaigen unvorhersehbaren Fährlichkeiten nicht aussetzen wollte, in die isolirenden Schnüre, oder setzte sich auch auf ein Brett, das über diese Schnüre gelegt war, und liess sich so mit einem langen Glasstabe die Fähigkeit elektrischer Anziehungen mittheilen. Als dann einer seiner Gehülfen einmal ein Goldblättchen, das sich zufällig an den Fuss du Fay's angehangen hatte, ahnungslos wegnehmen wollte, hörte er in dem Momente, wo er dem Fusse mit der Hand nahe kam, ein eigenthümliches Knistern dem gleich, welches von dem geriebenen Glasrohr selbst beim Annähern der Hand ausgeht, nur stärker, in dem genäherten Finger aber verspürte er einen kleinen stechenden Schmerz, den ähnlich auch du Fay in denselben Augenblicken an der entsprechenden Stelle des Fusses empfand. Dufay wiederholte den Versuch auch im Dunkeln und fand, was er ausdrücklich für leicht voraussehbar erklärt[2]), dass jedem knackenden oder knisternden Geräusch ein Lichtblitz, also ein Uebergang von Lichtmaterie aus dem elektrischen in den unelektrischen Körper, entsprach.

Dufay hatte damit drei neue Erscheinungen mit einander und der Elektricität verknüpft und diese Verknüpfung sogar für leicht denkbar erklärt, das waren der Lichtblitz, das hörbare Knistern und die stechende Empfindung auf der Haut. Alle drei Erscheinungen wiesen auf einen Uebergang von elektrischer Materie aus einem Körper in den

---

1) Prof. Bose sagt in seinem Lehrgedicht „Die Elektricität" S. V:
„Verwegener Brite Gray, kennst Du genug die Kraft
Von der unglaublichen und neuen Wissenschaft?
Und darfst Du Dich also, Verwegner, unterwinden,
Dein Elektricität mit Menschen zu verbinden."

2) Uebersetzung der Abhandlung Du Fay's in den Phil. Trans. no. 431, p. 258. Phil. Trans. abr., vol. VIII, p. 395: „And in the Dark, these Snappings are, as may be easily imagined, so many Sparks of Fire."

andern hin und mussten nothwendig zu dem Begriff der elektrischen Entladung führen. Dufay selbst aber verfolgte diesen Weg nicht weiter. Er beobachtete zwar, dass man aus dem elektrisirten menschlichen Körper ebenso wie durch einen andern organischen Körper Funken durch Metalle, aber nicht durch Wolle etc., also doch wohl nur durch Leiter, ziehen könne; aber er hielt doch an einer mechanischen Anschauung hier nicht fest, denn er meinte, dass man die Funken nur aus lebendigen Körpern erhalten könne und dass todte organische Körper keine Lichtblitze, sondern nur ein mattes Glimmlicht bei der Elektrisation geben könnten. Dagegen verfolgte nun Gray nach dem Bekanntwerden diese Richtung der Versuche direkt weiter, und ihm ist danach der Nachweis der elektrischen Ladung und Entladung voll und ganz, wenn wir den beliebten Ausdruck gebrauchen wollen, zuzuschreiben.

Bisher hatte man einzig und allein Nichtleiter durch Reiben elektrisch gemacht, die ihre Elektricität nur allmählich abgaben; Gray aber zeigte nun an Leitern experimentell, dass mit dem Herausbrechen von Licht aus elektrisirten Körpern auch immer die Elektricität derselben ganz oder zum Theil schwindet. Dufay hatte wohl aus dem Ueberspringen des Lichts auch auf den Fortgang von elektrischen Materien geschlossen; Gray aber wies nun die Erschöpfung des elektrischen Körpers bei der Mittheilung an andere experimentell nach.[1]) Er hing dazu seinen Knaben wie gewöhnlich in Seidenschnüren auf und elektrisirte denselben mit dem geriebenen Glasstabe. Auf die eine Seite des Knaben stellte sich dann ein Herr mit einem Pendelfaden in der Hand, mit welchem er den elektrischen Zustand des Knaben untersuchte, und der also als Elektroskop diente. Auf der anderen Seite des Knaben stellte sich auf eine Harzplatte ein andrer Herr, der als zweiter Conduktor gebraucht wurde. Liess man dann den Knaben seine Hand der des isolirten Herrn so weit nähern, sodass ein Funke zwischen beiden übersprang, so war mit dem Fadenpendel eine Verminderung der Elektricität des Knaben, ebenso wie ein Elektrischwerden des isolirten Mannes sicher zu constatiren, und nach drei- bis viermaligem Ueberschlagen von Funken zwischen den beiden zeigte sich alle Elektricität von dem Knaben auf den isolirten Mann übergegangen, sogar ohne dass die beiden sich direkt berührt hätten. Auf ganz dieselbe Weise konnte Gray auch die Elektricität des Knaben auf drei und mehr isolirte Personen, die sich die Hände gereicht hatten, gleichmässig vertheilen.

Trotz aller Schwierigkeiten, welche die Ausbildung des Begriffs der

1) Phil. Trans. no. 439, p. 166, June 12, 1735; Phil. Trans. abr., vol. VIII, pt. II, p. 401.

elektrischen Entladungserscheinungen den Physikern gemacht hatte und noch längere Zeit machte, konnte man diesem Begriffe theoretisch doch leicht ohne zu grosse Umwälzung der alten Vorstellungen gerecht werden. Unter dem Einflusse der Newtonschen Schule hatte sich die Meinung ausgebildet, dass alle besonderen physikalischen Kräfte an besondere Materien, wie die allgemeine Attraction an die ponderable Materie, die Leuchtkraft an den Lichtstoff u. s. w. gebunden wären. Diese Ansicht liess sich nun leicht auch bei den elektrischen Erscheinungen entsprechen, wenn man nur die bisher angenommenen wirbelnden elektrischen Ausflüsse aus den elektrischen Körpern nicht wieder in diese zurückkehren, sondern von ihnen frei auf andere unelektrische Körper übergehen liess. Freilich durfte man dann diese elektrische Materie nicht mehr als besonders an einzelne Körper gebunden ansehen, sondern musste sie als eine neue physikalische Materie, gleichberechtigt und unabhängig, wie Licht und Wärme etc. anerkennen. Aber das entsprach auch vollständig den damaligen Anschauungen; und als man nach den Erfindungen der Elektrisirmaschine und der Verstärkungsflasche die Entladungserscheinungen immer mächtiger hervorrufen lernte, zweifelte niemand mehr an der Existenz des neuen imponderablen Stoffs, der Elektricität. Dieser Stoff hatte als Grundeigenthümlichkeit die Kräfte der elektrischen Anziehungen und Abstossungen, vermochte aber bei starken Entladungserscheinungen auch die andern imponderablen Materien mit sich zu bewegen und in Erregung zu bringen. Dass das Herausströmen der Elektricität aus einem Körper in einen andern sich dem Gefühl in verschiedener Weise als Druck, Schlag, Wind, Geruch u. s. w. bemerkbar machen musste, war leicht erklärlich; und dass, wenn die Entladung besonders heftig, die Wärme oder Feuermaterie u. a. mit ausgetrieben und in Action gesetzt werden konnten, war an sich wahrscheinlich. Die merkwürdige Thatsache aber, dass durch Reiben die Körper einmal vorwiegend elektrisch, ein andres Mal vorwiegend erwärmt würden, führte man auf die verschiedene Natur der geriebenen Stoffe, wie die besonderen Arten des Reibens, zurück; und Professor Bose kam sogar zu der ganz modernen Erkenntniss, dass immer Wärme und Elektricität gleichzeitig entwickelt würden, nur dass dabei die Mengen derselben in umgekehrten Verhältnissen stünden.

So zeigten sich die Entladungserscheinungen der Elektricität von ebenso grosser theoretischer wie praktischer Wichtigkeit für die weitere Fortbildung der elektrischen Disciplinen. Welchen Enthusiasmus dieselben, besonders die Funkenentladungen aus menschlichen Körpern, auch in sonst nüchternen wissenschaftlichen Kreisen hervorriefen, ersieht man deutlich aus der folgenden Beschreibung von der Elektrisation eines jungen Mädchens,

die der gelehrte Prof. Bose in seinem Lehrgedichte „Die Elektricität" vom Jahre 1744 giebt[1]):

„Ein Engel, dessen Blick sofort das Herze raubt,
Wenn seine Schönheit nur das blosse Seh'n erlaubt,
Und der, wofern das Glück sich noch Verdienste achte
Zum allerwenigstens noch Kronen glücklich machte.
Des Taille Venus gleicht, wo auf den Lippen Gluth,
Und Ros' und Lilie auf keuschen Wangen ruht.
In dessen Augenblau die helle Sonne blickt
Und was die sammtne Hand berührt auch gleich entzückt.
Des weisser Schwanenhals selbst Stoens Härte droht
Und wo der Philosoph erstarrt, wird blass und roth, — —
Der unschuldsvolle Schnee der blutgekrönten Brüste,
Der schönsten Menschlichkeit ein ewig Prunkgerüste.
Ein solch bezauberndes, anbetungswürdges Kind
Wird elektrificirt so schnell als wie der Wind,
Und stetig wird hierdurch mein wunderbares Feuer
Viel Millionen mal so edel, werth und theuer.
Berührt ein Sterblicher etwa mit seiner Hand
Von solchem Götter-Kind auch sonst nur das Gewand,
So brennt der Funken gleich und das durch alle Glieder.
So schmerzhaft als es that, versucht er's dennoch wieder,
Berührt, halbzitternd noch, den Alabaster-Arm.
Von weitem fühlt er schon, hier werd ihm bang und warm.
Und kommt er näher hin, gleich senkt die helle Flamme:
Er findet, dass ihn die zur Sklaverei verdamme.
Doch nicht nur durchs Gewand, durch den geschnürten Leib,
Wirkt dieser Funken durch. Ich rathe, Werther, bleib,
Noch ist es Zeit, zurück. Es noch einmal zu wagen
Wird ohne Hülf' und Rath Dich in die Ketten schlagen.
Vom stolzen Fischbeinrock ist hier der tiefste Reif.
Hast Du noch so viel Herz? So wag' es. Aber greif'
Gar sehr behutsam dran. Er sticht. Was ist es Wunder,
Wofern du Feuer fängst, indem du wie von Zunder.
Ein ausser einzig mal versucht' ich es und nahm
Der Venus einen Kuss. Doch Himmel, wie bekam
Mir solcher Frevel-Muth. Es schien ein schmerzhaft Stechen
Verdrehte fast den Mund, die Zähne wollten brechen."

Solchem Enthusiasmus gegenüber erscheint die etwas sarkastische Bemerkung, die der um die Erforschung der elektrischen Entladungserscheinungen ebenfalls sehr verdiente Benedictinermönch Gordon in

1) Die Elektricität nach ihrer Entdeckung und Fortgang mit Poetischer Feder entworfen von G. M. Bose. (Die Widmung ist datirt von Wittenberg, den 20. Juli 1744.) S. XXIX.

Erfurt an diese Art der Versuche knüpft, nicht ungerechtfertigt. „Dergleichen Licht, sagt er in einem 1745 erschienenen Buche[1]), zeigt sich an den Kleidern eines elektrischen Menschen, auch an denen vom Leibe entferntesten Theilen derselbigen. Dieses kann man sehr wohl und ohne die geringste Verletzung der Ehrbarkeit an einem elektrisirten Reifrock zeigen. Doch diese Versuche will ich gern andern überlassen, bei denen es für eine anständige Höflichkeit angesehen wird, wenn sie dem schönen Geschlecht zu gefallen suchen. Ich habe fast das Nämliche mit meinem Mantel (Benedictinerkutte) gezeigt.“

Die rein materielle Auffassung der Entladungserscheinungen, als eines wirklichen Ueberganges von Materie aus einem Körper in den andern, hatte den Vortheil, dass man leicht die Erregung auch anderer feiner Materien durch die strömende Elektricität erklären konnte, verführte aber andererseits auch dazu den Zusammenhang der imponderablen und ponderablen Materien zu weit zu fassen und auf Zusammenhänge zu schliessen, wo die Erfahrung bald das Nichtvorhandensein derselben mit aller Deutlichkeit zeigte.

Ein charakteristisches Beispiel für solch eine verfehlte Idee, die sich übrigens trotz aller Fehlschläge noch immer von Zeit zu Zeit wiederholt, können hierfür angeführt werden. Der Venetianer Pivati hatte in der Mitte der vierziger Jahre, geleitet von dem Gedanken einer Transportation ponderabler Materie durch das elektrische Imponderabile, peruanischen Balsam in einen gläsernen Cylinder gebracht, den Cylinder sorgfältig verschlossen und hierauf stark elektrisirt. Wann dann die Cylinder in die Nähe von andern Personen gebracht wurden, so bemerkten diese den Geruch des Balsams, ohne dass die Cylinder geöffnet wurden, und wer mit den Cylindern in Berührung gekommen, duftete noch längere Zeit nach dem Balsam. Diese Versuche griff Professor Winkler in Leipzig mit Eifer auf. Er füllte eine Glaskugel mit Schwefel und verstopfte sie so fest, dass man keinen Schwefelgeruch bemerkte, selbst wenn der Schwefel geschmolzen wurde. Als dann Winkler die Kugel elektrisirte, wurde der Geruch so heftig, dass ein Freund Winkler's, Professor Hauboldt, durch den Schwefelgeruch vertrieben wurde. Mit peruanischem Balsam aber gelangen die Experimente so gut, dass Winkler vermittelst eines langen Drahtes durch die Entladung einer Verstärkungsflasche den Balsamgeruch aus einem Zimmer in ein anderes gewissermassen telegraphiren konnte. Leider verschwand mit dem ersten

1) Versuch einer Erklärung der Elektricität, herausgegeben von Andreas Gordon, Prof. der Philosophie Erfurt. (Die Widmung ist datirt Erfurt, April, den 17., 1745.) S. 46.

Enthusiasmus auch die Geruchsempfindung und weitere Versuche gaben keinerlei Bestätigung dieser Geruchsübertragung durch den elektrischen Strom. Pivati hatte gehofft, seine Idee werde sich auch medecinisch nützlich erweisen und man werde nach ihr die Medicamente vermittelst des elektrischen Fluidums besonders schnell und besonders kräftig in den kranken Körper einführen können. Schon ein paar Jahre vor ihm aber hatte ein deutscher Arzt, Kratzenstein, dieselbe Idee nur in entgegengesetzter Richtung verwenden wollen, indem er vorschlug, die Ausscheidung der Krankheitsstoffe aus dem kranken, menschlichen Körper mit Hilfe elektrischer Entladungen zu bewirken. In einer Abhandlung über den Nutzen der Elektricität in der Arzneiwissenschaft von 1745[1]) sagt er darüber ganz bestimmt: „Nach unserm Stahlianischen Lehrgebäude ist die Vollblütigkeit die Mutter der mehresten Krankheiten. Wenn man dieselbe vermindern will, so muss man das überflüssige Blut durch den Schweiss oder Aderlassen herausjagen. Jenes ist am mehrsten beschwerlich, und dieses fürchterlich. Beides aber kann man durch die Elektrification überhoben werden. Durch diese werden eine grosse Menge schwefliger und salziger Theilchen aus unserm Körper herausgetrieben. Weil nun das Blut meistens aus schwefligen Theilchen, welche mit einem alkalischen Salze vermischt sind, besteht, so muss auch die Menge des Blutes nothwendig durch die Elektrification vermindert werden. .... Man kann also die Elektrification anstatt der Motionsmaschinen gebrauchen, indem man ebenden Nutzen dabei erhält, und diese mehr Incommodidät mit sich führen. Man wird auch in der That durch die Elektrification müde gemacht; es ist einem eben, als wenn man eine grosse Arbeit gethan hätte und man kann überaus wohl danach schlafen. ... Es wird also nicht allein bei physicalischen, sondern auch bei moralischen Patienten gute Dienste thun, denen ihr Reichthum, Sorgen und Bekümmerniss die Augen des Nachts nicht zufallen lassen. Weil auch das Blut durch die geschwindere Circulation flüssiger und dünner gemacht wird, so muss auch die Elektrification wider die Dickblütigkeit und das jetzt so gemeine Malum hypochondriacum, bei einem Frauenzimmer aber wider die hysterischen Beschwerden ein fürtreffliches Mittel abgeben."

Trotz dieser so enthusiastischen und sichern Worte aber wollte sich in Wirklichkeit eine Ausscheidung schädlicher Stoffe aus dem menschlichen Körper ebenso wenig als eine Einführung von Medicamenten in denselben durch die elektrischen Entladungen der Elektrisirmaschine oder der Ver-

---

1) Abhandlung über den Nutzen der Elektricität in der Arzneiwissenschaft von Christian Gottlieb Kratzenstein. 2. Auflage. Halle 1745.

stärkungsflasche constatiren lassen. Der Praktiker Franklin fertigte schon im Jahre 1749[1]) diese Pläne fürs Erste mit der sehr drastischen Bemerkung ab, dass er versuchsweise den Entladungsstrom einer Leydener Flasche mehreremals erst durch eine stark purgirende Flüssigkeit und dann durch seinen Körper geleitet, aber niemals auch nur die geringste medicinische Wirkung von demselben verspürt habe.

---

1) Des Herrn Benj. Franklins Briefe von der Elektricität. Uebersetzt von J. C. Wilcke. Leipzig 1758. S. 113.

ZUR GESCHICHTE UND PHILOSOPHIE DER DIFFERENTIALRECHNUNG.

VORTRAG,

GEHALTEN

AUF DER NATURFORSCHER-VERSAMMLUNG ZU FRANKFURT IN DER SECTION FÜR MATH.-NATURW. UNTERRICHT.

VON

DR. **MAX SIMON,**

PROF. AM KAISERL. LYCEUM ZU STRASSBURG I. E.

Eine Geschichte der Infinitesimalrechnung hat mit den Pythagoräern zu beginnen, welche in der irrationalen Zahl einem unbegrenzt fortsetzbaren Process einen Abschluss gaben. Einen Markstein bildet der Eleat Zeno, der in den bekannten Beispielen des fliegenden Pfeiles und Achilleus mit der Schildkröte die Schwierigkeit des Continuitätsbegriffes aufdeckte. Z. wies auch zuerst auf den Widerspruch hin: das Continuum aus seinen (ihm gleichartigen) kleinsten Theilen zusammenzusetzen, denn entweder haben die Theile keine Grösse, dann hat ihre Summe auch keine Grösse; oder sie haben Grösse, dann giebt ihre unendliche Wiederholung eine unendliche Grösse. Erst Aristoteles gab für die Paradoxien eine zufriedenstellende Erklärung, bei ihm findet sich auch eine wirkliche Definition des Continuums: „Stetig sei ein Ding, wenn die Grenze eines jeden zweier nächstfolgenden Theile, an welcher sich diese Theile berühren, eine und dieselbe wird". Die Paradoxien aber widerlegte er mit Hilfe des Mächtigkeitsbegriffes, der hier zuerst auftritt: die Zeit und die Raumstrecke sind von gleicher Mächtigkeit, d. h. es lässt sich jedem Raumpunkt ein Zeitpunkt eindeutig zuordnen. Im Gegensatz zu den Eleaten kamen Leucipp und Demokrit zu dem Hilfsbegriff, den Physik und Chemie bis heute nicht entbehren können, dem der Atome. Die Fassung, in der der Grenzbegriff hier auftritt, ist zwar an sich fehlerhaft, und von Aristoteles wurde der falsche Grenzbegriff letzter Theil in einer eignen Schrift zurückgewiesen, aber es vollzog sich doch ein wichtiger Fortschritt dadurch, dass die Nothwendigkeit des Abschlusses einer an sich unbegrenzten Vorstellungsreihe anerkannt wurde. In der Schule Platos und mehr noch in der des Eudoxos ist dann die eigentliche Differentialrechnung des Alterthums geschaffen worden in der sogenannten Exhaustionsmethode. Ihr Wesen besteht darin, die zu bestimmende Grenzgrösse, deren Existenz, und dies kann gar nicht genug betont werden, bereits feststeht, — so die der Quadratwurzel aus dem Pythagoras, des Flächeninhalts und Volumens aus der Anschauung, des Schwerpunkts aus der Erfahrung, — in zwei Reihen einzuschliessen, von denen die eine beständig fallend, die andere beständig wachsend sich der Grenze unbeschränkt nähert. Das bekannteste Beispiel ist die Berechnung des Kreises durch die Reihe der ein- und umgeschriebenen Polygone. Die Methode stützt sich auf die bekannte Propos. 1 des X. Buches des Euclid:

Nimmt man von einer Grösse mehr als die Hälfte, von dem Rest wieder mehr als die Hälfte und so fort in infinitum, so wird der Rest zuletzt unendlich klein, d. h. also schon ein Convergenzkriterium eines unendlichen Produktes. Zu Grunde liegt dem Satz das sogenannte Axiom des Archimedes: Wenn zwei Grössen verschieden sind, so kann ihre Differenz, beliebig oft vervielfältigt, zuletzt jede andere Grösse übertreffen. Schon bei Euclid findet sich z. B. der Inhalt der Pyramide im XII. Buch als Grenze der convergenten Reihe $\sum \frac{1}{4^k}$ und Archimedes hat zur Berechnung der Schwerpunkte, Flächen und Volumina, nicht nur integrirt, sondern er hat auch die Integrale gegeben, an die die Integralrechnung Kepler's, Cavalieri's und besonders Fermat's und Wallis' angeknüpft hat: $\int x dx$ und $\int x^2 dx$; er kennt bereits Sätze wie: $\int (f + \varphi) dx = \int f dx + \int \varphi dx$, er kennt Integration durch Substitution, er hat durch Differentiation die Tangente an seine Spirale gefunden, deren Gleichung in Polarcoordinaten ihm wohl bekannt war. Sehr wahr hebt Zeuthen hervor, dass die Beweise, welche Euclid, Archimedes, Pappus etc. geben, an sich durchaus nicht abschreckender sind, als sie es in denjenigen unserer Lehrbücher sind, welche die Sätze über Grenzen etc. streng begründen wollen, nur dass die Alten in jedem einzelnen Falle die Begründung immer wieder aufs Neue durchführten. Man muss nach den Arbeiten Z. und C. es als feststehende Thatsache hinnehmen, dass die Alten in der Exhaustionsmethode bereits einen feststehenden Algorithmus der Differentialrechnung hatten. Noch Pappus, den Cantor an das Ende des 3. Saecul. nach Chr. setzt, handhabt die Integrationsmethode des Archimedes mit vollem Verständniss. Sieht man ab von der Ausbildung, welche die Scholastiker, vom theologischen Gedankenkreis ausgehend, dem Begriffe des Unendlichen gaben, besonders von Nicolaus v. Cusa, der, wie es scheint, in der Auffassung des Grenzbegriffes sich sehr dem heutigen Standpunkt nähert, so erheben sich zur selbstständigen Bedeutung auf dem Gebiet der Integralrechnung im direktesten Anschluss an Archimedes erst wieder Kepler und Galilei. G's. Leistung ist bei C. wenig gewürdigt.[1]) Wie alle Physiker geht er vom Atom aus, aber mit vollster Schärfe spricht er sich über den Differentialcharakter desselben aus. „Nicht 2, nicht 10, nicht 100, nicht 1000 „indivisibilia“ können das Continuum bilden, sed bene infinita, d. h. wahrhaft unendlich viel.“ Und er sagt ferner: „Die Auflösung der Linie in ihre unendlich vielen „Punkte“ — es ist dies derselbe Begriff des Punktes, der sich bei Bolzano in den Paradoxien des Unendlichen wiederfindet — bietet nicht mehr Schwierigkeit als ihre Theilung in eine endliche Anzahl Theile unter Einer Bedingung, dass man

1) Vgl. H. Cohen, Das Princip der Infinitesimalmethode.

nicht von ihm fordere, diese Punkte von einander zu trennen, und sie hier auf dem Papier einzeln zu zeigen.“ Auch diese Stelle hat ihre Analogie bei Bolzano. „Und weil diese Theile unendlich viele sind, so sind sie non quantae, haben keine Grösse, denn, wie Zeno, eine unendliche Anzahl von Quantitäten giebt ein unendliches Quantum. Also gerade weil die Theilung des Continuums in's Unendliche fortgesetzt werden kann, folgt die Nothwendigkeit der Zusammensetzung aus partes non quantae, aus Theilen ohne Grösse. Wie G. dann Geschwindigkeit und Beschleunigung mittelst der Differentialrechnung definirt, ist bekannt. Man sieht, er ist der wahre Vorgänger Bolzano's, er weiss wie jener, dass die Indivisibilität eine Denknothwendigkeit bildet, und wie Bolzano weiss er auch, dass die Unmöglichkeit, die Punkte einzeln abzuzählen, mit ihrer Gesammtvorstellung als Continuum gar nichts zu thun hat. Erwähnt sei noch die vielleicht merkwürdigste Aeusserung Galilei's: „Wenn irgend eine Zahl (Grösse) unendlich genannt werden kann, so ist es die Einheit“, und er schliesst: „ausser der Einheit giebt es keine unendliche Zahl“. Hierin liegt eigentlich alles, was über das Messen von Helmholtz, Klein u. A. neuerdings gesagt ist. Knüpft Galilei an die Mechanik des Archimedes an, so Kepler in seiner „Stereometria doliorum“ an die Inhaltsbestimmungen; Kepler hat, wie Lacroix hervorgehoben, zuerst von den Neueren das Integriren wieder aufgenommen, und C. nennt die Doliometrie die Quelle aller späteren Kubaturen. Der 2. Abschnitt ist fast ganz von Maximumsaufgaben angefüllt, in denen K. von dem Nachweis ausgeht, dass die in Oesterreich gebräuchliche Form der Fässer zugleich die zweckmässigste sei. Er spricht zuerst die kennzeichnende Eigenschaft der extremen Werthe klar aus, dass in ihrer Nähe die Veränderung der Funktion zu Null werde (Montucla) K. und G. haben dann auf Cavalieri eingewirkt, den man als direkten Vorläufer Barrow's, Newton's und Leibniz' ansehen muss; die „geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota“ erschien 1635, in zweiter verbesserter Auflage 1653. K. hatte seine Methode, die im Grunde mit der von Cavalieri sich deckt, und die darin besteht, die unendliche Anzahl der partes minutissimae der Körper, welche einfacheren Charakter zeigen als die zu bestimmenden Körper selbst, zu addiren nicht ausdrücklich angegeben, wie dies Cav. thut. Cantor scheint sich Marie anzuschliessen, welcher sagt: Das Werk verdiene den Preis der Dunkelheit, aber doch nur für Jemanden, dem Galileis Begriff des „Punktes“ oder „indivisibile“ nicht geläufig ist. So hat sich der Wahn bilden können, Cav. habe den Körper aus Flächen, die Fläche aus Linien zusammengesetzt. Und doch sagt Cav. ausdrücklich, dass er auf seine Methode, die Körper, bez. die Fläche als Gesammtheit „omnia“ (planorum bez. linearum) aufzu-

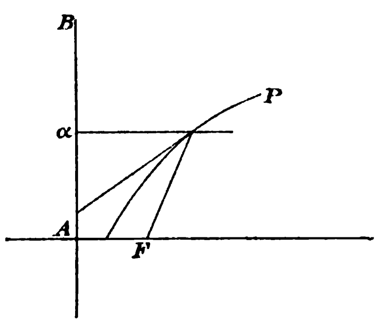
fassen, gekommen sei, als er bei Rotationskörpern erkannt, dass das Verhältniss des Erzeugten von dem des Erzeugenden völlig verschieden sei, so dass es falsch wäre, z. B. den Cylinder aus unzähligen durch die Axe gehenden Parallelogrammen veluti compactum bestehend zu denken. Die Anlehnung an Galilei ist ganz deutlich ausgedrückt in der berühmten Stelle, wo er die einzelne Schicht als Spur der continuirlich gleichmässig vom Grund zur Deckfläche fliessenden Ebene bezeichnet. Diese Spur ist der Galileische pars non quanta, das Differential des Raumes erzeugt in dem pars non quanta der Zeit. Newton und Leibniz haben Cav. richtig verstanden; aus dem Manuscript Leibniz' vom 26. Oct. 1675 (Gerhardt, die Entdeckung der höheren Analysis), wo das $\int$ zuerst vorkommt, sehen wir, dass der Integralbegriff L.'s direkt aus den „omnia" Cav.'s hervorgegangen ist. Da Cav. sich des Widerspruchs bewusst war, den seine „compositio continui ex indivisibilibus" finden würde (derselbe Ausdruck findet sich wiederholt und als Citat bei Leibniz wieder), so giebt er als Satz 1 des VII. Buches, das noch heute nach ihm genannte, im Unterricht der Mittelschulen fast unentbehrliche Princip: Körper, bez. Flächen sind gleich, wenn in gleicher Höhe durch parallele Ebenen geführte Schnitte gleich sind. Cav. wirkte zunächst auf Descartes, der das 3. constituirende Motiv für die Differentialrechnung in Fluss gebracht hat, das Tangentenproblem. Seine Methode ist allerdings rein algebraisch und wird noch heute in den Elementarlehrbüchern der analytischen Geometrie meistens bevorzugt; der differentiale Kern ist implicite darin, dass die Coordinaten der Schnittpunkte gleich werden. Auch hat Descartes bei Gelegenheit der Construktion der Tangente an die Cycloide (Galilei 1590) das Grundgesetz der Kinematik schon benutzt. Um so bewusster bediente sich Frankreichs grösster Mathematiker infinitesimaler Betrachtungen. Es war stets bekannt, dass Fermat zuerst geläufig differentirt habe, Cantor und Zeuthen (1. Heft der Kopenh. Akad. Berichte von 1895) haben hervorgehoben, in welchem Umfang F. bereits integrirt hat. Zeuthen sagt, dass F. zuerst die Parabeln beliebig hoher Grade integrirt habe. Es ist sehr schwer bei der Scheu F.'s vor Publikation durch den Druck Prioritätsfragen über ihn zu entscheiden. Z. weist nach, dass F. 1636 $\int x^n dx$ gehabt, Cavalieri hat die Quadratur schon 1639 gedruckt und giebt an, dass er sie 1615 gefunden; den Beweis hat er aber nur bis $n = 4$ gekannt. Das Continuitätsgesetz, das Leibniz als seine „grösste Entdeckung" immer wieder betont und das in der That die Begründung seines „infiniment petit" enthält, hat F. in vollem Umfang besessen, wie übrigens Galilei und Newton auch. Den Beweis liefert F.'s Methode für Maxima und Minima und Tangentenconstruktion. Als 1. Beispiel wählt F. die älteste bekannte Maximalaufgabe Euclid VI, 27:

$A(B-A)$. F. setzt $x=A$ und $x=A+E$ und die beiden Werthe gleich: $A(B-A)=(A+E)(B-A-E)$, woraus, wenn E^2 gegen E vernachlässigt wird, bezw. E nach Division der Gleichung mit E gleich 0 gesetzt wird, $A=\frac{1}{2}B$ folgt, d. h. also, F. setzte $f'(x)=0$. Die Fassung, in der die Methode in den Schulen noch heute sehr gebräuchlich ist, gab Huygens. Die Tangentenmethode ist ganz analog. F. hat den Zusammenhang mit dem Maximalproblem erkannt und ausgesprochen. Sei M ein Curvenpunkt zur Abscisse D, sei PT die Subtangente A, $dx=E$, $F(xy)$ die Curvengleichung ihre „proprietas specifica", M' der Punkt, der zu $x+dx-(D+E)-$ gehört, so kann M' auch als auf der Tangente MT liegend angesehen werden, so dass $TMP \sim T'M'P'$, d. h. also, er bestimmte wie wir $A=y/f'(x)$. Die Methode ist ganz die heutige. Der Schritt zum charakteristischen Dreieck Barrow's und Leibniz' ein sehr kleiner. F. hat schon Rectifikationen auf Quadraturen zurückgeführt und bei einer Schwerpunktsbestimmung die Integration durch Differentiation ersetzt. Er war, was besonders zu betonen ist, schon zu einem ganz bestimmten Algorithmus gelangt, der ihn auch vor Irrationalitäten nicht im Stich liess, immer wird dx mit E, die Subtangente mit A, die Ordinate B, die Abscisse D genannt. Seine Bezeichnung schliesst an Vieta an, der bis Pascal incl. für die französischen Mathematiker darin massgebend war. F. hatte auch bereits in ähnlicher Weise wie später Riemann den Begriff des bestimmten Integrals erfasst bei der Berechnung von $\int x^{\frac{p}{q}}dx$. Hier ist Grenzübergang, hier ist Bestimmung des Werthes $^0/_0$, hier ist völliges Bewusstsein des Continuitätsgesetzes, das ganz allein das Heben mit $1-\beta$ rechtfertigt. Zahlreiche Anwendungen macht er von der Integration durch Substitution und ebenso benutzt er die theilweise Integration in der natürlichen Form von Vertauschung der Coordinatenaxen.

Was Zeuthen im 2. Heft der Kopenh. Berichte von 1895 als das Hauptverdienst Newton's hervorhebt, dass N. den Zusammenhang aller grossen Probleme erkannt habe, welche zusammen die Differentialrechnung erzeugten, das gilt, wie schon C. andeutet, gewiss auch von F. Um dieselbe Zeit, etwa um 1641, jedenfalls, wie C. bewiesen, nicht vor April 1639, fand Roberval und vielleicht noch früher Toricelli, die dynamische Tangentenmethode. Sie betrachten die Tangente als die Diagonale der die Curve erzeugenden Kraft; wieder eine Vorstufe für Barrow und Newton. Als Beispiel diene die Tangente an die Parabel. Sei (Fig. auf S. 120) F der Focus, BA die Leitlinie; da $P\alpha$ und PF gleich, so wird die Curve dadurch erzeugt, dass gleiche Kräfte in P nach α und F wirken, also ist die Tangente als Diagonale des Kräfteparallelogrammes die Winkelhalbirende von αPF.

Ebenso einfach ist die Construktion der Tangente an die Cycloide. Die Unabhängigkeit Toricelli's von Roberval ist durch C. unwiderruflich nachgewiesen. Zu erwähnen ist auch Gregorius a St. Vincentio, dessen opus geometricum 1647 Kubaturen mittelst des Ductus (d. h. Multiplication in der Sprache Vieta's) plani in planum ausführt, ebenfalls eine Art Integration. Die unmittelbarsten Vorgänger von Newton und Leibniz sind Wallis und Pascal, denn auf Barrow's lectiones opticae et geometricae 1669 hat schon N. selbst Einfluss.

Wallis' Hauptwerk ist die 1655 erschienene arithmetica infinitorum, ihr Inhalt Quadraturen und Kubaturen. Die Methode schliesst an Kepler (der nicht genannt wird) und Cavalieri an, ist aber rein arithmetisch, ein ganz bewusstes Rechnen mit unendlichen Reihen, die event. durch Interpolation hergestellt werden. Dieser Kunstausdruck, der Name hypergeometrische Reihe, das Zeichen ∞ für unendlich rühren von W. her. Aus W. hat Newton die Bedeutung der unendlichen Reihe für die Darstellung von Zahlen entnommen. W. gab unabhängig von Fermat $\int x^{\pm n} dx$ und darauf gestützt auch eine Reihe von Integralen irrationaler Integranden. Noch weiter ging Pascal. Max. Marie hebt hervor, dass P. bereits ganz geläufig mit mehrfachen Integralen operirt hat und auch eine Reihe von Integralen trigonometrischer Integranden besass. Das schon von Fermat zur Transformation von Integralen angewandte Mittel: dieselben Körper auf verschiedene Weise in Elementartheile zu zerlegen, sowie die partielle Integration waren Pascal ganz geläufig. Er ging aus von den Binomialcoeffizienten, bezw. den Potenzen der natürlichen Zahlen, deren Zusammenhang mit den Quadra- und Kubaturen damals schon allgemein bekannt war; er bemerkt, was auch für Leibniz (vergl. die historia et origo calculi differ.) wichtig wurde, dass jede folgende Reihe als Integral der vorigen erscheint, und im Zusammenhange damit hat er 1654 das Grundprincip der Differentialrechnung ausgesprochen: In continua quantitate quodlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas, nihil ei superaddere. Sein Zusatz lässt auch nicht den leisesten Zweifel, dass es sich um den Satz: $u + kdu = u$, wenn k endlich, handelt. 1669 erschienen dann Barrow's lectiones etc. und da tritt schon Newton auf. Die Zeit von 1615—1668 ist nach C. das Zeitalter der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Die genaue Kenntniss Leonardo da Vinci's wird die untere Grenze wohl bis 1600 herabdrücken.



Es sind eine Reihe bestimmter Probleme, deren Zusammenhang allmählig deutlich wird und die ihrer Natur nach infinitesimale Betrachtungen erfordern. Erwähnt sind schon 1) das mechanische Motiv in Dynamik (Geschwindigkeit, Beschleunigung) und Statik (Schwerpunktsbestimmung), 2) die Maximalaufgaben, auf welche schon die quadratischen Gleichungen mit Nothwendigkeit führten, 3) die Körper- und Flächenausmessung, zu der etwa um 1650 die Längenausmessung oder Rectifikation der Kurven kam. Zeuthen hat Recht, wenn er C. gegenüber das Verfahren von Wallis, Fermat, Pascal, van Heuraet als naturgemäss bezeichnet, welche Rectifikation auf Quadraturen zurückführten, obwohl ihnen die Beziehung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ nicht entgangen war, denn das hiess damals integriren. Das Problem der Raumbestimmung ist von solchem Einfluss auf die Entwickelung von Integral-Rechnung und -Begriff, dass Cournot nach 1841 diese Rechnung als calcul des quadratures bezeichnet; 4) das Tangentenproblem, dessen Geschichte, wenn man von Apollonius' Construktionen für die Kegelschnitte und der Methode von de Sluse absieht, schon erzählt ist. Letztere ist von Huygens 1693 verbessert, der im Grunde $f'(x)$ als $- d_x f(x, y) : d_y f(x, y)$ bestimmte. Die Relation $f'(x) = dy : dx$ ist (indirekt) von Barrow in den „lectiones" gegeben, so wie sie hier aus dem Dreieck PP' im § 13 abgeleitet ist, dem Dreieck, welches Barrow und Leibniz das charakteristische nennen. Barrow hat zuerst, vielleicht von Roberval beeinflusst, die Continuität des Raumes aus der der Zeit abgeleitet. Die Zeit wird als Unabhängige zur Abscisse, die Geschwindigkeit zur Ordinate, der von der Totalität der Ordinaten erfüllte Raum zum Bild der Bewegung. In enger Verbindung mit Nr. 4 steht als fünftes Problem der Contingenzwinkel (Name von Jordanus), der aber nicht wie heute den Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten bedeutet, sondern im Sinne Euclid's den Winkel zwischen der Curve und ihrer Tangente. In der Propos. XVI Buch 3 beweist Euclid, dass die Tangente (linea contingens) sich dichter an den Kreis schmiegt als jede andere Gerade, und dass der Winkel zwischen ihnen kleiner ist als jeder geradlinige Winkel. Der Satz enthält den Keim zur Lehre von Osculation und Krümmung. Ueber die Natur des Winkels erhob sich ein Streit, der namentlich im 16. und 17. Jahrh. äusserst lebhaft wurde und beständig zu Infinitesimalbetrachtungen zwang. Es betheiligten sich die hervorragendsten Mathematiker wie Cardanus, Clavius, Vieta, Wallis; schliesslich drang die Ansicht von Vieta und Wallis durch, dass der Contingenzwinkel O, d. h., dass die Curve am Berührungspunkt die Richtung der Tangente hat, aber auch die Argumente des Gegners fanden ihre Würdigung, indem N. und nach ihm L. und Jacob Bernoulli (vorher vielleicht Fermat) als das Vergleich- und Messbare die Krümmung erkannten, sowie den Grad

der Anschmiegung (letzterer bei N. schon in den Principien). Schliesslich muss als Nr. 6 das Auftreten und Häufigerwerden der unendlichen Processe genannt werden, wie sie sich z. B. in den Kettenbrüchen Lord Brounker's und der Arithmetica Wallis' finden und dann von N. geradezu zum Fundament gemacht wurden, das einen immer breiteren Platz einnimmt, so dass die Lehre von den unendlichen Reihen fast identisch mit der Integralrechnung geworden ist. So war die Infinitesimalrechnung von allen Seiten vorbereitet, als N. 1665 und 10 Jahre später L. den letzten Schritt thaten und eine Grammatik schufen zu einer Sprache, welche bereits eine blühende Litteratur hatte. L. selbst sagt mit grösster Deutlichkeit, worin seine Leistung bestand; „sie ermöglichte der Mittelmässigkeit, die Probleme anzugreifen, welche bis dahin nur den Hochbegabten zugänglich gewesen wie die Tangentenprobleme, die der Mechanik und die Quadraturen". Uebrigens gilt dasselbe von allen grossen Fortschritten in der Methode. Was N. betrifft, so ist eine Würdigung seiner Leistungen dadurch sehr erschwert, dass keine einzige rein mathematische Schrift von ihm selbst veröffentlicht ist, und dass in Folge des erbitterten Streites zwischen N. und L., bezw. ihren Anhängern sowohl die englischen als die deutschen Quellen mit Vorsicht zu gebrauchen sind; selbst C. gegenüber hat Z. (II. Heft der Kopenh. Berichte von 1895) in vielen Punkten Recht. N. selbst hat als seine grösste Entdeckung die Binomialreihe, d. h. die Erweiterung des Binoms auf beliebige (reelle) Exponenten angesehen und sie ziert mit vollem Recht sein Grabmal. Sie findet sich in dem Manuscript: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas", das 1665 entstanden und 1669 Barrow und Collins vorlag, der eine Abschrift nahm, welche L., wenn nicht schon 1673, dann jedenfalls 1676 excerpirte; völlig gedruckt ist das Werk erst 1711, sein wesentlicher Theil macht unter dem Titel: „De quadratura curvarum" einen Anhang der Optik von 1704 aus. Von 1665 also datirt die moderne Mathematik, nicht so sehr, dass N. den Zusammenhang der Quellprobleme als der Erste einsah, wie Z. sagt, sondern dass er die unendliche convergente Potenzreihe als fundamentales Entwickelungsinstrument der Zahlgrössen erkannte, ist sein Hauptverdienst. Wie die Binomialreihe durch Interpolation gefunden wurde, hat N. selbst in dem berühmten 2. Brief an L. vom 24. Oct. 1676 erzählt, die Analysis enthielt auch die Reihe für Log. $(1 + x)$, die N. vor Mercator gefunden hatte, sowie die für $\sin x$ und $\cos x$, und als erstes Beispiel für die Umkehrung von Reihen, die für e^x, welche N. also vor Euler gefunden, allerdings ohne die Bedeutung dieser Funktion zu erkennen. Die Analysis enthält auch den Beweis, dass N. schon 1665 über die Elemente der Differential- und Integralrechnung gebot, von ihm Fluxionsrechnung genannt. Das älteste Denkmal ist ein Manuscript vom 28. Mai

1665, schon am 13. Nov. d. J. bestimmt er mittelst Fluxionen (Differentialquotienten) die Tangente und den Krümmungsradius ganz allgemein. Bereits 1671 war sein grosses Manuscript: „Methodus fluxionum et serierum infinitorum" fertig, Collins wollte es 1680 drucken, aber es ist erst 1736 englisch von Colson edirt worden, als es nichts Neues mehr enthielt. C. hat nachgewiesen, dass es inzwischen mehrfach überarbeitet wurde, aber C. berichtet auch, dass N. bereits in dem Brief vom 24. Oct. 1676 einen Hauptfall des sogen. binomischen Integrals $\int az^{\vartheta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}dz$ erledigt (den wenn $(\vartheta+1):\lambda$ eine ganze Zahl ist), das konnte doch nur Jemand, der sehr tief in den Algorithmus eingedrungen war. Newton ging wie sein Lehrer Barrow von der Bewegung aus, er betrachtete die gewöhnlichen Grössen als im gleichmässigen Fluss der unabhängig variablen Zeit erzeugt, die Zeit wächst um unendlich kleine Grössen (Momente), die mit 0 bezeichnet werden und den Charakter als Null haben; die abhängigen Grössen wachsen in Folge dessen ebenfalls mit mehr oder minderer Geschwindigkeit um unendlich kleine Theilchen, ebenfalls Momente genannt. Sind x, y, z gewöhnliche Grössen, welche als von der Zeit abhängig fliessende „Fluentes" heissen, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ihre Geschwindigkeiten oder Fluxionen, so sind $0\dot{x}$, $0\dot{y}$, $0\dot{z}$ ihre Momente, so dass „post momentum temporis" die Grössen übergehen in $x+0\dot{x}$, etc. Lagrange sagt: Tout le monde a ou croit avoir une idée de la vitesse; für N. stand dieser Begriff durchaus fest,. und er hatte damit die Ueberzeugung von der Existenz eines ersten Verhältnisses der entstehenden endlichen Grössen, welches auch, wenn man rückwärts von den gewordenen Grössen ausgeht, als das letzte Verhältniss aufgefasst werden kann, mit welchem sie verschwinden. Die Klarheit, mit welcher N. z. B. in den Briefen an Wallis von 1692 und in den 12 Sätzen des 1. Buches der „principia" 1684 die Grundgedanken dargestellt hat, ist von C. unterschätzt. N. ist in der Tiefe der Auffassung, in der vis mathematica des Geistes L. über, Gauss hat nie einem Andern das Prädikat „summus" zugestanden. Dagegen übertrifft er N. in dem, was seine Stärke überhaupt bildet, in der Form; dass L. als der Erste die Bedeutung des Zeichens für die Mathematik erkannte, dass er ihr innerstes Wesen als Symbolik erfasste, darin liegt L's höchste Bedeutung. L. hat sich zuerst 1673 mit Infinitesimalbetrachtungen befasst, und zwar ganz sicher nach seinem ersten Aufenthalt in London, wo er Barrow's „lectiones" an sich brachte, und vom Tangentenproblem ging er aus. Er selbst giebt wiederholt und fast gleichlautend an, dass ihn Pascal's Arbeiten auf die Erfindung gebracht haben; und wer seine Entwickelung betrachtet, die von der Combinatorik ausgeht und damit von den Differenzenreihen des Pascal'schen Dreiecks, bezw. der Binomialcoefficienten, dem wird dies einleuchten. Aber ebenso sicher ist

es auch, dass ihm, der ohne gründliche mathematische Bildung 1673 nach London kam, „Suggestionen", wie Z. sagt, von N.'s Erfindung zuflossen, und ich mache in dieser Hinsicht auf ein Fragment eines Briefes an Oldenburg vom 30. März 1675 aufmerksam. Es ist sehr möglich, dass L. den sogen. Tangentenbrief N.'s bei Tschirnhausen gelesen, sicher war er vor seiner ersten Publikation von 1684 im Besitz der Briefe N's. von 1676. C. hat nun zwar ausgeführt, dass L. aus alle dem nicht viel hätte lernen können, dagegen ist aber das Beispiel der Bernoulli's anzuführen. Die erste Publikation L's. in den „Acta eruditorum" von 1684 und die erste, in der der Algorithmus der Differentialrechnung gedruckt ist, trägt den Titel: Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus; sie war absichtlich so dunkel als irgend möglich, und doch gelang es den Bernoulli's und zwar zunächst Jacob in 2 Jahren sich nicht nur der Differentialrechnung, sondern auch der nur ganz versteckt als inverses Tangentenproblem an der Beaune'schen Aufgabe angedeuteten Integralrechnung völlig zu bemächtigen. Sollte man L. weniger zutrauen? Aber alles dies schmälert L's. Verdienst nicht, dessen Differentialrechnung, was Brauchbarkeit und Zugänglichkeit betrifft, thurmhoch über N's. Fluxionsrechnung stand. Die Bezeichnungs- und Ausdrucksweise von L. hat sich unverändert bis heute gehalten und alle Versuche, wie sie z. B. von Cauchy und Jacobi gemacht sind, daran zu rütteln, sind erfolglos geblieben. Fast alle Kunstausdrücke wie Differential-, Infinitesimalrechnung, Differentialgleichung, Analysis, Funktion, transcendent, die Indexbezeichnung etc. stammen von L. Nur das Wort „Integral" stammt von Jacob B., doch macht schon in einem Brief an L. vom 12. Febr. 1695 Johann auf die Erfindung Anspruch, der übrigens dei C. nicht gerade mit Liebe behandelt ist. Dass Johann z. B. Recht hatte, als er die Berechnung der Werthe $0/_0$ für sein Eigenthum erklärte, hat Eneström nachgewiesen. Vor allem aber hat L., der ja Menschenbeglücker von Profession war, die Bedeutung seiner Erfindung für die gewöhnliche Menschheit sofort voll erkannt, während N. die seine zunächst nur für den eigenen Hausgebrauch benutzt. N. konnte jeden Algorithmus entbehren, wie das Genie überhaupt, wie denn z. B. Huygens sich sein Lebenlang ablehnend gegen den neuen Calcul verhielt und doch alles leistete, was die Differentirer forderten und noch einiges mehr. Erst als die Journale, die gerade zu jener Zeit aufkamen, die Acta eruditorum, die Nouvelles de la république des Lettres, die Akademieberichte sich mit Schriften der Leibnizianer füllten, wurde N. oder vielmehr seine Landsleute, die sich überflügelt sahen, gereizt, und so machte sich 1699 Fatio de Duiliot zum Sprachrohr ihres Aergers. Es begann damit der

hässliche Prioritätsstreit, der L. die letzten ohnehin so trüben Lebensjahre verbitterte und der noch heute, cf. Zeuthen contra Cantor, nicht ruht. Man findet die ausführliche Schilderung bei C.; er ist so recht ein Muster solcher Fehden, beide Theile haben Recht und Unrecht, beide gehen beschädigt aus dem Kampfe hervor. L. fälschte, N. log. Das Facit zog Biot dahin: „Die Differentialrechnung von L. wäre noch heute eine bewundernswerthe Schöpfung, wenn nur der Fluxionscalcul in der Weise existirte, wie ihn N's. Werke geben." In der That, L. und kein Anderer hat das Unendlich-kleine sans phrase als berechtigtes mathematisches Gebilde eingeführt. Von L. rührt die Formel Nr. 29 für die allgemeine Differentiation eines Produkts, Nr. 22 für die Differenzirung des Logarithmus. Die Probleme der Brachystochrone — Isochrone — Kettenlinie — Florentiner (Viviani) löste er. Was die Integralrechnung betrifft, so wird oft angegeben, dass sie von den Bernoulli's erfunden sei, und Jacob B. hat sie in der That ganz selbständig gefunden, aber lange nach L. und N., und der Briefwechsel beweist, dass L. die Methoden jener vielfach schon besass. Ein sehr wichtiger Fortschritt ist unbestritten sein Eigenthum, die Differentiation unter dem $\int$ nach einem veränderlichen Parameter, wodurch er wieder neue Wege bahnte, so für die Variationsrechnung, deren erste Keime in einem Brief an Johann B. vom 24. Juni 1695 liegen, und ebenso für die Auffindung bestimmter Integrale. Mit Johann B. gleichzeitig (Joh. B. an L. d. 10. Juni 1702, L. an B. 24. Juni 1702) fand er die Integration rationaler Integrale durch Zerlegung in Partialbrüche: (L.: Acta erud. 1702, Joh. B. Abhandl. der Par. Akad.); gemeinsam haben sie auch die Integration quadratischer Irrationalitäten erledigt. Die Verdienste der Bernoulli um die Ausbildung und die Verbreitung der neuen Rechnung hat L. selbst auf das dankbarste anerkannt, cf. seinen Brief v. 7. Juli 1694 an Joh. B. Das „erste Lehrbuch der Differentialrechnung" lange Zeit das einzige und fast noch längere Zeit das am leichtesten lesbare, (C.) ist nach Joh.'s Lektionen von Marquis de l'Hospital geschrieben: „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Par. 1696;" Joh. selbst hat zum Gebrauch desselben Marquis das erste Lehrbuch der Integralrechnung verfasst. (De methodo integralium. Op. 3.)

Die Bernoulli's in Basel lasen zuerst über Differentialrechnung (Christian v. Wolf zuerst in Deutschland). Ueber die Begründung der Variationsrechnung durch den noch immer nicht genügend aufgeklärten Bruderkrieg zwischen Jacob I. und Johann I. vgl. man das Programm von Giesel, Torgau 1857. Es mögen sich einige Einzelheiten über Bezeichnung, Kunstausdrücke etc. anschliessen. Das dx findet sich schriftlich zuerst bei L. 11. Nov. 1675, gedruckt 1684 in der Methodus nova, während das am 29. Oct. 1675 ein-

geführte $\int$ erst 1686 in der „De geometria revindicata" gedruckt ist. Uebrigens haben L. und Joh. B. nach 1695 und 96 das $\int$ als gewöhnliches Summenzeichen gebraucht, wie denn L. die Integralrechnung, Calc. summatorius nannte: Das Wort „Integral", zuerst gedruckt bei Jacob B. in den Acta erud. 1690 (Isochrone), später einigten sich Joh. und L. die Rechnung Integralrechnung zu nennen, das Zeichen $\int$ beizubehalten; unsere jetzige Schreibweise bestimmter Integrale $\int_a^x$ rührt von Fourier her. Calculus differentialis L. 1684, Differentialgleichung (lat.) zuerst im Brief von L. an Oldenburg (Newton) von 1677, eben dort zuerst derivare (ableiten), woraus dann bei Lagrange 1772 Ableitung. Die Bezeichnung $f'(x)$ oder vielmehr $\psi'(x)$ für $d\psi(x) : dx$ bei Lagrange in der „Nouvelle méthode 1770", das ∂ für die partielle Ableitung, die auch noch oft durch Klammern bezeichnet wird, bei Jacobi, Crelle Bd. 32 p. 4. 1842, Cauchy: $D_x f(xy)$ (Nouv. exerc. T. II). Das Differenzzeichen $\triangle$ bei Joh. B. 1701 (C. S. 437). Einhüllende Curven (Enveloppen) zuerst bei L. Act. erud. 1692: De linea ex lineis ...., wo auch zuerst krummlinige Coordinaten erwähnt werden und das Wort Parameter vorkommt, L. weist darauf hin, dass die Evoluten (die Krümmungsmittelpunktscurven) Huygens aus dem grossartigen horologium oscillatorium 1673 ein specieller Fall. Brennlinien (Kata- und Diakaustiken) hat Tschirnhausen 1682 behandelt (C.), ihre Theorie gab Jac. und Joh. Von Joh. sind die Trajectorien, sowohl die orthogonalen als die andern eingeführt. (Joh. B. Op. I. Gerhard, L. III. 469, 539.) Joh. hat auch die Theorie der kürzesten Linie geschaffen, wie er die Theorie der Exponentialgrössen (der Name rührt von L. her) in den Act. erud. März 1697 begründet und lange vor Euler, deren Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen gekannt (Acad. des scienc. 1702), die vollständige Theorie gab dann Euler in der Introductio, d. h. die erste einigermassen „strenge" Ableitung von e^x gab Cauchy im cours d'analyse 1821. Was die Curvenlehre betrifft, so kommt das Wort Subtangente zuerst bei Huygens vor (C. S. 142). Die Inflexionspunkte hat zuerst de Sluse betrachtet 1668 (C.). Schnabel und Spitze de l'Hospital unterschieden 1696; Rückkehrpunkte (Points de rebroussements) als Punkte, in denen die Tangente unbestimmt wird. Joh.'s Brief an L. 18. Juni 1695 und 17. Juli. Die Lehre von den singulären Punkten, wie sie jetzt üblich, rührt von Saurin her.

Metaphysisch war die Grundvorstellung bei N., wenn auch verschleiert, offen trat sie als solche auf bei L. Am klarsten hat sich L. in der Antwort auf die Angriffe Nieuwentiits ausgesprochen: Responsio etc. in den Acta erud. 1695 (Gerhard Bd. 5, S. 320), er streift hier ganz das, was man heute „Grenzbegriff" nennt, allerdings greift er dann auch zur Mechanik und zeigt eine auffallende Uebereinstimmung mit N. Unklarer sind seine

Briefe an Varignon, dessen Commentar zu de l'Hospital sehr wichtig ist. Dieser schreibt sub 28. Nov. 1701: „Ich nenne infiniment petit oder Differenial einer Grösse das, woran sie unerschöpflich ist und diese Grösse selbst unendlich gross in Bezug auf jene." Diese Auffassung erleichtert besonders das Verständniss der höheren Differentiale, welches in jener Zeit die meiste Schwierigeit machte. L. antwortet auch hier wie so oft sonst mit dem Hinweis auf „sein" Gesetz der Continuität, dem zu Folge Ruhe Grenzfall der Bewegung, die Parabel Grenzfall der Ellipse etc. und die Gesetze, welche im Endlichen gelten, auch im Unendlichen giltig bleiben. L. selbst hat „sein" Gesetz wiederholt und stets schwerfällig formulirt, besser ist es von l'Huilier gefasst, in der Preisschrift „Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs (1786). Am einfachsten formulirt man: Eine Eigenschaft, welche jedem Glied einer infinit fortsetzbaren Reihe zukommt, kommt auch ihrer Grenze zu. Aber dass das Differential, das die endliche Grösse Erzeugende (prima ratio), also der von der Grösse selbst der Art nach verschiedene Grössenkeim sei, das entging L. so wenig wie „aemulo" (N.). Es ist das Verdienst H. Cohen's dies erwiesen zu haben in: „Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte 1883", einer gedankenreichen Schrift, welche wohl verdiente aus dem Kantischen in's Deutsche übersetzt zu werden. Es sei auch hier gleich auf das Ilfelder Programm 1883 von Freyer: „Studien zur Metaphysik der Differentialrechnung" hingewiesen, das sich durch Klarheit auszeichnet und vielfach mit Cohen zusammentrifft. Herr Vivanti hat, wenigstens nach dem Ueberblick im Enneström, beide Schriften nicht erwähnt. Da es L., weil er das Differential mit seinen Monaden verquickt, nicht gelang, das Fundament seines Calculs klarzustellen, so erhoben sich von allen Seiten Widersprüche, die alle zusammengefasst und begründet sind in Berkeley's Analytiker (1734) und die, wie Freyer treffend sagt, immer dieselben blieben bis auf den heutigen Tag; er weist dabei auf P. du Bois-Reymond's Funktionentheorie hin, eine Schrift, die ganz von vergeblichem Ringen nach Klarheit über den Grenzbegriff erfüllt ist. Freyer hat die 4 wesentlichen Einwände Berkeley's (und D'Alembert's) zusammengestellt.

1) Eine unendlich kleine Quantität, ein Ding zwischen der Null und einer endlichen Grösse sich befindend, sei nicht vorzustellen (dasselbe ist oft genug von der unendlich grossen Quantität gesagt).

2) Das Identitätsgesetz der Logik sei verletzt, erst haben die Momente oder Differentiale Grösse, dann wieder keine.

3) Der Begriff der Geschwindigkeit (und damit der Differentialquotient) sei ein abgeleiteter. Lässt man den Raum oder mit N. die Zeit verschwinden, so hören die Geschwindigkeiten auf und um so mehr ihr Verhältniss.

4) Dass die Resultate richtig seien (beim Rechnen mit unendlich kleinen Grössen), rühre von wiederholten Fehlern her, die sich ausgleichen. Der Einwand von 4 ist oft wiederholt, von L'Huilier, Lagrange, Carnot, selbst von Euler. N., der eine krankhafte Scheu vor allen Diskussionen hatte, hat in seinem Hauptwerk sich fast ganz an die Grenzmethode der Alten gehalten. Das bedeutendste Lehrbuch, das aus seiner Schule hervorging, Maclaurins' „Treatise of fluxions" (1742), trug den Berkeley'schen Einwänden möglichst Rechnung, die Newton'sche Richtung überwog völlig, das Unendlichkleine war geächtet, bis Cauchy den Bann brach und „die Strenge der einen Methode mit der Einfachheit der anderen zu versöhnen suchte" (Leçons sur le calc. diff. 1829) und 1841 Cournot das Unendlichkleine in sein Recht einsetzte. Die Einleitung zu Cournot's Lehrbuch (90 S.) enthält die klarste Philosophie der Differentialrechnung, die bis jetzt geschrieben. Neuerdings ist das Vorurtheil wieder in Aufnahme, als ob die Grenzmethode strenger sei (vergl. z. B. Stolz); dazu ist zu bemerken, dass nur durch Vermittelung des Unendlichkleinen als eines bereits feststehenden uns gegebenen Begriffs überhaupt von einer Annäherung an die Grenze gesprochen werden kann. Die Grenze z. B. 1 als $\lim \sum \frac{1}{2^k}$ steht a priori fest, und dass der unendliche Process sie erreicht, dass man $\sum \frac{1}{2^k}$ gleich 1 setzt, wird eben durch den Begriff des unendlich kleinen du erzwungen, nur darf es nicht negativ definirt werden als die Grösse, welche kleiner als jede noch so kleine, — da würde Einwand I statthaben —, sondern positiv durch die Gleichung $u + kdu = u$, wenn k endlich. Dabei bleibt noch zu erörtern, wie man auf das du kommt. Seit Galilei und Kepler ist fortwährend mehr oder minder deutlich auf die eigentliche Bedeutung des dx hingewiesen als das, wie Cohen sagt, realisirende, d. h. die intensive Grösse, bezw. der Grössenkeim, der durch einen unendlichen Process die endliche, d. h. mit unseren eigenen körperlichen Abmessungen vergleichbare Grösse erzeugt. Diese realisirende Bedeutung des dx hat im bestimmten Integral niemals völlig unterdrückt werden können. Nur weil wir uns der einzelnen differentialen Stufen, durch welche unser Vorstellungsvermögen in Momenten N.'s hindurchgeht, nicht bewusst sind, gehen wir von der endlichen Grösse aus und kommen so auf das dx rückwärts durch einen unendlichen Theilungsprocess als dessen Grenzabschluss. Dass wir im Grenzabschluss oder Grenzbegriff eine Kategorie der Vernunft besitzen, welche den rastlosen Fortgang der nach dem Trägheitsgesetz an sich unbegrenzten Vorstellungsreihe hemmt, ist in neuester Zeit des öfteren betont werden. Derselbe infinite Process, der aus dem x das dx erzeugt, erzeugt aus dem dx das d^2x, etc. Dass das Unendlichkleine und das mit ihm stets verbundene Unendlichgrosse wohldefinirte Begriffe

sind, ist zuerst von Bolzano in seinen Paradoxien des Unendlichen (1847 und 48) nachgewiesen. Dort findet sich die Bemerkung, dass die Vorstellung des Ganzen keineswegs durch die aller Theile der Reihe nach durchzugehen braucht, dort die Stelle: „Eine Menge ist unendlich“, heisst: „es ist eine Vielheit, die sich durch eine blosse Zahl nicht bestimmen lässt“, daraus folgt aber noch gar nicht, dass diese Vielheit etwa auf keine Art zu bestimmen sei, z. B. die Menge der Punkte zwischen A und B [als welche ja angeschaut, bezw. gemessen werden kann]. Nächst Bolzano ist Kerry zu nennen, der im „System einer Theorie der Grenzbegriffe 1890“ die richtige Bemerkung macht, dass der Begriff einer unendlichen Zahl keineswegs selbst etwas unendliches ist und der, was sehr wesentlich, nachweist, dass dieser Begriff in die weite Klasse der indirekten (d. h. durch Beziehungen zu feststehenden gegebenen) gehört, wie jedes x in einer Gleichung. Zu bemerken ist, dass eigentlich jeder Beziehungsbegriff seiner Natur nach auf einen unendlichen Prozess führt, z. B. die Gleichung $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$ führt unmittelbar auf die Reihe $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$. Die Kunst des Mathematikers besteht gerade darin, durch Subtraktion und Multiplikation die direkte klare Vorstellung der 1 für x zu erwecken. Man sieht, wie treffend Dedekind die unendliche Menge als die ursprünglichgegebene auffasst. Wie nichtssagend die negative Definition des Unendlichkleinen ist, geht am besten aus der Fassung hervor, die ihr Cauchy in dem klassischen „cours d'analyse“ von 1821 gegeben: „eine Grösse wird unendlich klein, wenn ihr Zahlenwerth bis in's Unendliche abnimmt, so dass er sich der Grenze 0 nähert“, dagegen hatte Berkeley völlig Recht mit Nr. 1; es muss heissen: Eine Grösse ist unendlich klein, wenn durch ihre unendlichfache Wiederholung eine endliche Grösse erzeugt werden kann. Auch auf die Einwände sub 2 und 3 muss eingegangen werden. Der Nullcharakter des Differentials ist nie verkannt worden, und Euler hat dx oder u geradezu mit Null bezeichnet, aber Null ist ein äusserst komplizirter Begriff, noch mehr als selbst 1, und die Mathematiker haben die Gewohnheit die verschiedensten Begriffe, wie z. B. die in a^n mit demselben Zeichen zu bezeichnen. Die Null der Subtraktion ist u. a. Zeichen für einen Begriff, der Umfang ohne Inhalt hat, für einen Complex, der leer ist, und leer ist wohl die Grundbedeutung von *sifr*; die Null der Division ist ein Zeichen für einen Begriff, der Inhalt ohne Umfang hat, bezw. aus dessen Merkmalen ein Einzelnes, der Grösse nach Abstufbares verschwindet, wie das schon N. im lemma 8 der Prinzipien am Beispiel des Dreiecks, das seine Form bewahrt, wenn die Seiten unendlich klein werden, klar gemacht hat. Die Unterscheidung der beiden Hauptarten Null findet sich bei Euler in der Einleitung zu seiner Differentialrechnung, die weit tiefsinniger

ist, als sie den Zeitgenossen, die sie nicht verstanden, und daher nicht würdigten, erschien, wie schon Cohen betont hat; spotteten doch Johann B. und L. darüber, dass Nieuwentiit $2m$ und $m2$ unterschied, wenn m unendlich. Kein Bild macht das Wesen der unendlich kleinen Grössen klarer als das von Berkeley im Spott gebrauchte; Gespenster der entschwundenen Grössen nennt er sie, es sind die Geister der werdenden Grössen. Unter sich sind die Differentiale gleicher Ordnung, d. h. die, welche durch gleich oft wiederholten infiniten Prozess die endliche Grösse erzeugen, völlig homogen und vergleichbar und können alle Beziehungen von Grössen haben.

Die weitere Fortsetzung der Geschichte der Differentialrechnung würde zu einer Geschichte der Mathematik des 18. und 19. Jahrh. werden müssen und ist eignen Werken zu überlassen. Ein sehr wichtiger Theil der Arbeit ist bereits geleistet durch die Geschichte der unendlichen Reihen von Reiff Tüb. 1889 und hier soll nur noch auf Cauchy eingegangen werden, der vielfach als Neubegründer der Analysis angesehen wird. Z. hat im 2. Heft der Kopenh. Berichte von 1895 hervorgehoben, dass das 17. Jahrh. incl. Huygens und Newton das Gefühl für die Strenge der Alten durchaus noch besass; das Gefühl ging im Laufe des 18. Jahrh. verloren, bewies doch L. mittelst Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass $1 - 1 + 1 - 1 \cdots = \frac{1}{2}$, wenn auch der geniale Instinkt Eulers ihn selten irren liess. Erst bei d'Alembert und besonders Lagrange beginnt die Gegenströmung. Lagrange hat zunächst die Differentialrechnung frei von aller Metaphysik begründen wollen; zuerst in der Abhandlung von 1772, dann in der so berühmt gewordenen „théorie des fonctions analytiques 1796".

Sein Grundirrthum, dass sich $f(x + h)$ stets nach Potenzen von h entwickeln lasse, ist bekannt. Die Ableitung $f'(x)$ wird definirt als Koeffizient von h. Lagrange geht also von der Taylor'schen Reihe aus. Sie findet sich zuerst in der Methodus incrementorum Brook Taylors von 1715, den Namen gab ihr L'Huilier 1786 in der Berliner Preisschrift, die Methodus incrementorum enthält auch die Vertauschung der unabhängigen Variabeln zuerst (Kiepert-Formel 93). Die Reihe ist in derselben naiven Weise abgeleitet, wie dies heute noch in den Schulen unter der Annahme geschieht, dass $x + \varepsilon$ wirklich der x benachbarte Werth ist, also $f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x)$ sei und $h = n\varepsilon$. Maclaurin leitete dann die nach ihm genannte Reihe mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten ab. Joh. Bernoulli reklamirte die Taylor'sche Reihe als sein Eigenthum, und in der That ist sie im Grunde von der Bernoulli'schen Reihe, die Joh. bereits 1694 gegeben, nicht verschieden. Lagrange dehnte in der erwähnten Abhandlung von 1772 die Reihe auf Funktionen beliebig vieler Variabeln aus und gab in der Théorie des fonctions, die nach ihm genannte Form des. Restes (N.) und

damit zugleich auch eigentlich den sog. ersten Mittelwerthsatz der Integralrechnung, wenigstens in dem speziellen Fall, wenn $h(x)$ gleich 1 ist. Cauchy's bedeutendste Leistungen knüpfen an die Taylor'sche Reihe an, er gab 1826 die nach ihm benannte Form des Restes, Kiepert-Formel Nr. 49b, die in der Anmerkung gegebene Erweiterung rührt von Roche her (Montpellier 1858, bezw. Schlömilch, Handbuch der Diff. und Integr. 1847). Von Cauchy ist das erste „Monstrum" die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ behandelt, deren sämmtliche endliche Ableitungen verschwinden, deren Maclaurin'sche Entwickelung also für jedes x convergirt, ohne $f(x)$ darzustellen.

Cauchy hat zuerst die Nothwendigkeit allgemein plausibel gemacht, die Grundbegriffe der Analyse, das Unendlichkleine, die Kontinuität, die Convergenz genau zu unterscheiden und zu definiren, wenngleich ihm Gauss und Bolzano vorangingen und ihn an Strenge übertrafen, so drangen sie doch nicht in die Oeffentlichkeit. Cauchy hat auch die Theorie der Funktionen complexer Variabeln, wenn auch nicht geschaffen, das hat auch Gauss vor ihm gethan, aber als neuen wichtigen Zweig in die wissenschaftliche Welt eingeführt. Zu bemerken ist, dass Cauchy die komplexen Zahlen nie als Zahlen anerkannt hat, wie dies Gauss, cf. die Anzeigen zur Theorie der biquadratischen Reste, gethan hat. Cauchy hat 1814 (Mémoire sur les intégrales définies) gezeigt, dass die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integration nur gestattet ist, wenn keine innere Divergenz stattfindet; er hat die entsprechende Bedingung für die Differentiation unter dem $\int$ angegeben (Anc. exerc. Tom. II), die einfache Ableitung der Taylor'schen Reihe durch Integralrechnung gegeben und 1831 (Mém. sur le calc. des limites) den entscheidenden Satz gegeben: Dass die Taylor'sche Reihe convergirt im Innern eines Convergenzkreises, der durch den dem Entwicklungscentrum nächsten singulären Punkt geht. Dass die Reihe weiter convergiren kann, dann aber nicht die erzeugende Funktion, sondern die von der hebbaren Unstetigkeit befreite darstellt, hat wohl zuerst Riemann ausgesprochen. Abschliessend sind die Arbeiten von Pringsheim in den Berichten der Math.-Vereinigung von 1893. Als bedeutendste Leistung Cauchy's gilt das Mémoire von 1825 sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, in welchem er die Abhängigkeit des bestimmten Integrales vom Integrationsweg nachwies (also komplexe Werthe der Variabeln zuliess) und damit den eigentlichen Grund für die Periodicität der aus den Integralen algebraischer Integranden entspringenden Funktionen aufdeckte. Sofort nach dem Erscheinen des Briefwechsels zwischen Gauss und Bessel wurde in der deutschen Litter.-Zeit. von 1881 Nr. 37 darauf hingewiesen, dass Gauss im Brief vom 18. Dez. 1811 sich bereits mit der komplexen Integration als Quelle der Periodicität völlig vertraut zeigt. Gauss hat auch den Beweis, dass

das geschlossene Integral um einen synektischen Bereich 0 ist, durch Transformation auf ein Doppelintegral, das über sämmtliche Elemente der betreffenden Fläche summirt wird, gegeben. Das nimmt dem Verdienste Cauchy's nichts, der ja auch das grundlegende Theorem der Determinanten, das Multiplikationsgesetz zuerst mit Beweis veröffentlicht hat. Wohl sind in den 789 Memoiren viele Irrthümer, manche Einschränkungen sind seinen Sätzen über Stetigkeit etc. zuzufügen, aber die Theorie der Convergenz der Reihen nicht nur, sondern unsere ganze heutige Analysis geht auf Cauchy zurück, an den Weierstrass ganz unmittelbar anknüpft.

LEBENSGESCHICHTE[1]

DES UNGARISCHEN MATHEMATIKERS

JOHANN BOLYAI DE BOLYA,

K. K. HAUPTMANN IM GENIECORPS (1802—1860).

VON

FRANZ SCHMIDT

IN BUDAPEST.

1) Ein Auszug dieser Biographie ist in ungarischer Sprache auf S. XX—XXVIII der neuen Ausgabe des Appendix erschienen: „J. Bolyai: Scientia spatii absolute vera.“ Mit Vorwort, ungarischer Uebersetzung und Erläuterungen von J. Suták sowie J. Bolyais Biographie von F. Schmidt. Budapest 1897.

Als ich vor dreissig Jahren mit J. Hoüel[1]) in Bordeaux bekannt wurde, ersuchte mich dieser ihm nähere Mittheilungen über das Leben und die Werke der beiden ungarischen Mathematiker Wolfgang und Johann Bolyai zu machen. Ueber Wolfgang Bolyai war in Wurzbachers Biographischem Lexicon (2. Band, Wien 1857) eine Lebensgeschichte erschienen. Weitere Mittheilungen verdankte ich dem Herrn Prof. Samuel Szabó, gegenwärtig in Klausenburg, welcher auch die Güte hatte mir zwei Exemplare des Tentamen[2]) (sammt den übrigen ungarischen und deutschen Werken Wolfgang Bolyais) zu übersenden. Eines der Exemplare des Tentamen erhielt Prof. Hoüel in Bordeaux.

Die Nachrichten über Johann Bolyai beschränkten sich darauf, dass dieser k. k. Hauptmann im Genie-Corps war, viele Duelle hatte, den Appendix schrieb, 1833 in den Ruhestand trat — und 1860 starb.

Bestrebt nähere Aufschlüsse über das Leben und Wirken dieses genialen Mannes zu erhalten, dessen einzige Abhandlung nach einander in allen Cultursprachen und 1895 sogar japanisch erschienen ist, wandte ich mich an die königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, um eine Abschrift des Briefwechsels zwischen Wolfgang Bolyai und C. F. Gauss zu erlangen, denn W. Bolyai und Gauss waren Jugendfreunde, besuchten von 1796—1798 die Universität in Göttingen und blieben bis 1853 in Correspondenz. Meinem Ansuchen wurde im Dezember 1896 in dankenswerther Weise entsprochen und mit Benützung dieser Briefe, einer fragmentarischen Selbstbiographie Johanns und eines an seinen Vater gerichteten Briefes, der sich in seinen Papieren vorgefunden hat, kann ich die folgende Lebensbeschreibung geben.

Johann Bolyai de Bolya ist am 15. Dez. 1802 zu Klausenburg geboren. Sein Vater, Wolfgang, war 1804—1851 Professor der Mathematik

---

1) Jules Hoüel, Prof. an der Faculté des Sciences in Bordeaux, geboren 7. April 1823, gestorben 14. Juni 1886.

2) Unter Tentamen wird das zu Maros Vásárhely ohne Angabe des Verfassers 1832—33 erschienene und lateinisch verfasste Lehrbuch Wolfgang Bolyais in 2 Bänden verstanden. — Der Appendix zum ersten Band ist jene berühmte Abhandlung von Johann Bolyai über Nicht-Euklidische Geometrie, die kurz als „Appendix“ bezeichnet wird.

und Physik am ev.-ref. Collegium zu Maros Vásárhely und ist 81 Jahre alt am 20. November 1856 gestorben. Seine Mutter, Susanna Benkö de Arkos, war eine schöne Erscheinung mit vorzüglichen Fähigkeiten, aber hysterischer Natur; die letzten vier Jahre verlebte sie in Wahnsinn. Trotz des bescheidenen Einkommens eines damaligen Professors in Siebenbürgen liess der Vater seinem Sohne eine sorgfältige Erziehung zu Theil werden. Den ersten Unterricht erhielt der sehr aufgeweckte Sohn im elterlichen Hause. Die besten Studenten waren seine Hauslehrer. Den Unterricht in der Mathematik behielt der Vater für sich. Johanns Fortschritte in der Mathematik waren so schnell, dass er — wie sein Vater öfter erzählte — den Beweis des Theoremes gar nicht abwartete und die Lösung des Problemes selber gab. „Wie ein Teufel sprang er vor mich" — sind die Worte seines Vaters, „und bat mich weiter zu gehen." Im Alter von zwölf Jahren legte er das „Rigorosum" (die Prüfung über sechs Gymnasialklassen) ab, und wurde nach der Sitte jener Zeit „Student". Seine Uebersetzung aus dem Ungarischen ins Lateinische (bei dem Rigorosum) war im Stile des Tacitus geschrieben, so dass die Professoren die Arbeit nicht genug loben konnten. Student war er zwei Jahre lang, oder besser gesagt, zwei Jahre ging er in das Collegium Damen-Brett spielen. Die Vorlesungen besuchte er selten. Als die Zeit der Prüfungen herankam, klagten ihn die Professoren bei seinem Vater an, der dem leichtsinnigen Sohn einen Verweis ertheilte. Nach zweimaligem Durchlesen der Vorlesungen ging er zur Prüfung und antwortete vorzüglich; woraus man ihn auch fragen mochte, er war vollkommen vorbereitet.

Wenn der Vater krank war, schickte er den Sohn in die Schule, damit dieser den bärtigen Schülern jener Zeit Vorträge halte, und die Schüler hörten den 13jährigen Sohn lieber an, als den Vater, weil sie ihn besser verstanden.

Schon im zwölften Jahre war er ein vorzüglicher Violinspieler, so dass er die schwersten Stücke vom Blatte spielen konnte. In seiner Selbstbiographie findet sich über seine Kinderjahre folgende Stelle: „Schon mit 3—4 Jahren hatte ich Neigung zum Nach- und Selbstdenken und zur Mathematik, indem ich den Boden mit mathematischen Figuren vollschrieb, die fünf regelmässigen Körper kannte und auch ihre Namen. Auch über die Gestalt der Erde, des Himmels und das Wesen Gottes dachte ich nach." ...

Diese selbstbiographischen Notizen werden ergänzt durch einen Brief, den sein Vater am 18. Dezember 1807 über seine Familie an Gauss schrieb: „Dieselbe besteht aus meinem Erstgebornen (eine Tochter ist mir gestorben), der ist ein geistvoller, schöner Bub und von festem Körper, er ist fünfjährig, ich lehre ihn noch nicht, doch im Spiele hat er viele Gestirne am

Himmel kennen gelernt und die gewöhnlichen geometrischen Gestalten u. dgl.; er macht von seinen Begriffen auch schickliche Anwendungen, z. B. er zeichnet von sich selbst die Lage der Sterne in den Gestirnen mit Kreide aus. Einmal noch im vorigen Winter schnitt er ein Kartoffel-Sinus eines Kartoffel-Bogens, und so war es; wieder als er auf dem Lande den Jupiter erblickte, sagte er: Wie ist es, dass man den auch von der Stadt, auch von da sieht, — er muss weit sein. — Wieder drei entlegene Oerter, wo er gewesen ist, verlangt er, ich sollte es ihm mit einem Worte bezeichnen; ich wusste es nicht, nun fragte er, ob das eine mit dem anderen in einer Linie wäre, und so alle nach der Reihe, nun sagte er, also ist es ein Triangel u. dgl. viele. Er hat eine grosse Lust am Papierschneiden mit der Scheere; einmal schneidet er ein △, es war rechtwinkelig; nun wiewohl ich ihm nichts von den Arten der Triangel jemals sagte, sprach er, dies sei so ein Dreieck, wie ein halbes Rechtangel. — Seinen Körper übe ich vorzüglich; kann mit seiner kleinen Haue in der Erde gut arbeiten. — Es kann die Blüthe fallen ohne Frucht zu lassen. Soll die Hoffnung nicht täuschen, so soll er nach 15 Jahren zu Euch reisen, und Dein Schüler sein; wenn ich gesund bin dazumal, begleite ich ihn zu Dir."

In Johann's Selbstbiographie findet sich ferner folgende Stelle: „Mit neun Jahren lernte ich durch Daniel Vajda die sechs Bücher des Euklid, später nach Vega's Vorlesungen. Er (= der Vater) machte mich auf die grosse Lücke und Unvollkommenheit der Parallelentheorie aufmerksam, bedeutete mich weit besseres als seine Vorgänger geleistet, vollständige und gebührende Befriedigung aber dennoch nicht gefunden zu haben, — insoferne als keines seiner Axiome den geforderten Grad geometrischer Evidenz besitze, obschon jedes zum strengen Beweis des XI. Axioms hinreiche und, so sehr auch jedes von ihnen auf den ersten Blick, und voreilig geurtheilt annehmbar scheine. Er behauptet jedoch ohne Beweis, es sei unmöglich das XI. Axiom zu beweisen. — Er suchte mich, nicht ohne Grund besorgt, ich könnte damit mein ganzes Leben umsonst oder vergeblich zubringen, auf alle mögliche und erdenkliche Art von allen weiteren Untersuchungen dieses Gegenstandes gänzlich abzuhalten und abzuschrecken. — Mit seiner gütigen Erlaubnis sei es gestattet, um seine Ideen darüber einigermassen zu schildern, einen Auszug aus einem Briefe von ihm einzurücken." (Fehlt.) — Dieser Brief ist vom Vater an den Sohn in der Ingenieur-Akademie gerichtet gewesen.

Am 10. April 1816 schreibt W. Bolyai an seinen Freund Gauss über seinen Sohn und über dessen weitere Ausbildung:

„Höre meinen Plan: Mein $13^1/_2$ Jahre alter Sohn konnte, als er das 9. Jahr erreichte, nichts als deutsch und ungarisch sprechen und schreiben,

und ziemlich aus Noten Violin spielen; er wusste sogar zu addieren nicht; ich fing zuerst mit Euklid an, nachdem wurde er mit Euler bekannt; jetzt weiss er von Vega (welcher mein Manual ist im Collegio) nicht nur die ersten zwei Bände überall, sondern ist auch im dritten und vierten Band bewandert, liebt Differential- und Integral-Rechnungen, und rechnet darin mit ausserordentlicher Fertigkeit und Leichtigkeit, so wie er in Violin-Concerten den Bogen in schweren Läufen leicht führen kann ... jetzt endigt er bald meine Physik- und Chemie-Vorlesungen; einmal hat er auch hiervon mit meinen erwachsenen Schülern ein öffentliches, sehr löbliches Examen gegeben in lateinischer Sprache, theils wo ihn andere ad aperturam fragten, theils bei Gelegenheit liess ich ihm einige Beweise in der Mechanik mit Integral-Rechnung führen, wie veränderliche Bewegung, der Cycloide u. dgl. Nichts war mehr zu wünschen, edle Einfachheit, Klarheit, Schnelligkeit und Leichtigkeit waren auch für Fremde hinreissend, er hat einen schnell und vielfassenden Kopf, und manchmal Blitze von Genie, die mehrere (Geistes-) Riesen auf einmal mit einem Blicke findend durchsehen; er liebt reine, tiefe Theorien und Astronomie; ist schön und ziemlich fest gebaut, und sieht sonst still aus; ausgenommen, dass er sehr gern und feuervoll mit andern Kindern spielt; sein Charakter wird, insofern man urtheilen kann, fest und edel; ich habe ihn zum Opfer der Mathematik bestimmt, er hat sich auch dazu gewidmet und verlangt nach zwei Jahren zu Dir, wenn Du auch verlangst einen echten Apostel der Wahrheit in einem fernen Lande zu bilden; ich wollte ihn 3 Jahre lang bei Dir halten, und wenn es möglich wäre (wir wollen treu und offenherzig alle Umstände erwägen) in Deinem Hause, denn allein kann man einen 15jährigen Jüngling nicht lassen, und einen Hofmeister mitzuschicken übersteigt meine, durch viele Processe geschwächten Kräfte; — indessen einem Studenten, der von hier hinaufginge, könnte ich ihn doch anvertrauen, und würde ihm ein Honorarium geben, wenn ich nur dann einen bekäme, dem ich soviel trauen könnte, — Deiner Frau Gemahlin Unkosten würde ich, versteht sichs, schon entschädigen. ... Wir würden alles anordnen, wenn ich mit ihm zu Dir hinaufginge. ... Einige haben gerathen ihn zu Pasquich (Ofner Astronom) .. zu geben; andere haben zum Bugge gerathen in Wien; ich und er verlangen in jeder Rücksicht zu Dir!" ...

Auf diesen Brief Bolyais kam von Gauss keine Antwort. Nachdem der Wunsch des Vaters, seinen Sohn nach Göttingen zu bringen, nicht in Erfüllung gegangen war, kam Johann 1817 nach Wien in die k. k. Genie-Akademie, ein Entschluss, der mit grossen Opfern verbunden war. — In der Genie-Akademie war Johann der beste Schüler seiner Klasse. — Sein Lehrer für Mathematik war Johann Wolter von Eckwehr, k. k. Hauptmann im Genie-Corps. Bei der Inspizirung der Schule durch den Chef des Genie-

Corps, den Erzherzog Johann, hatte Johann Gelegenheit Proben seines Talentes zu geben.

Schon aus der Genie-Akademie berichtete er seinem Vater: „Er habe zu einem möglichen Beweise des XI. Axioms zuerst den Weg eingeschlagen, zu beweisen, dass eine mit einer Geraden gleichlaufende d. i. davon in einer Ebene überall gleichweit abstehende Linie, auch eine Gerade sei, — und habe zu diesem Zweck die Eigenschaft einer solchen Linie für den Gegenfall zu entwickeln angefangen. — Da antwortete dieser 1820 in einem denkwürdigen Schreiben folgendermassen.“ (Dieser Brief fehlt.)

Aus den Akten des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums stammen folgende Daten:

Bolyai, Johann de Bolya, — Land: Siebenbürgen. — Geboren: 1802, Religion: reformirt. — Assentirt und eingetheilt am 7. September 1822. Vom Zögling der 7. Classe der Ingenieur-Akademie zum Cadetten des Ingenieur-Corps. — Ernannt: Unterlieutenant: 1. Sept. 1823 bei der Fortification-Localdirektion in Temesvar. — Ernannt: Oberlieutenant den 8. Sept. 1827. — Transferirt 2. September 1830 nach Lemberg. — Ernannt: Capit. Lieutenant 14. März 1832. — Uebersetzt 29. April 1832 zur Fortification-Localdirektion nach Olmütz. — Pensionirt 16. Juni 1833. — Gestorben 1860.

Die Reise in seine erste Garnison von Wien nach Temesvar, 72 Meilen, hat er vom 17. bis 30. September 1823 zurückgelegt, und dafür 36 fl. Conv. Münze Vorspann-Gebühren bezahlt.

In seinem Corps war er der erste Mathematiker, der beste Violinspieler, aber auch der erste Fechter.

In Temesvar scheint Johann dem Wesen nach sein Problem erfasst zu haben. In seinen Papieren hat mein Sohn, Prof. Dr. Martin Schmidt, einen in ungarischer Sprache geschriebenen Brief Johanns an seinen Vater vorgefunden, der wie folgt lautet:

„*Temesvar*, *3. November 1823.* — Lieber, guter Vater! Ich habe über meine Entdeckung so übermässig viel zu schreiben, dass ich mir gerade jetzt nicht anders zu helfen weiss, als dass ich mich in Nichts einlasse und blos auf einen Quartbogen schreibe; ich erwarte Antwort auf meinen zwei Bogen starken Brief .... Zuerst antworte ich auf das Binomium: ....“

Das Ende des Briefes lautet:

„Mein Entschluss steht fest ein Werk über die Parallelen herauszugeben, sobald ich den Stoff geordnet habe und es die Umstände erlauben; gegenwärtig hab' ich es noch nicht entdeckt, aber der Weg, welchen ich befolgt habe, verspricht beinahe sicher die Erreichung des Zieles, wenn es überhaupt möglich ist; ich habe das Ziel noch nicht, aber ich habe so

grossartige Sachen herausgebracht, dass ich selbst verblüfft war, und es ewig Schade wäre, sollten sie verloren gehen; wenn Sie sie sehen werden, werden Sie es auch erkennen; jetzt kann ich nur soviel sagen, dass ich aus Nichts eine neue andere Welt geschaffen habe; — alles, was ich bisher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu einem Thurme. Ich bin überzeugt, dass es mir nicht minder zur Ehre gereichen wird, als ob ich es schon entdeckt hätte."

Dieser Brief stimmt überein mit seinen selbstbiographischen Notizen, wo er sich folgendermassen äussert:

„Erst im Jahre 1823 hatte er dem Wesen nach sein Problem durchdrungen, obschon auch nachher noch Vervollkommnungen hinsichtlich der Materie und Form hinzukamen. — Diese Arbeit, worin bereits der Grund zum Ganzen gelegt war, teilte er seinem Vater und anderen Personen, auch seinem einstmaligen Lehrer J. Wolter von Eckwehr im Jahre 1825 mit, und das betreffende Schriftstück dürfte sich in des Letzteren Nachlasse befinden."

Meine zur Auffindung dieser Mittheilung unternommenen Schritte bei der Familie Wolters, von der nur noch ein Sohn am Leben ist, sind erfolglos geblieben. — In den nachgelassenen Aufzeichnungen Johann Bolyais befindet sich ein zwei Bogen umfassendes Manuscript des Appendix in deutscher Sprache, an vielen Stellen überschrieben und ausgebessert; das dazu verwendete Papier ist jenem des Briefes von 1823 ähnlich, vielleicht noch älter.

Der Appendix war also ursprünglich in deutscher Sprache geschrieben. Bei einem Zusammentreffen mit seinem Vater veranlasste dieser ihn die Arbeit in's Lateinische zu übersetzen. Johann übergab sie dem Vater zur Drucklegung und trug 104 fl. 54 Kr. zu den Kosten bei. —

Sie erschien als Appendix zum ersten Band in seines Vaters Werk: Tentamen juventutem studiosam ..... 1832[1]). Vom Appendix waren schon 1831 Separat-Abdrücke fertig gestellt.

Das Erscheinen dieser Abhandlung veranlasst Wolfgang Bolyai den 15 Jahre hindurch unterbrochenen Briefwechsel mit Gauss wieder aufzunehmen. — Ueber seinen Sohn schreibt W. Bolyai an Gauss am *20. Juni 1831* aus M. Vásárhely:

---

1) Der volle Titel des Appendix, dem auch eine Tafel beigefügt ist, lautet: Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de Eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo, — Maros-Vásárhelyini, 1832. Typis Collegii Reform. per Josephum et Simeonem Kali de Felsö-Vist.

„Der ist schon Oberlieutenant im Genie-Corps und wird schon bald Hauptmann, ein schöner Jüngling, virtuos auf der Violin, guter Fechter und brav, aber hat oft duellirt[1]) und ist überhaupt noch ein zu wilder Soldat — aber auch sehr fein — Licht in Finsternis — und Finsternis im Lichte — und ein passionirter Mathematiker mit sehr seltenen Geistesfähigkeiten — itzt ist er in Lemberg in Garnison — ein grosser Verehrer von Dir — Dich zu verstehen und zu schätzen fähig. — Auf seine Bitte schicke ich dieses sein Werkchen zu Dir: habe die Güte es mit Deinem scharfen, durchdringenden Auge zu beurtheilen und Dein hohes Urtheil ohne Schonung in Deiner Antwort, auf die ich sehnsuchtsvoll warte, zu schreiben. Es ist der erste Anfang von meinem Werke, welches unter der Presse ist, ich war Willens den ersten Band itzt mitzuschicken, es ist aber noch nicht heraus. ... Mein Sohn hält mehr von Deinem Urtheil, als von ganz Europa — ... Der Uebergeber dieses Briefes, Sohn des damals in Göttingen gewesenen Daniel v. Zeyk, war in Paris, und ist aus London zu Euch gekommen, — einer meiner liebsten und besten Schüler". (Zeyk hat weder den Brief von 1831, noch die darin erwähnte Arbeit persönlich übergeben, sondern wie Gauss in seinem Brief vom 6. März 1832 erwähnt, sie nur zugestellt. Anm. von F. Schmidt.)

Nachdem auch auf diesen Brief keine Antwort gekommen war, schrieb W. Bolyai an Gauss abermals: *am 16. Jäner 1832:*

„Dieses Werkchen hatte ich zu gleicher Zeit mit dem ersten Briefe abgeschickt und wusste lange nicht, wo es in den fatalen Cholera-Umständen hingekommen sey — nun schicke ich es durch Post unter Recepisse zum H. Joseph von Zeyk mit der Bitte, dass er einen Weg ausfindig mache, mein Werk (sobald es herauskömmt) Dir kostenfrei einzuhändigen. — Wegen der Choleraumstände habe ich aus Ungarn kein Papier bekommen können. ... Mein Sohn war nicht gegenwärtig, wie sein Werkchen gedruckt wurde: er liess die Errata (die hinten sind) drucken; ich habe die meisten, um Dir weniger lästig zu sein, mit Feder corrigirt. — Er schreibt aus Lemberg, dass er nachdem manches vereinfacht und eleganter gemacht, und die Unmöglichkeit, a priori zu bestimmen, ob das Ax. XI wahr sey oder nicht, bewiesen habe. Verzeihe mir dieser Angelegenheit wegen — mein Sohn hält mehr von Deinem Urtheile, als von ganz Europa — und harret allein darauf. Ich bitte Dich innigst mich bald von Deinem Urtheile zu benachrichtigen, welchem gemäss ich ihm nach Lemberg schreiben soll."

---

1) In einer Garnison forderten ihn 13 Cavallerie-Officiere; er nahm die Forderungen an, mit der Bedingung, dass ihm gestattet werde, nach je zwei Duellen ein Stück auf der Violin zu spielen. — Er blieb Sieger über Alle.

Nach einer Pause von 24 Jahren schreibt Gauss *am 6. März 1832*[1]):

„Durch Deine beiden, mir durch Herrn Zeyk zugestellten Briefe hast Du mein alter, mir unvergesslicher Freund mich sehr erfreut. Ich zögerte nach Empfang des ersten, Dir sogleich zu antworten, weil ich erst die Ankunft der versprochenen kleinen Schrift erwarten wollte. . . .

Jetzt Einiges über die Arbeit Deines Sohnes.

Wenn ich damit anfange „dass ich solche nicht loben darf“ so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben, hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theil schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Aeusserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenig Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mittheilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar.

Dagegen war meine Absicht mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.

Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.

Sehr prägnant und abkürzend finde ich die Bezeichnungen: doch glaube ich, dass es gut sein wird für manche Hauptbegriffe nicht bloss Zeichen oder Buchstaben, sondern bestimmte Namen festzusetzen, und ich habe bereits vor langer Zeit an Einige solcher Namen gedacht. — So lange man die Sache nur in unmittelbarer Anschauung durchdenkt, braucht man keine Namen oder Zeichen; die werden erst nöthig, wenn man sich mit Anderen verständigen will. — So könnte z. B. die Fläche, die dein Sohn F. nennt, eine Parasphäre, die Linie L ein Paracykel genannt werden: es ist im Grunde Kugelfläche oder Kreislinie von unendlichem Radius. Hypercykel könnte der Complexus aller Punkte heissen, die von einer Geraden, mit der sie in einer Ebene liegen, gleiche Distanz haben; ebenso Hypersphäre. Doch

1) Gauss letzter Brief war aus dem Jahre 1808.

das sind alles nur unbedeutende Nebensachen: die Hauptsache ist der Stoff, nicht die Form.

In manchem Theile der Untersuchung habe ich etwas andere Wege eingeschlagen. . . .

(Hier folgt ein geometrischer Beweis von Gauss, den Herr Prof. Dr. Paul Stäckel in Kiel in den Göttinger Nachrichten 1897 herausgegeben hat.)

. . . Es steht Dir frei es Deinem Sohne mitzutheilen: jedenfalls bitte ich Dich, ihn herzlich von mir zu grüssen und ihm meiner besonderen Hochachtung zu versichern, — fordere ihn aber doch zugleich auf sich mit der Aufgabe zu beschäftigen:

Den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu berechnen. Da der Flächeninhalt eines Dreiecks sich so einfach angeben lässt, so hätte man erwarten sollen, dass es auch für diesen Kubikinhalt einen eben so einfachen Ausdruck geben werde: aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht.

Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist es unerlässlich die Möglichkeit eines Plannums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man muss sich wundern, dass alle Schriftsteller von Euklid bis auf die neusten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind: allein diese Schwierigkeit ist von durchaus verschiedener mit der Schwierigkeit zwischen Σ und S zu entscheiden, und jene ist nicht gar schwer zu heben. — Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen anderen eben so starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatz angedeutet, der in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht, Stück Seite 625. . . . . ."

Im Besitze eines Exemplars des Appendix, welches handschriftliche Aufzeichnungen von Johann und Wolfgang Bolyai enthält, theile ich die Wesentlichsten hier mit.

Dieses Exemplar scheint vom Vater an den Sohn nach Lemberg wegen Feststellung des Titels und der Figurentafel gesendet worden zu sein.

Die Innenseite des Umschlages ist von Johann Bolyai beschrieben und enthält folgende:

„Anmerkung. Des Verfassers Schuld könnte es doch offenbar nie sein, wenn allenfalls ein Urtheil hierüber bloss deshalb schief und geringschätzend ausfiele, weil betreffender Recensent nicht gehörig Meister der Sache geworden ist.

Zur Erleichterung der Beurtheilung und Vorbereitung wird es gut

sein, den mit dem Wesen der Sache noch nicht Vertrauten, das vom k. k. Oberstlieutnant Freiherr von Vega am Ende des 2. Bandes seiner hochgeschätzten Vorlesungen über die Mathematik anempfohlene Werk unter dem Titel: Kritik der Parallel-Theorie von Joh. Jos. Jg. Hoffmann, Jena 1807, fleissig lesen; indem selbst sonst berühmte Mathematiker hinsichtlich dieses Gegenstandes nicht nur ganz befangen und im Dunkeln, sondern Anfangs sogar unempfänglich und gleichgültig sind — die sich jedoch dann niemals zur Classe der Geometer vom ersten Range bekennen dürfen."

Es folgen dann zwei Blatt Schreibpapier: Auf dem ersten ist der Titel des Appendix, genau wie im Tentamen abgedruckt, von Johann Bolyai geschrieben. — Das nächste Blatt mit anderer Tinte von Wolfgang Bolyai geschrieben, enthält einen Titel lautend: Appendix prima. Scientia spatii absolute vera, nulli quoad parallelas supposito Axiomati (Euclideo vel alii simili) innixa. Auctore Johanne Bolyai de eadem Geometrarum in Exercitu Cesareo Regio Austriaco Castrensium Locumtenente Primario. Auctoris Filio; es scheint der vom Vater gewählte Titel zu sein. — Die Figurentafel ist gezeichnet und Fig. 23 bloss in Bleistift skizziert. — Im Texte sind am Rande meist unleserliche Bemerkungen gemacht. Das Exemplar scheint eine Art Correkturexemplar gewesen zu sein; dasselbe ist mehrfach durchstochen, wie diess bei Sendungen vorkommt, die aus mit Epidemien verseuchten Gegenden anlangen.

Am 20. April 1835 schreibt Bolyai gelegentlich der Uebersendung der zwei Bände seines Tentamens an Gauss: „... Am Ende des 2. Bandes ist nebst der Erleuchtung mancher im ersten gegebenen Begriffe, auch eine gewisse Einigkeit bei der Trigonometrie nach dem Gedanken meines Sohnes. — Gerne hätte ich die Auflösung des Tetraeders drucken lassen, welche mein Sohn noch ein Jahr vor der Herausgabe seines Appendix fand, aber die Formeln, die ich sah, waren zu verwickelt, und ich weiss sie nicht. — Und über alles hätte ich den Beweis davon drucken lassen, dass es absolut unmöglich sei, dem menschlichen Auge es einzusehen, ob das XI. Axiom wahr sei, oder nicht: mein Sohn behauptet, den evidenten Beweis davon zu haben, — ich kann sonst nichts beweisen, als dass sowohl das Sein, als das Nichtsein dieses Satzes mit den übrigen euklidischen Axiomen gleich bestehen könne, und dadurch zwei verschiedene Systeme (jedes für sich insofern gleichbestehend) seien, welches ich schon seit vielen Jahren her weiss." .... Schon am Ende dieses Briefes klagt Bolyai seinem Freunde über die Herzlosigkeit seines Sohnes.

Weiter findet sich im Briefwechsel zwischen Gauss und Bolyai nichts, ausser, dass das Verhältnis zwischen Vater und Sohn unleidlich wurde und soweit ausartete, dass der Sohn den Vater zum Duell forderte.

Im Jahre 1838 betheiligte sich Johann, sowie auch dessen Vater an einer Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowsky'schen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig, über die Theorie des Imaginären, — Beide ohne einen Erfolg zu erringen.

Manchmal versuchte er, sich aus den sinnlichen Genüssen herauszureissen und sich der Mathematik wieder zuzuwenden. — Unter seinen Papieren hat sich der Titel gefunden: „Principia doctrinae novae quantitatum imaginariarum perfecte unique satisfacientis, aliaeque disquisitiones analyticae et analytico-geometricae cardinales gravissimaeque: auctore Johanne Bolyai de eadem etc. Vindobonae vel Maros-Vásárhelyini 1853. Doch war ausser dem Titelblatt nichts vorhanden.

Ferner versprach er ein Buch herauszugeben unter dem Titel: Lehre der Lehre (ungarisch: Tan-Tan), das alle Bücher entbehrlich machen sollte. — Mit diesen und ähnlichen Gegenständen, die gar keinen Sinn haben, sind viele Bogen vollgeschrieben.

J. Bolyai war verheiratet. — Von Statur mittelgross, hatte er auch in späteren Zeiten, trotz der fast bäuerlichen Kleidung, eine militärische Haltung. Seine materiellen Verhältnisse waren stets sehr ungünstig, was die mehrfachen Bittgesuche an seine Behörde um Unterstützung bezeugen.

Ein eigener Cynismus ergriff sein ganzes Wesen, und so starb er, mit sich und der Welt zerfallen, am 27. Januar 1860.

Im Jahre 1894 wurde sein fast vergessenes Grab von der ungarischen Mathematisch-Physikalischen Gesellschaft durch einen Grabstein geziert.

Bolyais epochemachende Abhandlung ist, wie erwähnt, 1832 erschienen, — war aber bis 1866 fast ganz vergessen, bis Prof. Richard Baltzer in der zweiten Auflage seiner Elemente der Mathematik 1867 auf dieses Kleinod mathematischen Scharfsinns aufmerksam machte. — Durch diesen angeregt wandte sich

1867 J. Hoüel an mich um Nachrichten über das Leben und die Werke der beiden Bolyai, und veranlasste mich zur Herausgabe einer Biographie beider, die in Grunerts Archiv für Math. u. Phys. erschienen ist (48. Band, S. 217).

1868 übersetzte J. Hoüel den Appendix und die Biographie ins Französische. Er war es auch, der den Minister Baron Joseph Eötvös veranlasste, die Schriften der beiden Bolyai vom ev. ref. Collegium in M. V. zu verlangen, um sie der ungarischen Akademie zur Durchsicht zu übergeben.

Im selben Jahre wurde der Appendix von Battaglini, sowie die Biographie von Angelo Forti italienisch herausgegeben.

1872 bearbeitete J. Frischauf den Appendix in deutscher Sprache (bei Teubner, Leipzig).

1884 veröffentlichte Prof. K. Szily in den Schriften der ung. Akademie eine Biographie Wolfgang Bolyais, in der auch der Sohn Erwähnung findet.

1891 Juni erschien von Dr. George Bruce Halsted zu Austin in Texas die erste englische Uebersetzung.

1895 wurde der Appendix in Tokio ins Japanische übersetzt.

1896 erschien die vierte Auflage der englischen Uebersetzung. — Im Juli unternahm Herr Prof. Halsted eine Reise nach Maros Vásárhely, um nähere Daten über Johann Bolyai zu sammeln, bei welcher Gelegenheit er mich mit seinem Besuche beehrte.

1897 im Februar legte Herr Prof. Julius König den ersten Band der neuen Ausgabe (den arithmetischen Theil) des Tentamen der ungarischen Akademie vor. — In dieser Ausgabe wird der Appendix erst im 2. Bande erscheinen.

In demselben Jahr hat Herr Prof. Dr. Josef Suták auf meine Aufforderung den Appendix ins Ungarische übersetzt und mit einer Einleitung und Erläuterungen versehen. Dieser Ausgabe ist auch der lateinische Original-Text des Appendix vorgedruckt. Sie ist auf meine Kosten erschienen. Die einzige materielle Unterstützung, die mir bei der Herausgabe zu Theil geworden ist, verdanke ich Herrn Fabrik-Director P. Müller, wofür ich ihm hier meinen Dank ausspreche.

Da sich durch diese Ausgabe ein von mir seit dreissig Jahren gehegter Wunsch erfüllt hat: dass die Leistung eines der besten Söhne seines Vaterlandes in der engeren Heimat jene Verbreitung und Anerkennung finde, die ihm die übrigen Kulturvölker bedingungslos zollen — kann ich nicht umhin Herrn Prof. J. Suták meinen aufrichtigsten Dank dafür auszusprechen.

Ausser den schon erwähnten Quellen habe ich noch die Biographien W. Bolyais von den Herren J. Koncz und Kol. Szily theilweise benützt.

DIE BERECHNUNG

DER

IRRATIONALEN QUADRATWURZELN

UND DIE

ERFINDUNG DER KETTENBRUECHE.

VON

G. WERTHEIM.

Drei wesentlich verschiedene Methoden sind vor der Erfindung der Logarithmen zur angenäherten Berechnung irrationaler Quadratwurzeln gegeben worden. Die erste besteht darin, dass man die vorgelegte Zahl N mit einer grossen Quadratzahl q^2 multiplicirt, aus Nq^2 mittels der Formel $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$ die Wurzel zieht und den Rest, der sich dabei ergiebt, vernachlässigt. Der erhaltene Wurzelwerth wird sodann durch q dividirt, und der Quotient ist ein Näherungswerth der Wurzel aus N, um so genauer, je grösser q^2 war. So verfahren z. B. der Marokkaner Ibn Albanna[1]), der italienische Mathematiker Maurolycus[2]) u. a. Wird für q eine Potenz von 10 genommen, was zuerst in der durch Johannes Hispalensis aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzten Schrift Liber Algorismi de pratica arismetrice[3]) (noch unbekannten Verfassers) geschehen ist, so läuft diese Methode im Wesentlichen auf die jetzt allgemein angewandte hinaus.

Eine zweite Methode ist von Nicolas Chuquet erfunden worden. In dem Abschnitt „La rigle des nombres moyens" p. 101 seiner „Triparty en la science des nombres" bemerkt er, dass von dem Bruch $\frac{1}{2}$ zwei Bruchreihen ausgehen, eine fallende $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ und eine steigende $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ Weiter giebt er den Satz, dass der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ stets zwischen den Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegt. Das setzt ihn in den Stand, zwischen zwei beliebigen Zahlen einen Mittelwerth einzuschieben, und mittels dieser Betrachtung zieht er auf S. 111 des genannten Werks die Quadratwurzel aus 6. Da dieselbe zwischen 2 und 3 liegt, so nimmt er zunächst $2\frac{1}{2}$ an. Das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ ist $6\frac{1}{4}$, also zu gross; daher muss für $\sqrt{6}$ eine kleinere Zahl $2\frac{1}{3}$ genommen werden. Da sich diese als zu klein erweist, indem $\left(2\frac{1}{3}\right)^2 = 5\frac{4}{9} < 6$ ist, so ist ein Mittelwerth zwischen $2\frac{1}{3}$ und $2\frac{1}{2}$ zu wählen; ein solcher ist $2\frac{1+1}{3+2} = 2\frac{2}{5}$. Das Quadrat dieser

---

1) Le Talkhys, S. 23.

2) Francisci Maurolyci Arithmeticorum libri duo, Venetiis 1575, p. 112.

3) Trattati d'Aritmetica, pubblicati da Boncompagni. II, p. 86.

Zahl erweist sich als zu klein, folglich ist ein zwischen $2\frac{2}{5}$ und $2\frac{1}{2}$ liegender Werth zu versuchen; ein solcher ist $2\frac{3}{7}$. In dieser Weise fährt Chuquet fort, bis sich ihm $2\frac{89}{198}$ als hinlänglich genauer Werth von $\sqrt{6}$ ergiebt.

Chuquet's Verfahren hat Estienne de la Roche[1]) wörtlich seiner Arithmetik einverleibt, und aus diesem Buche hat es wohl der spanische Mathematiker Joan Perez de Moya[2]) gelernt, der es in seiner Arithmetik auseinander setzt. Die Langwierigkeit des Verfahrens erklärt es zur Genüge, dafs Chuquet's Methode keinen sonderlichen Beifall gefunden hat und bald in Vergessenheit gerathen ist; wenigstens habe ich dieselbe bei keinem Schriftsteller aufser den genannten erwähnt gefunden.

Um die dritte Methode darzustellen, denken wir uns die vorgelegte Zahl N auf die Form $a^2 + r$ gebracht, wo a^2 die grösste in N enthaltene Quadratzahl, also $r < 2a + 1$ sei. Setzen wir dann $\sqrt{a^2 + r} = a + x$, so ergiebt sich durch Quadrirung und Vernachlässigung des Gliedes x^2, dass $r > 2ax$, also $x < \frac{r}{2a}$ ist. Daher ist $a + \frac{r}{2a}$ eine obere Grenze des gesuchten Wurzelwerths. Wird $a + \frac{r}{2a} = a'$ gesetzt, so kann man N auf die Form $a'^2 - r'$ bringen; dann ist $a'' = a' - \frac{r'}{2a'}$ ein zweiter oberer Grenzwerth, der dem gesuchten Wurzelwerth näher als a' liegt, da sein Quadrat sich von N nur um $\left(\frac{r'}{2a'}\right)^2$ unterscheidet, während $a'^2 - N = \left(\frac{r}{2a}\right)^2$ ist. So fortfahrend findet man eine Reihe von Zahlen, die, sämmtlich grösser als die gesuchte Wurzel, sich dem Werthe derselben unbegrenzt nähern.

Auf ähnliche Weise lassen sich untere Grenzen für die irrationalen Quadratwurzeln angeben. Der nächstliegende untere Grenzwerth von $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r}$ ist $a + \frac{r}{2a+1}$. Es ergiebt sich nämlich

$$\left(a + \frac{r}{2a+1}\right)^2 = a^2 + \frac{2ar}{2a+1} + \left(\frac{r}{2a+1}\right)^2$$

$$= a^2 + r - \frac{r}{2a+1} + \left(\frac{r}{2a+1}\right)^2 = a^2 + r - \frac{r}{2a+1}\left(1 - \frac{r}{2a+1}\right),$$

und da $r < 2a + 1$ vorausgesetzt wird, so ist der erhaltene Ausdruck $< a^2 + r$, d. i. $< N$, also $a' = a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{N}$. Von a' ausgehend

1) Larismethique nouvellement composée par maitre Estienne de la roche etc. Lyon, 1520, fol. 32.

2) Arithmetica, practica y speculativa. Granada 1590, fol. 227.

kann man andere Grenzwerthe ermitteln, die, sämmtlich $<\sqrt{N}$, sich dem Werthe von $\sqrt{N}$ unbegrenzt nähern.[1])

Diese Methode ist schon von Heron von Alexandrien[2]) angewandt worden. Heron setzt $\sqrt{a^2+r} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2+r}{a}\right)$, welcher Ausdruck mit $a + \frac{r}{2a}$ identisch ist, und fügt hinzu, dass man von dem so erhaltenen Näherungswerthe ausgehend durch dieselbe Formel einen zweiten, dritten u. s. w. erhalte. Nach den Darlegungen von Friedrich Hultsch[3]) ist es sogar wahrscheinlich, dass sich schon Archimedes dieser Methode bedient hat, um $\sqrt{3}$ zwischen zwei Grenzen einzuschliessen. Im dritten Satze seiner Kreismessung giebt er nämlich als untere Grenze $\frac{265}{153}$, als obere $\frac{1351}{780}$ für $\sqrt{3}$ an. Wie er zu diesen Werthen gelangt ist, darüber lassen sich bei dem Fehlen jeder direkten Mittheilung nur Vermuthungen anstellen. Hultsch legt dar, dass zunächst die obere Grenze bestimmt sei; Archimedes habe die Ungleichung $\sqrt{a^2-r} < a - \frac{r}{2a}$ auf den Fall $a = \frac{3}{5}$ angewendet; dadurch ergiebt sich die obere Grenze $\frac{26}{15}$, und für diesen Werth von a liefert dieselbe Ungleichung weiter $\frac{1351}{780}$. Diese obere Grenze, meint nun Hultsch, habe dann zur Bestimmung der unteren dienen müssen, und zwar habe Archimedes die Ungleichung $\sqrt{a^2-r} > a - \frac{r}{2a-1}$ auf den Fall $a = 26$, $r = 1$[4]) angewandt. Die Rechnung ergiebt für diese Annahme $\sqrt{675} > 26 - \frac{1}{51}$, und daraus folgt $\frac{1}{15}\sqrt{675}$, d. i. $\sqrt{3} > \frac{26}{15} - \frac{1}{51 \cdot 15}$, also $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$. Es ist möglich, dass Archimedes so gerechnet hat, obwohl der Weg ziemlich verschlungen ist, indem statt 3 erst $15^2 \cdot 3$ gesetzt und dann die Wurzel durch 15 dividirt ist. Vielleicht ist Archimedes bei seiner Berechnung der unteren Grenze gleichfalls von $\frac{5}{3}$ ausgegangen und hat sich zur Auffindung eines genaueren unteren Grenzwerthes der

---

1) Da es hier nicht auf eine vollständige Theorie des Verfahrens ankommt, so bleibt der Fall $N = a^2 - r$, in welchem die Grenzwerthe $a - \frac{r}{2a}$ und $a - \frac{r}{2a-1}$ sein würden, unberücksichtigt.

2) Paul Tannery, Un fragment des métriques de Heron. Schlömilchs Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. Bd. 39.

3) Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 28. Juni 1893.

4) Eine direkte Anwendung der Formel auf den Fall $a = \frac{26}{15}$, $r = \frac{1}{225}$ würde $\sqrt{3} > \frac{26}{15} - \frac{\frac{1}{225}}{\frac{52}{15} - 1}$, d. i. $\sqrt{3} > \frac{961}{555}$ ergeben.

Ungleichung $\sqrt{a^2+r} > a + \frac{r}{2a+1}$ oder vielmehr der hier geltenden Ungleichung $\sqrt{a^2+r} > a + \frac{r}{a+[a]+1}$ bedient, wo $[a]$ die grösste in a enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Er hätte dann

$$\text{erstens} \quad \sqrt{\left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{9}} > \tfrac{5}{3} + \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{3}+1+1}, \text{ d. i. } \sqrt{3} > \tfrac{19}{11},$$

$$\text{zweitens} \quad \sqrt{\left(\tfrac{19}{11}\right)^2 + \tfrac{2}{121}} > \tfrac{19}{11} + \frac{\frac{2}{121}}{\frac{19}{11}+1+1}, \text{ d. i. } \sqrt{3} > \tfrac{71}{41},$$

$$\text{drittens} \quad \sqrt{\left(\tfrac{71}{41}\right)^2 + \tfrac{2}{1681}} > \tfrac{71}{41} + \frac{\frac{2}{1681}}{\frac{71}{41}+1+1}, \text{ d. i. } \sqrt{3} > \tfrac{265}{153}$$

erhalten.

Die meisten Schriftsteller, welche die Methode besprochen haben, haben sich auf die Berechnung einer Grenze, meist der oberen, beschränkt, was für praktische Zwecke ja genügt.

Von den Griechen ist die oben in ihren Grundzügen beschriebene Methode zu den Arabern[1]) und von diesen zu den Italienern[2]) übergegangen. Die auf dieselbe bezüglichen Stellen aus den Werken verschiedener italienischer Autoren hat Favaro in seiner Arbeit: Notizie storiche sulle frazioni continue[3]) wörtlich abgedruckt.

Mit ganz besonderer Sorgfalt hat Pietro Antonio Cataldi in seinem Trattato del modo brevissimo di trovare la Radice quadra delli numeri (Bologna, 1613) die Methode auseinander gesetzt und an zahlreichen Beispielen erläutert. Mit theoretischen Betrachtungen giebt er sich nicht ab; die verspricht er zu einer passenderen Zeit zu geben, wo er sich der Hülfe intelligenter Schreiber werde bedienen können; denn er sei sehr schwach und könne nur wenig und unvollkommen schreiben. Diese Schwäche hindert ihn aber nicht, die mühseligsten Rechnungen, zuweilen mit 15 bis 20stelligen Zahlen durchzuführen und die Beispiele so zu häufen, dass man merkt, dass er nicht bloss ein Rechner von seltener Gewandtheit und Furchtlosigkeit ist, sondern thatsächlich auch Freude am Rechnen selbst

1) Alkarkhi, Kâfî fîl Hisâb, Deutsch von Hochheim. II, S. 14. Ibn Albannâ, Le Talkhys, S. 21. Beha-eddin, Ausgabe von Nesselmann, S. 15. Alkalçâdi, Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei XII, S. 402.

2) Leonardo Pisano, Bd. I, S. 353. Lucas Paciuolo, Summa etc. Beide Ausgaben Carta 45 recto. Hieronimo Cardano, Practica Arithmetice, Cap. 23. Francesco Ghaligai, Pratica d'Arithmetica, Carta 21 in allen 3 Ausgaben. Nicolo Tartaglia, General trattato, Parte II, fol. 25 verso. Giuseppe Unicorno, Arithmetica universalis etc. Bombelli erwähnt die Methode nicht.

3) Bullettino Boncompagni, T. VII (1874).

empfindet. Er hat die Bestimmung der oberen und der unteren Grenzwerthe der irrationalen Quadratwurzeln auf Grund dieser Beispiele nach allen Richtungen untersucht, auch gezeigt, wie man aus einem oberen Grenzwerth nach Belieben einen oberen oder einen unteren und ebenso aus einem unteren einen oberen oder einen unteren von grösserer Genauigkeit herleiten kann. Genug, er hat der Methode, die uns hier beschäftigt, etwa die Hälfte seiner aus 140 engbedruckten Folioseiten bestehenden Arbeit gewidmet.

Durch die Erwägung, dass $\sqrt{21\frac{1}{2}}$ weniger als $4 \;\&\; \frac{5\frac{1}{2}}{8}$, aber mehr als $4 \;\&\; \frac{5\frac{1}{2}}{9}$ beträgt, dass man also sich dem wahren Werthe von $\sqrt{21\frac{1}{2}}$ nähern wird, wenn man dem Zähler $5\frac{1}{2}$ eine zwischen 8 und 9 liegende Zahl, etwa $8 \;\&\; \frac{5\frac{1}{2}}{8}$ als Nenner giebt, wird dann Cataldi naturgemäfs dazu geführt, die irrationale Quadratwurzel $\sqrt{a^2 + r}$ durch den Kettenbruch $a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots}}$, wofür er $a \;\&\; \cfrac{r}{2a \;\&\; \cfrac{r}{2a \;\&\; \cdots}}$ oder, des bequemeren Drucks wegen, $a \;\&\; \frac{r}{2a\,\cdot} \;\&\; \frac{r}{2a\,\cdot}$ schreibt, auszudrücken.[1])

Cataldi verfährt in dem zweiten, der Kettenbruch-Entwicklung bestimmten Theil seiner Arbeit mit derselben Gründlichkeit wie im ersten. Ohne theoretische Betrachtungen, lediglich auf Beispiele gestützt, zeigt er[2]), dass die Näherungswerthe ungerader Ordnung eine steigende Reihe bilden und sämmtlich kleiner als der gesuchte Wurzelwerth sind, während die Näherungswerthe gerader Ordnung eine fallende Reihe bilden und sämmtlich grösser als der Wurzelwerth sind, auch dass die Wurzel, die immer zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungswerthen enthalten ist, dem folgenden näher liegt als dem vorhergehenden. Ebenso deckt er den Zusammenhang auf, in welchem die durch das Heronische Verfahren gelieferten Näherungswerthe zu denjenigen stehen, welche die Kettenbruch-Entwicklung liefert.

Bezeichnet man nämlich die Näherungswerthe des Kettenbruchs $a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cdots}}$ mit $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots$, wo dann $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, $p_1 = a$,

1) Aehnlich wie Cataldi durch einen Punkt ausdrückt, dass alles Folgende zu der mit dem Punkt versehenen Zahl gehöre, setzt Christoff Rudolff einen Punkt hinter das Wurzelzeichen, um auszudrücken, dass dasselbe sich auf alles Folgende beziehe. Er schreibt S. 141 seiner Coss $\sqrt{.}\ 12 + \sqrt{140}$ für $\sqrt{12 + \sqrt{140}}$.

2) l. c. S. 75 ff.

$q_1 = 1$, und allgemein

$$p_n = 2ap_{n-1} + rp_{n-2},\ q_n = 2aq_{n-1} + rq_{n-2}$$

ist, und werden ferner die Näherungswerthe, welche die Heronische Methode liefert, mit $N_1, N_2, N_3, \ldots$ bezeichnet, wo also $N_1 = a$, $N_2 = a + \frac{r}{2a}$,

$N_3 = \left(a + \frac{r}{2a}\right) - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}, \cdots$ ist, so besteht der Zusammenhang

$$N_1 = \frac{p_1}{q_1},\ N_2 = \frac{p_2}{q_2},\ N_3 = \frac{p_4}{q_4},\ N_4 = \frac{p_8}{q_8},\ \ldots,\ N_k = \frac{p_{2^{k-1}}}{q_{2^{k-1}}}.$$

Ebenso lässt sich ein Zusammenhang zwischen den unteren Grenzwerthen beider Methoden herleiten, und alle diese Beziehungen werden von Cataldi an Beispielen behandelt.

Trotzdem nun aber die Näherungswerthe der älteren Methode sich unter denjenigen des Kettenbruchs vorfinden, kann man von einer Erfindung der Kettenbrüche erst bei einem Schriftsteller sprechen, der wirklich ein solches Gebilde in seinem ganzen Verlauf im Geiste vor sich hatte, der also, — wenn es sich um Näherungswerthe handelt — diese Werthe sämmtlich in richtiger Reihenfolge nach dem Bildungsgesetz des Kettenbruchs berechnet hat. Ob er für den Kettenbruch eine bestimmte, etwa eine der heutigen ähnliche Form vorgeschlagen hat, kommt erst in zweiter Linie in Betracht.

Als Erfinder der Kettenbrüche wird jetzt allgemein Cataldi angesehen, dessen Leistungen in der Sache ich oben kurz geschildert habe. Dass später unabhängig von ihm der Nürnberger Daniel Schwenter in seiner *Geometria practica nova*[1]), deren erste Auflage 1618 erschienen ist, sich der Kettenbrüche bediente, um irreducibele Brüche durch Näherungswerthe in kleineren Zahlen auszudrücken, und dass noch später der Engländer Brouncker die Kettenbrüche zum dritten Male erfunden hat, als er das von Wallis gefundene unendliche Product für $\frac{4}{\pi}$ in einen Kettenbruch verwandelte, das Alles würde den Ruhm des Cataldi, wenn er wirklich der erste Erfinder wäre, nicht schmälern.

Für die Ansprüche des Cataldi ist zuerst Libri[2]) in schwungvollen Worten aufgetreten; er nimmt sogar die ältere, schon von Heron angewandte Methode für Cataldi in Anspruch. Ihm hat sich, was die Frage der Erfindung der Kettenbrüche betrifft, Favaro in der oben erwähnten

---

1) Traktat II, S. 58.

2) Histoire des Sciences mathématiques en Italie. T. IV, p. 92.

Arbeit angeschlossen, ebenso S. Günther[1]), und seitdem ist der Anspruch Cataldis nicht bestritten worden.[2]) Ich werde aber zeigen, dass Bombelli schon im Jahre 1572, also 41 Jahre früher als Cataldi sich der unendlichen Kettenbrüche bedient hat, um dem Werthe einer irrationalen Quadratwurzel beliebig nahe zu kommen.

Das berühmte Werk „L'Algebra" des Rafaele Bombelli, das in erster Auflage 1572, in zweiter Auflage[3]) 1579 in Bologna erschienen ist, besteht bekanntlich aus drei Büchern, von denen das erste die Operationen mit Wurzelgrössen, besonders die Ausziehung von Wurzeln, das zweite die Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade behandelt, während das dritte eine Sammlung von 274 Aufgaben ist, von denen 146 aus Diophants Arithmetik entnommen sind. Die grossen Verdienste Bombellis auf dem Gebiete der Theorie der Gleichungen dritten und vierten Grades haben naturgemäss die Aufmerksamkeit der Leser auf das zweite Buch concentrirt, und so erklärt es sich vielleicht, dass eine Stelle des ersten Buches bis jetzt wenig beachtet ist, in welcher Bombelli lehrt, wie Quadratwurzeln mittels unendlicher Kettenbrüche ausgezogen werden, und in welcher er, zwar an einem bestimmten Zahlenbeispiel aber doch allgemein, die Richtigkeit des Verfahrens auch beweist. Favaro hat die Stelle in seiner mehrfach erwähnten Arbeit abgedruckt, seltsamer Weise ohne sie nach Gebühr zu würdigen. Er stellt Bombelli mit seinen Vorgängern, die nur eine Darstellung der Heronischen Methode gegeben haben, in eine Reihe. Favaro merkt nicht, dass schon Bombelli das alte Verfahren durch die Kettenbruch-Entwicklung ersetzt hat, er meint, erst Cataldi habe diesen wichtigen Schritt gethan.

Bei der Wichtigkeit der Sache scheint es angemessen, die betreffende Stelle von Bombellis Algebra im Wortlaut und mit beigefügter Uebersetzung zu geben. Seite 35 heisst es:

Modo di formare il rotto nella estrattione delle Radici quadrate.	Ueber die Art, den Bruch bei der Ausziehung der Quadratwurzeln zu bilden.
Molti modi sono stati scritti da gli altri autori de l' uso di formare il rotto; l' uno tassando e accusando l' altro (al mio	Viele Methoden sind von den anderen Schriftstellern über die Bildungsweise des Bruchs angegeben worden, und der eine tadelt den andern und hat an ihm etwas

1) Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. 1872.

2) M. Cantor, Vorlesungen. Bd. II, S. 694ff.

3) Vgl. eine Note von Favaro in der Bibliotheca mathematica 1893, S. 15 und eine Bemerkung von P. Riccardi ebenda S. 64.

giudicio) senza alcun proposito, perche tutti mirano ad un fine; E ben vero che l' una è più breve dell' altra, ma basta che tutte suppliscono, e quella ch' è più facile, non è dubbio ch' essa sarà accettata da gli huomini, e sarà posta in uso senza tassare alcuno; perche potria essere, che hoggi io insegnassi una regola, la quale piacerebbe più dell' altre date per il passato, e poi venisse un altro, e ne trovasse una più vaga, e facile, e cosi sarebbe all' hora quella accettata, e la mia confutata, perche (come si dice) la esperienza ci è maestra, e l' opra loda l' artefice.

auszusetzen, nach meiner Ansicht ganz ohne Grund, da alle denselben Zweck verfolgen. Wenn auch die eine Methode kürzer als die andere ist, so genügt es doch, dass alle ihren Zweck erfüllen, und diejenige, welche die leichtere ist, wird ohne Zweifel von den Menschen angenommen und, ohne einen andern zu tadeln, gebraucht werden. Denn es könnte sein, dass ich heute eine Regel lehre, welche mehr als die von meinem Vorgänger gegebenen gefällt, und dass sodann ein anderer kommt und eine schönere und leichtere findet, und so würde dann diese letztere angenommen und die meinige verworfen werden, weil (wie man sagt) die Erfahrung unsere Lehrerin ist und das Werk den Meister lobt.

Però metterò quella che più à me piace per hora, e sarà in arbitrio de gli huomini pigliare qual voranno:

Ich werde darum jene darlegen, welche mir jetzt am besten gefällt, und es wird von den Leuten abhängen zu nehmen, welche sie wollen werden.

Dunque venendo al fatto dico. Che presuposto, che si voglia il prossimo lato di 13, che sarà 3, e avanzerà 4, il quale si partirà per 6 (doppio del 3 sudetto) ne viene $\frac{2}{3}$, e questo è il primo rotto, che si hà da giongere al 3, che fà $3\frac{2}{3}$, ch' è il prossimo lato di 13, perche il suo quadrato è $13\frac{4}{9}$, ch' è superfluo $\frac{4}{9}$, ma volendosi più approssimare, al 6, doppio del 3 se gli aggionga il rotto, cioè li $\frac{2}{3}$, e sarà $6\frac{2}{3}$, e per esso

Um nun zur Sache zu kommen, sage ich, es werde vorausgesetzt, man wolle annäherungsweise die Quadratwurzel aus 13 ziehen. Dieselbe ist 3, und es bleibt der Rest 4, welcher bei der Division durch 6 (dem Doppelten der oben genannten 3) $\frac{2}{3}$ liefert, und dies ist der erste Bruch. Diesen hat man zu 3 zu addiren, was $3\frac{2}{3}$ giebt, und das ist der erste Näherungswerth der Wurzel aus 13, weil sein Quadrat $13\frac{4}{9}$ ist, was um $\frac{4}{9}$ zu viel ist. Wollen wir uns dem gesuchten Werth noch mehr nähern, so addiren wir zu 6, dem Doppelten von 3, den erhaltenen Bruch, d. i. $\frac{2}{3}$, was $6\frac{2}{3}$

partendosi il 4, che avanza dal 9 sino al 13, ne viene $\frac{3}{5}$, e questo si gionge al 3, che fà $3\frac{3}{5}$, ch' è il lato prossimo di 13, di cui il quadrato è $12\frac{24}{25}$, ch' è più prossimo di $3\frac{2}{3}$, ma volendo più prossimo, si aggionga il rotto al 6, fà $6\frac{3}{5}$, e con esso si parta pur il 4, ne viene $\frac{20}{33}$, e questo si aggionga, come si è fatto di sopra al 3, fà $3\frac{20}{33}$, ch' è l' altro numero più prossimo, perchè il suo quadrato è $13\frac{4}{1089}$, ch' è troppo $\frac{4}{1089}$, e volendo più prossimo, partasi 4 per $6\frac{20}{33}$, etc. etc. e cosi procedendo si può approssimare à una cosa insensibile.

ergiebt, und hierdurch dividiren wir 4, die Differenz zwischen 9 und 13; wir erhalten $\frac{3}{5}$; dies zu 3 addirt, giebt $3\frac{3}{5}$, und das ist der Näherungswerth der Wurzel aus 13; sein Quadrat ist $12\frac{24}{25}$, er liegt also dem gesuchten Werthe näher als $3\frac{2}{3}$. Um eine noch grössere Annäherung zu erhalten, addiren wir den gefundenen Bruch zu 6, das giebt $6\frac{3}{5}$, und damit dividiren wir in 4. Es ergiebt sich $\frac{20}{33}$, und wenn wir dies, wie es oben geschehen ist, zu 3 addiren, so erhalten wir $3\frac{20}{33}$; dies ist die andere der Wurzel aus 13 noch näher liegende Zahl; denn ihr Quadrat ist $13\frac{4}{1089}$, was um $\frac{4}{1089}$ zu viel ist. Wenn wir eine noch grössere Annäherung wollen, so dividiren wir 4 durch $6\frac{20}{33}$, u. s. w. u. s. w. und so fortfahrend können wir dem Werthe der Wurzel aus 13 bis auf einen verschwindend kleinen Betrag nahe kommen.

Ich habe es nicht für nöthig gehalten, die zwei weiteren Näherungswerthe, welche Bombelli auf $3\frac{20}{33}$ noch folgen lässt (in die sich übrigens ein verhängnissvoller Rechenfehler eingeschlichen hat), noch mitzutheilen, da das Angeführte hinlänglich zeigt, dass Bombellis Verfahren auf eine Anwendung der Formel

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}$$

hinausläuft. Wenn die vorgelegte Zahl von der Form a^2-1 ist, so würde das Verfahren zunächst

$$\sqrt{a^2-1} = (a-1) + \frac{2a-2}{2(a-1)} = (a-1)+1 = a$$

liefern. Diesen Fall behandelt Bombelli besonders; er fährt nämlich fort:

Ma solo bisogna avertire, di formare il rotto tre volte, quando il numero, di cui se ne hà da pigliare il lato, è

Ich muss aber darauf aufmerksam machen, dass man den Bruch dreimal zu bilden hat, wenn die Zahl, deren Quadratwurzel genommen werden soll, um 1 kleiner als

un manco di numero quadrato (come sarebbe 8), che per trovare il suo lato, si cavarà 4 maggior numero quadrato, e resterà 4, che partito per il doppio di 2, lato del numero quadrato, ne verrà $\frac{4}{4}$, che sarebbe 1, il quale gionto col 2 fa 3 e in questo caso quadrisi il 3 fa 9, del quale cavatone 8 numero, di cui se ne hà à pigliare il lato, resta 1, e questo si parte per 6, doppio del 3, ne viene $\frac{1}{6}$, il qual rotto si cava del 3, e resta $2\frac{5}{6}$ per il lato prossimo di 8, il quadrato del quale è $8\frac{1}{36}$, che è $\frac{1}{36}$ superfluo, e volendosi più approssimare: aggiongasi a $2\frac{5}{6}$ il 3, fa $5\frac{5}{6}$, e per questo si parta quel 1 detto di sopra, ne viene $\frac{6}{35}$, che levato di 3, resta $2\frac{29}{35}$, e questo sarà l' altro lato più prossimo, e volendosi più approssimare: si partirà 1 per $5\frac{29}{35}$, e procedendo (come si è fatto di sopra) si approssimarà quanto l' huomo vorrà, e se bene ci sono molte altre regole: queste non dimeno mi sono parse le più facili, però à queste mi atterrò, le quali hò trovato con fondamento, qual non voglio restare di porlo, benche non sarà inteso, se non da chi intende l'aggguagliare di potenze e tanti eguali

eine Quadratzahl ist (wie es 8 sein würde). Um die Quadratwurzel aus 8 zu finden, subtrahiren wir die nächst grosse Quadratzahl 4; es bleibt der Rest 4, der bei der Division durch das Doppelte von 2, der Wurzel der Quadratzahl, $\frac{4}{4}$ ergiebt, was 1 sein würde, und wenn wir dies zu der 2 addiren, so erhalten wir 3. Wenn wir jetzt 3 quadriren, so ergiebt sich 9, und wenn hiervon 8, die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, subtrahirt wird, so bleibt der Rest 1; dieser, durch 6, das Doppelte von 3, dividirt, giebt $\frac{1}{6}$, und wenn wir diesen Bruch von 3 subtrahiren, so bleibt $2\frac{5}{6}$ als Näherungswerth der Wurzel aus 8. Sein Quadrat ist $8\frac{1}{36}$, was $\frac{1}{36}$ zu viel ist. Will man eine weitere Annäherung, so addire man die 3 zu $2\frac{5}{6}$, das giebt $5\frac{5}{6}$, und hierdurch dividire man die oben genannte 1; man erhält $\frac{6}{35}$, und wenn das von 3 subtrahirt wird, so bleibt $2\frac{29}{35}$; dies ist der zweite der gesuchten Wurzel noch näher liegende Werth. Will man eine noch grössere Annäherung, so wird man 1 durch $5\frac{29}{35}$ dividiren, und so fortfahrend (wie es oben geschehen ist) wird man sich dem gesuchten Werthe beliebig nähern. Es giebt zwar viele andere Regeln, aber diese sind mir nichts desto weniger als die leichtesten erschienen, und daher werde ich mich an diese halten, welche ich mit ihrer Begründung gefunden habe, die ich nicht verfehlen will mitzutheilen, obgleich sie nur von demjenigen verstanden wird, welcher die Gleichung

$$ax^2 + bx = c,$$

à numeri, del quale tratterò nel secondo libro à pieno: Però hora parlo solo con quelli.

die ich im zweiten Buche vollständig behandeln werde, zu lösen versteht. Zu diesen allein spreche ich jetzt.

Nachdem Bombelli auf diese Weise auch ein Beispiel nach der Formel

$$\sqrt{a^2 - b} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cdots}}$$

oder vielmehr

$$\sqrt{a^2 - b} = a - \cfrac{b}{a + a - \cfrac{b}{a + a - \cfrac{b}{a + a - \cdots}}},$$

freilich nur für den speciellen Fall $b = 1$ gerechnet hat (einen kleinen Rechenfehler, den er dabei gemacht hat, habe ich berichtigt), wendet er sich zum Beweis seiner Regeln. Er sagt:

Pongasi dunque, che si habbia à trovare il lato prossimo di 13, di cui il più prossimo quadrato è 9, di cui il lato è 3, però pongo che il lato prossimo di 13 sia 3. p. 1. tanto, e il suo quadrato è 9. piu 6 tanti p. 1. potenza, il qual' è eguale à 13. che levato 9 à ciascuna delle parti, resta 4, eguale à 6 tanti più 1 potenza. Molti hanno lasciato andare quella potenza, e solo hanno agguagliato 6 tanti à 4, che il tanto valeria $\frac{2}{3}$ e hanno fatto, che l' approssimatione si è $3\frac{2}{3}$, perche la positione fù 3. p. 1. tanto, viene ad essere $3\frac{2}{3}$, ma volendo tenere conto della potenza ancora, valendo il tanto $\frac{2}{3}$, la potenza valerà $\frac{2}{3}$ di tanto, che aggionto con li 6 tanti di prima: si haverà $6\frac{2}{3}$ tanti eguale à 4, che ag-

Nehmen wir also an, man solle einen Näherungswerth der Wurzel aus 13 finden. Die nächste Quadratzahl ist 9, die Wurzel davon 3. Ich nehme deshalb an, der Näherungswerth der Wurzel aus 13 sei $3 + x$. Das Quadrat davon ist $9 + 6x + x^2$. Das ist gleich 13, und wenn beiderseits 9 subtrahirt wird, so bleibt

$$4 = 6x + x^2.$$

Viele haben nun jenes x^2 weggelassen und einfach

$$6x = 4$$

gesetzt, so dass sich $x = \frac{2}{3}$ ergab. Sie haben so bewirkt, dass der Näherungswerth $3\frac{2}{3}$ ist; denn da derselbe gleich $3 + x$ gesetzt worden war, so wird er $3\frac{2}{3}$. Will man aber auch x^2 in Rechnung ziehen, so wird, da

$$x = \frac{2}{3} \text{ ist, } x^2 = \frac{2}{3}x$$

sein, so dass sich durch Addition zu den früheren $6x$

$$6\frac{2}{3}x = 4$$

ergiebt, woraus man

$$x = \frac{3}{5}$$

guagliato il tanto valerà $\frac{3}{5}$, e perche fù posto 3. p. 1. tanto, sarà $3\frac{3}{5}$, e valendo il tanto $\frac{3}{5}$, la potenza valerà $\frac{3}{5}$ di tanto, e si haverà $6\frac{3}{5}$ di tanto eguale à 4, si che si vede donde nascono le regole dette si sopra.

erhält, und da der Näherungswerth gleich $3 + x$ gesetzt war, so wird derselbe $3\frac{3}{5}$ sein. Ebenso wird, wenn $x = \frac{3}{5}$ ist, $x^2 = \frac{3}{5}x$ sein; man erhält dann $6\frac{3}{5}x = 4$, und auf diese Weise erkennt man, wie die oben angegebenen Regeln entstehen.

Bombelli hat also thatsächlich Kettenbrüche gebildet und deren Näherungswerthe berechnet, auch bewiesen, dass auf diese Weise der Werth einer irrationalen Quadratwurzel beliebig genau annäherungsweise ermittelt werden kann. Das Werk Bombellis hat die weite Verbreitung gefunden, die es verdiente, und ist sicherlich auch von Cataldi studirt worden, zumal es in Bologna, der Heimath Bombellis, erschienen ist und Cataldi in eben dieser Stadt von 1584 bis 1626 Professor der Mathematik war. Es unterliegt also keinem Zweifel, dass Cataldi die Entwicklung der irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch aus Bombellis Algebra gelernt hat. Freilich hat er sich dann sehr eingehend mit der Sache beschäftigt; er hat — und das ist ein nicht geringes Verdienst — dem von Bombelli erdachten Gebilde eine passende Form gegeben; er hat erkannt, dass man sich nicht damit begnügen darf, einen Näherungswerth zu berechnen, sondern dass in jedem Falle auch die Grösse des begangenen Fehlers bestimmt werden muss, und so ist es ihm dank seiner Ausdauer und seiner grossen Gewandtheit im Rechnen gelungen, die Eigenschaften der Näherungswerthe der Kettenbrüche, welche Bombelli wohl nur in Folge des oben erwähnten Rechenfehlers verborgen geblieben waren, vollständig aufzufinden.

ZUR
GESCHICHTE DES THERMOSKOPS.

VON

WILHELM SCHMIDT.

Am 20. September 1638 schrieb der Pater Benedetto Castelli aus Brescia, Galileis Schüler, in einem Briefe[1]) an Monsignore Ferdinand Cesarini:

In questo tempo mi sovvenne un' esperienza fattami vedere già più di trentacinque anni sono dal nostro Signor Galileo, la quale fu che presa una caraffella di vetro di grandezza di un piccolo uovo di gallina col collo lungo due palmi in circa e sottile quanto un gambo di pianta di grano e riscaldata bene colle palme delle mani detta caraffella e poi rivoltando la bocca di essa in vaso sottoposto, nel quale era un poco di acqua, lasciando libera dal calor delle mani la caraffella, subito l' acqua cominciò a salire nel collo e sormontò sopra il livello dell' acqua del vaso più d'un palmo, del quale effetto poi il medesimo Signor Galileo si era servito per fabbricare un istrumento da esaminare i gradi del caldo e del freddo.

In dieser Zeit fiel mir ein Versuch ein, welcher mir bereits vor mehr als 35 Jahren von unserem Herrn Galileo gezeigt war, ein Versuch, welcher darin bestand, dass er eine kleine Karaffe (= Retortenblase) aus Glas von der Grösse eines kleinen Hühnereies mit einem etwa zwei Spannen langen und wie ein Weizenhalm engen Halse nahm, mit den inneren Handflächen besagte Karaffe ordentlich erwärmte und dann ihre Mündung umgekehrt in ein darunterstehendes Gefäss setzte, in welchem etwas Wasser war. Als er dann die warmen Hände von der Retortenblase wegnahm, begann das Wasser sofort in den Hals zu steigen und erhob sich über das Niveau des Wassers im Gefässe mehr als eine Spanne, eine Wirkung, welcher sich darauf derselbe Herr Galileo bedient hatte, um ein Instrument zur Prüfung der Wärme- und Kältegrade herzustellen.

Dass Galilei thatsächlich ein derartiges Thermoskop construirt hatte, bestätigt weiter eine Notiz in dem Briefe des vornehmen Venezianers Joh.

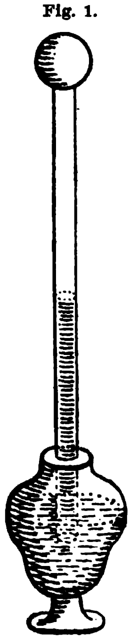
1) Vgl. Nelli *Vita e commercio letterario di Galileo Galilei.* Losanna 1793. S. 69. 70. Wieder abgedruckt bei Venturi *Memorie e lettere di Galileo Galilei.* Modena 1818. I, 20.

Fr. Sagredo vom 9. Mai 1613, in welcher er Galilei mittheilt, dass er verschiedene Aenderungen daran vorgenommen habe. Die Stelle lautet:

L' istrumento per misurare il caldo inventato da VS. Eccellentissima è stato da me ridotto in diverse forme assai comode ed esquisite, intantochè la differenza della temperie di una stanza all' altra si vede fin 100 gradi.

Das Instrument zum Messen der Wärme, welches von Eurer Excellenten Herrlichkeit erfunden ist, ist von mir in verschiedene sehr bequeme und ausgesuchte Formen gebracht worden, so dass man die Differenz der Temperatur von einem Zimmer zum andern bis auf 100 Grade sieht.

Fig. 1.



Existirte nun Galileis Thermoskop nach Sagredo vor 1613, nach Castelli wenigstens vor 1603, so bezeugt Vincenzio Viviani[1]), Galileis vertrauter Schüler und Biograph, dass Galilei das Thermometer in Padua zwischen 1593 und 1597 erfunden habe. Merkwürdig bleibt dabei allerdings, dass Galilei selber des Thermoskops in seinen Schriften nicht Erwähnung thut. Auch in der neuen, vortrefflich ausgestatteten Galileiausgabe[2]) haben wir keine Spur davon entdecken können. Nelli giebt in seiner Biographie S. 70 eine Figur von Galileis Thermoskop, welche wir unter Fig. 1 getreu nachgebildet haben. Wir können aber nicht umhin, darauf hinzuweisen, dass diese Figur vermuthlich von Nelli selbst entworfen ist und dass in dem Castellischen Briefe sich eine entsprechende Figur nicht vorzufinden scheint, wenn wenigstens auf Nellis Schweigen Verlass ist. Die Figur selbst bedarf keiner weiteren Erklärung. Dass das Röhrenende unten im Wasser offen sein muss, ist selbstverständlich. Ob das Gefäss mit Wasser oben verschlossen war, geht aus Castellis Worten nicht hervor. Nelli scheint es anzunehmen, nach der Figur zu urtheilen; dagegen spricht er in der beigegebenen Erklärung richtiger von der Atmosphäre, welche bei Abkühlung der Retorte auf den Wasserspiegel drücke. Daraus dürfte doch wohl folgen, dass das Gefäss mit Wasser oben offen war. Es könnte schliesslich jemand aus den zuletzt citirten Worten Sagredos entnehmen wollen, als habe dieser erst die Gradeintheilung eingeführt. Doch spricht auch Castelli schon von Graden. Sagredos Neuerung dürfte also lediglich darin bestanden haben, dass er die Grade verkleinerte und ihre Zahl erheblich vermehrte.

---

1) Die von ihm verfasste Lebensbeschreibung Galileis ist zwar erst 1718 gedruckt, aber schon 1654 verfasst.

2) *Le opere di Galileo Galilei* I—VI. Firenze 1890ff.

Eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Galileischen Thermoskop wird man in der nebenstehenden Portaschen Figur erkennen (Fig. 2). Giambattista della Porta beschrieb sein Thermoskop in seiner 1606 erschienenen Pneumatik (*I tre libri de' spiritali*[1])). Porta tauchte eine Retorte aus Glas (*A*) in ein Gefäss voll Wasser (*B*). Durch Erwärmung wird die Luft in der Retorte ausgedehnt und geht in Blasen, die man im Wasser aufsteigen sieht, hinaus. 'Je mehr die Luft erwärmt wird, um so mehr Blasen steigen auf.' Bei der Abkühlung steigt das Wasser lebhaft in der Retorte auf und füllt sie bis auf den Theil an, den die auf ihr natürliches Volumen reducirte, zurückgebliebene Luft innehat. Wird die Retorte von

Fig. 2.

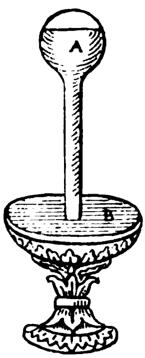


Fig. 3.



neuem erwärmt, so fällt das Wasser wieder, wird sie dann abermals abgekühlt, so steigt es. Der höchste Wasserstand wird durch einen Strich bezeichnet.

Im Principe stimmt mit Galilei und Porta auch Drebbel überein, dessen niedliche Figur (Fig. 3) wir dem *Tractat von der Natur der Elementen*[2]) (1608) entnommen haben. Dort heisst es 'im vierdten Capittel': 'Gleich wie die Wärme Lufft unnd Wasser subtil, dün unnd grob machet, also vergrobet, verkleinert und truckt zusamen die kälte, als ein contrarium

1) Ein entsprechender Auszug aus dieser von Escrivano mit Zusätzen Portas angefertigten italienischen Uebersetzung ist bei Libri *Histoire des sciences mathématiques en Italie* Paris 1841, IV, 469 abgedruckt. In der lateinischen Originalausgabe (1601) befindet sich dieser Abschnitt noch nicht.

2) Ein kurtzer Tractat von der Natur Der Elementen Und wie sie den Windt, Regen, Blitz und Donner verursachen u. s. w. Durch Cornelium Drebbel in Niederlandisch geschrieben unnd allen der Naturliebhaberen zu nutz ins Hochteutsch getreulich uber gesetzt. Gedruckt zu Leyden in Hollandt. Bey Henrichen von Haestens 1608.

der wärme, und zeucht also wieder in[1]) alle Winde, die durch die Wärme auſs gegangen wahren, gleich wie wir klarlich sehen, wan wir hangen eine ledige glaserne Retortam, mit dem mundt in ein Fas mit Wasser, unnd unter dem Bauch ein Warm Feuwer legen, wie diese Figur auſs weiset unnd mit bringt. So Werden Wir sehen, so baldt der Lufft im glas anfangt warm zu werden, das Winde steigen auſs dem mund der Retorten, und das das wasser voller blaſsen[2]) wirdt, und dis wirdt wehren[3]), so lange der Lüfft je lenger je warmer wirdt, aber wan du die retort vom Feuwer nimbst, unnd der Lůfft anhebt zu erkalten, so wird der Lüft wieder in der Retort in einander gehen[4]), grob und dicke werden, also das das glas wirt mit Wasser erfullet werden, weil der Lůft, der zu vor heiſs, entschlossen unnd Rarificirt war durch das Feuwer, dan so fern du das glas sonder brechen gar heiſs machen kanst, so wirdt die Retorta, wan sie kalt wirt, mit Wasser erfullet sein' u. s. w.

Im vorigen Jahrhundert haben Holländer und Deutsche Cornelius Drebbel die Priorität der Erfindung des Thermoskops zugeschrieben. Sie werden das in gutem Glauben gethan haben, weil vermuthlich darüber aus Italien zu ihnen keine Kunde gedrungen war. Dagegen war dem Engländer Robert Fludd, welcher Frankreich, Deutschland und Italien bereiste, das Thermoskop wohl in Padua als eine neue Erfindung gepriesen worden. Fludd selbst ist später von einem Jesuitenpater als der erste Erfinder des Thermoskops ('il primo inventore del termoscopio') namhaft gemacht, aber ohne Grund. Im Gegentheil weist Fludd in seiner *Philosophia Moysaica*[5]) Fol. 1^r (Lib. I cap. II) darauf hin, dass das Thermoskop überhaupt keine neue Erfindung sei: Quod instrumentum vulgo speculum Calendarium dictum falso a quibusdam nostri seculi hominibus sibimet ipsis arrogatur, utpote qui illud propriam suam inventionem esse falso gloriantur. — neque jure mihi fabricam hujus instrumenti primariam arrogare aut vendicare[6]) queam, quamvis illo in naturali Macrocosmi mei historia et alibi ad veritatem argumenti mei philosophici demonstrandam sum usus: et agnosco me illud in veteri quingentorum saltem annorum antiquitatis manuscripto graphice specificatum atque geometrice delineatum invenisse.

1) Druckfehler statt 'an' ('zieht — an').

2) Blasen.

3) währen.

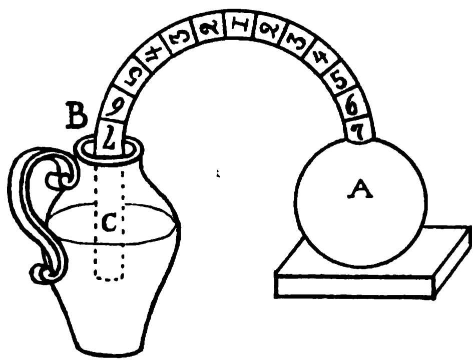
4) sich zusammenziehen.

5) Philosophia Moysaica, in qua sapientia et scientia creationis et creaturarum sacra vereque christiana ad amussim et enucleate explicatur Authore Rob. Fludd, alias de Fluctibus Armigero. Goudae 1638.

6) vindicare 'in Anspruch nehmen'.

Auf Fol. 2[r] giebt Fludd zwei Figuren nebst zugehöriger Beschreibung, von denen die links stehende eine Reconstruction der von Fludd in der Handschrift vorgefundenen geometrischen Figur darstellt (= Fig. 4), während die rechts danebenstehende eben das speculum calendarium oder die angeblich neue Erfindung ähnlich wie Galileis oder Portas Thermoskop giebt. Dazu bemerkt Fludd sehr richtig, dass die neue Erfindung und die Vorrichtung der Handschrift identisch seien ('ista duo solummodo in figura et non natura inter se variare'). Aus der Beschreibung zu Fig. 4 lernen wir nichts wesentlich Neues; nur möchten wir darauf hinweisen, dass auch hier die Luftblasen wieder besonders hervorgehoben werden: radij solares calore suo in globum (eine Bleikugel, sphaera plumbea) concavum capitis · A · operantes faciunt, ut inclusus aer eorum actu rarefactus per fistulam · A · B · in ollam (Gefäss) aquae descendat et per superficiem aquae in forma bullarum (Blasen) egrediatur; occidente vero sole nocteque frigida appropinquante iterum congelatur, contrahitur atque condensatur aër ille inclusus — tantum aquae ex olla · C · in fistulam plumbeam exsugitur, quantum aeris in rarefaciendo est exhalatum.

Fig. 4.

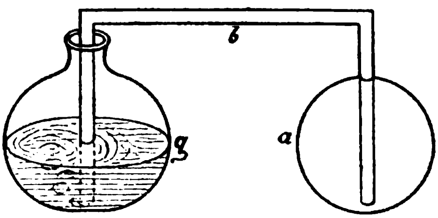


Es liegt gewiss die Frage nahe, ob nicht die von Fludd erwähnte Handschrift noch existire. Und falls man etwas Aehnliches entdeckt, könnte man versucht sein, es mit den Fludd'schen Angaben in Verbindung zu bringen, zumal wer etwa vernimmt, dass sich gerade an dem Orte, au welchem Fludd sich vor dem Erscheinen seiner Philosophia Moysaica aufhielt, nämlich in London, thatsächlich etwas Aehnliches findet. Ehe wir aber darauf näher eingehen, müssen wir noch einiges vorausschicken.

Im Ausgange des dritten Jahrhunderts vor Christi Geburt lebte ein Mechaniker Philon, welcher aus Byzanz stammte. Er unternahm im späteren Lebensalter noch zu seiner Fortbildung weitere Reisen und kam dabei auch nach Rhodos und Alexandria. In letzterer Stadt lernte er mechanische Kunstwerke mannigfacher Art kennen, wie die des Ktesibios, eines alexandrinischen Erfindergenies, der auch auf dem Gebiete der Pneumatik Rühmliches geleistet hat. Philon fasste seine physikalischen Kenntnisse und die verschiedenen Arten ihrer praktischen Verwerthung in einem

grossen Werke zusammen, welches er 'Handbuch der Mechanik' (*Μηχανικὴ σύνταξις*, Mechanische Zusammenstellung) betitelte und von welchem leider nur wenige Bruchstücke erhalten sind. Zu diesen Fragmenten gehört auch eine Abhandlung über die Pneumatik, welche aber nicht in dem originalen griechischen Wortlaute uns überkommen ist, sondern nur in der lateinischen Uebertragung einer wohl gleichfalls verlorenen arabischen Uebersetzung vorliegt. Der lateinische Titel lautet: '*De ingeniis spiritualibus, Ueber die Druckwerke*'.[1]) Dort wird von Philon das Thermoskop folgendermassen beschrieben: 'Man stelle eine Bleikugel (Fig. 5)[2]) von mässiger Grösse her, die inwendig leer (hohl) und geräumig ist. Sie sei weder zu dünn, um nicht gleich zu platzen, noch zu schwer, aber ganz trocken. Man durchbohre sie oben und setze eine gebogene Röhre ein, die fast bis auf den Boden reiche. Das andere Ende dieser Röhre stelle man in ein anderes, mit Wasser gefülltes Gefäss. Dieses Ende reiche wie in der Kugel fast bis auf den Boden, um den Ausfluss des Wassers zu erleichtern. Die Kugel sei *a*, die Röhre *b*, das Gefäss *g*. Ich behaupte also, wenn man die Kugel in die Sonne stellt, so wird nach Erwärmung der Kugel ein Theil der in der Röhre eingeschlossenen Luft hinausgehen. Dies kann man daran sehen, dass die Luft, welche aus der Röhre ins Wasser strömt, das Wasser in Bewegung setzt und eine Luftblase nach der anderen hervorruft. Wird aber die Kugel in den Schatten oder an eine Stelle gesetzt, zu der kein Sonnenstrahl dringt,

Fig. 5.



1) Man findet den lateinischen Text bei V. Rose *Anecdota Graeca et Graecolatina* II, 307 f.; ferner in neuer lateinisch-deutscher Bearbeitung im ersten Bändchen der in Vorbereitung befindlichen griechisch-deutschen Heronausgabe der Bibliotheca Teubneriana. Die Hoffnung, dass die arabische Handschrift 966 der Bodleiana in Oxford den arabischen Text zu Philons Pneumatik enthalte, hat sich leider nicht erfüllt. Herr Baron Carra de Vaux, Château de Rieux bei Montmirail, welcher im zweiten Bändchen der Heronausgabe die von ihm entdeckte, als Ganzes nur arabisch überlieferte Mechanik Herons auf neuer Grundlage mit beigefügter, deutscher Uebersetzung des Herrn Privatdocenten Dr. Nix in Bonn ediren wird, hat auf meine Bitte die Liebenswürdigkeit gehabt, die erwähnte arabische Handschrift zu untersuchen und mir ein Inhaltsverzeichniss der einzelnen Kapitel mitgetheilt. Es stehen allerdings eine Anzahl unbekannter und nicht uninteressanter Philonischer Apparate (Druckwerke, kleinere Automaten u. dgl.) darin, aber anscheinend nichts, was sich mit dem liber de ingeniis spiritualibus in Verbindung bringen liesse.

2) Vgl. bei Rose a. a. O. die handschriftliche, geometrische Zeichnung.

so steigt das Wasser durch die Röhre empor und fliesst bis in die Kugel. Stellt man die Kugel nachher wieder in die Sonne, so wird das Wasser in jenes Gefäss zurückfliessen. So oft man den Vorgang wiederholt, zeigt sich dieselbe Erscheinung. Dieselbe Wirkung erzielt man, wenn man die Kugel durch Feuer erhitzt oder heisses Wasser darauf giesst. Wird sie dagegen abgekühlt, so steigt das Wasser wieder auf'.

Dass die eben beschriebene Vorrichtung ein Thermoskop ist, welches im Principe mit den erwähnten modernen, als Vorläufer des Thermometers geltenden Thermoskopen übereinstimmt, steht wohl ausser Zweifel. Ist dem aber wirklich so, so tritt nunmehr die Prioritätsfrage, die Nelli nicht mit Unrecht gegen Drebbel und andere[1]) zu Gunsten Galileis entschied, in ein anderes Stadium, insofern das erste Thermoskop um mehr als 2000 Jahre eher anzusetzen ist, als man bisher gethan hat. Es kann daher keine Frage sein, dass die Priorität der Erfindung dem Alterthume zukommt und dass die beginnende Neuzeit nur den Anspruch erheben darf, das Thermoskop durch die Gradeintheilung vervollkommnet und dadurch allerdings dem Thermometer vorgearbeitet zu haben. Ob nicht auch das Alterthum noch die doch sehr nahe liegende Graduirung[2]) vorgenommen hat, steht dahin. Ueberliefert ist davon nichts; aber man bedenke, wie viel Litteratur des Alterthums gerade über die Gebiete der exakten Wissenschaften uns verloren gegangen ist!

Es drängen sich nunmehr verschiedene Fragen von selbst auf, die man freilich nicht mit Sicherheit oder Wahrscheinlichkeit wird beantworten können. Zunächst die: Hatte Fludd etwa ein Manuscript von Philons 'liber de ingeniis spiritualibus'? Wer weiss, dass thatsächlich diese Schrift ausser in anderen in einer Londoner Handschrift, welche sich aus Stücken des 12. bis 14. Jahrhunderts zusammensetzt, überliefert ist, wird nicht abgeneigt sein, dies für möglich zu halten.[3]) Aber sicher ist das nicht. Denn im einzelnen weicht Fludd in seiner Beschreibung von Philon ab, auch hat Fludd schon die Gradeintheilung, wenigstens in seiner Figur. Dazu kommt, dass in der Londoner Handschrift irrthümlicherweise die Philonische Schrift dem Aristoteles zugeschrieben wird, dessen Namen Fludd doch vermuthlich erwähnt hätte. Dass der Philonische Abschnitt der Handschrift dem 14. Jahrhundert angehört und nicht, wie man nach Fludd's

1) Bacon von Verulam erwähnt die *vitra calendaria* erst 1620 und Sarpi nennt das Thermoskop erst 1617. Es kommen also beide nicht weiter in Betracht.

2) Graduirungen, wenn auch anderer Art, kommen z. B. in Herons Druckwerken wiederholt vor. Vgl. Heron. op. vol. I, 285. 295 = p. 215. 218 Thévenot.

3) Merkwürdig ist, dass Fludd noch einen anderen Philonischen Versuch (Kap. 8 = 308, 5 — 309, 9 Rose) kennt.

Angabe vermuthen muss, dem 12., ist wohl von geringerer Bedeutung. Er könnte sich ja über das Alter dieses Theiles der Handschrift geirrt haben, wie es auch heute noch vorkommt. Hätte Fludd trotz alledem den Philon benutzt, so zeigt er jedenfalls keine sklavische Abhängigkeit.

Sollte ferner Galilei deswegen des Thermoskops in seinen Werken nicht gedacht haben, weil er etwa selbst durch eine solche antike Beschreibung angeregt war und demgemäss es nicht als seine Erfindung im eigentlichen Sinne betrachtete? Es ist zwar sicher, dass Galilei ausser Aristoteles von Schriftstellern des Alterthums noch Archimedes, Apollonius, Ptolemaeus, Fragmente des Heraclides Ponticus, Heron[1]) u. a. studiert hat und wohl auch Anregungen von ihnen empfangen haben mag, aber Philon's Namen haben wir in der neuen Galileiausgabe nicht finden können. Wenn man nun die Bestimmtheit von Sagredo's Worten: 'Das von Eurer Herrlichkeit erfundene Instrument' ins Auge fasst und dazu aus einem späteren Briefe Sagredo's an Galilei die Worte nimmt: 'da, wie Sie mir schreiben, Sie der erste Verfertiger und Erfinder gewesen sind'[2]), so wird man Bedenken tragen, die Selbständigkeit der Galileischen Erfindung in Zweifel zu ziehen.

Noch weniger sicher sind wir bei Porta. Schon bei der Camera obscura, welche gewöhnlich als Portas eigenthümliche Erfindung gilt, ist man im Zweifel, ob er sie zuerst erfunden oder nur vervollkommnet habe.[3]) Jedenfalls war er eifrig auf das Sammeln antiker Handschriften bedacht, um dieses oder jenes daraus für seine Zwecke zu verwerthen (requirenti mihi veterum in omni rerum genere quaedam manuscripta monumenta, ut arcani quid et abditi inde depromerem). So ist es z. B. sicher, dass Porta die Pneumatik und die Automatentheater Heron's kannte; er erwähnt ausser anderem[4]) Heron's Wasserorgel (Heron. op. I, 192 ff. = p. 228 Th.) und bezeichnet einen Heronsbrunnen (Heron. op. I, 170 ff. = p. 190 Th.) als 'pulcherrima fontis structura'. Es ist daher die Möglichkeit, dass Porta durch eine antike Beschreibung des Thermoskops angeregt sei, nicht ganz ausgeschlossen, aber Bestimmteres lässt sich nicht ermitteln. Nur

1) Bemerkenswerth ist, dass Galilei in einem Briefe vom 11. Januar 1594 an Alvise Mocenigo (Venturi a. a. O. I, 12) eine ausführliche Darstellung des in Herons Pneumatik (Heron. op. I, 266 = p. 222 Th.) beschriebenen Heronsbrunnens giebt, mit ausdrücklicher Beziehung auf Heron und in freier lateinischer Bearbeitung. (S. die Einleitung Heron. op. I zu Fig. 66.) Venturi I, 21 hält es für wahrscheinlich, dass Galilei die Idee seines Thermoskops von Heron empfing.

2) Vgl. Heller *Geschichte der Physik* I, 389.

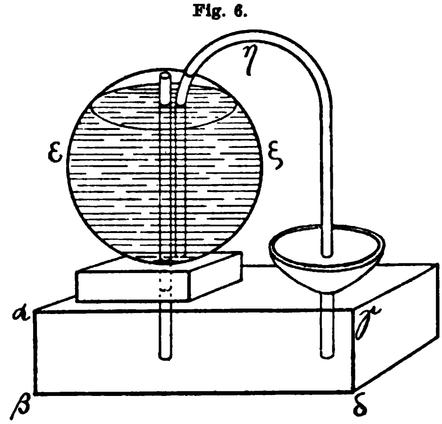
3) Vgl. Heller *Geschichte der Physik* I, 308 u. Poggendorff *Gesch. d. Phys.* S. 135.

4) Vgl. noch J. L. Heiberg *Nogle Eftervirkninger af graesk Mechanik* in den Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i Aaret 1886, S. 8.

sei noch darauf hingewiesen, wie Porta zuerst die auch bei Philon erwähnten Luftblasen besonders hervorhebt. Porta wollte übrigens weniger die Wärme oder Kälte messen als den Grad der Verdünnung der Luft durch die Wärme bestimmen.

Die Schriften Philons von Byzanz sind schon im Alterthume selbst von Heron aus Alexandria, welcher vermuthlich noch im ersten Jahrhundert nach Christi Geburt lebte, benutzt worden. Heron citirt Philon mit Namen in seinem Werke über die Automatentheater (Heron. op. I, 404, 10 = p. 263 Th.). Auch in der Pneumatik scheint Heron den Philon öfter zu Rathe gezogen zu haben. Wenigstens weisen mehrere von Heron's Druckwerken eine auffallende Aehnlichkeit mit Philonischen Druckwerken auf (z. B. der Kapselheber Heron. op. I, 41 ff. = p. 156 Th. mit Philon Kap. 10 = p. 310, 3—12 Rose, das constante Niveau Heron. op. I, 103 ff. = p. 173 Th. mit Philon Kap. 12 = p. 311, 9 ff. R.), wie sie nicht minder in der ihrer Pneumatik voraufgehenden Einleitung über die Theorie des Vacuum übereinstimmen. So mag denn wohl Philons Thermoskop auch Heron den Anstoss zu einer ähnlichen Vorrichtung gegeben haben (Heron. op. I, 225 = p. 200 Th.). Im Princip stimmt Heron mit Philon überein, aber im einzelnen ist die Ausführung verschieden. Nach Heron wird eine theilweise mit Wasser gefüllte Kugel εζ (Fig. 6) von der Sonne erwärmt. Dadurch wird die Luft in derselben ausgedehnt, übt auf das in der Kugel enthaltene Wasser einen Druck aus und drängt es mit Hilfe der an beiden Enden offenen Röhre η durch einen Trichter in die Basis αβγδ. Wird die Kugel abgekühlt, so zieht sich die Luft in derselben zusammen, und das Wasser steigt durch eine zweite, vom Boden der Basis oben in die Kugel führende Röhre aus der Basis wieder nach der Kugel.[1])

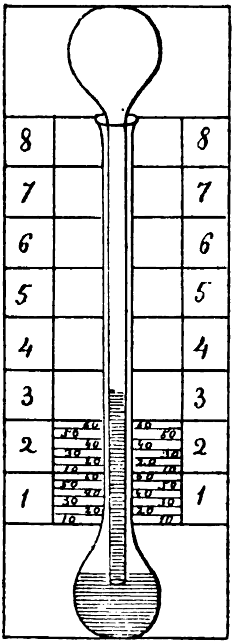
Fig. 6.



1) Wenn die Röhre η aufhört zu fliessen, so wird freilich die atmosphärische Luft bestrebt sein, durch diese in den luftverdünnten Raum der Kugel zu gelangen, aber da sie ihren Weg durchs Wasser nehmen müsste und nur in Form von Luftblasen hineingelangen könnte, so dürfte doch die beabsichtigte Wirkung erreicht sein, ehe die atmosphärische Luft in grösserer Quantität in den luftverdünnten Raum der Kugel eintritt.

An Heron knüpft erst im Jahre 1612 Santorio, Professor der Medicin in Padua, wieder an. In einem medicinischen Werke, welches im genannten Jahre erschien, erwähnt er das Thermoskop zum ersten Male ganz allgemein. Genauere Angaben giebt er in einer anderen, im Jahre 1625 herausgegebenen Schrift.[1]) Dort heisst es: 'Secunda figura est vas vitreum, quo facillime possumus singulis horis dimetiri temperaturam frigidam vel calidam et perfecte scire singulis horis, quantum temperatura recedat a naturali statu prius mensurato. Quod vas ab Herone in alium usum[2]) proponitur. Nos vero illud accommodavimus et pro dignoscenda temperatura calida et frigida aeris et omnium partium corporis et pro dignoscendo gradu caloris febricitantium.' Ob und welche Aenderungen Santorio etwa an der Heronischen Vorrichtung vorgenommen hat, kann ich hier leider nicht feststellen.

Fig. 7.



Die Form eines modernen Thermometers zeigt anscheinend zuerst das Instrument, welches Telioux, ein römischer Ingenieur, im Jahre 1611 in seiner *Matematica meravigliosa*[3]) erwähnt. Telioux füllt die Blase einer Retorte (Fig. 7) zu drei Viertel mit Wasser und setzt eine andere Retorte in die Röhre der ersten. Wird die untere Blase erwärmt, so steigt das Wasser in der inneren Röhre empor, wird sie abgekühlt, so fällt es wieder zurück. An den Seiten der Röhren ist eine Scala angebracht. So verschieden auch auf den ersten Blick in ihrer äusseren Einrichtung der Heronische Apparat und Telioux' Luftthermometer erscheinen mögen, so finden doch im Grunde in beiden dieselben physikalischen Vorgänge statt. Nur hat Telioux, vielleicht unabhängig von Heron, ganz abgesehen von der Scala, die Sache einfacher und praktischer eingerichtet, indem er statt der zwei Heronischen Röhren nur eine einzige nahm und statt wie Heron das bei der Hitze ausströmende Wasser in eine unter der Kugel befindliche Basis zu leiten, es in eine vertikal darüber stehende Retorte

1) Die Originalausgabe war mir leider nicht zugänglich. Die citirten Worte finden sich bei Nelli I, 81. Ich bedauere lebhaft, dass ich aus dem angeführten Grunde Santorios Figur nicht vorführen kann. Vermuthlich stimmt sie mit der Heronischen (Fig. 6) überein.

2) Herons Apparat hiess bei den Alten 'die Traufe' (Libás).

3) Vgl. Libri a. a. O. IV, 471.

steigen lässt. Aber hier wie dort wirkt die Wärme auf ein Gefäss mit Wasser ein und bringt die Flüssigkeit aus einem geschlossenen[1]) Raume zum Ausfluss, und hier wie dort führt die Abkühlung die ausgeströmte Flüssigkeit zurück. Beim Thermoskope Philons, Galileis u. s. w. wirkte dagegen die Wärme nur auf ein lufterfülltes Gefäss ein und beeinflusste entweder kaum das Wasser in dem offenen Gefässe oder brachte es in der Röhre zum Sinken und drängte es ins Gefäss zurück, während erst die Kälte eine steigende Bewegung des Wassers herbeiführte und das Steigen selbst auch der Veränderlichkeit des Luftdrucks unterworfen war.

---

1) Dass Telioux das Thermoskop gänzlich dem Einflusse des veränderlichen Luftdruckes entzog, war wohl der bedeutendste Fortschritt; bei Heron ist immer noch, wenigstens während der Abkühlung, eine gewisse Einwirkung des Luftdrucks denkbar. Uebrigens hält J. C. Poggendorff *Geschichte der Physik* S. 258 im Gegensatz zu Libri a. a. O. es für ungewiss, ob Telioux' Thermometer luftdicht gewesen sei. Die Worte: 'che non possa pigliare aria dass sie keine Luft hineinlassen kann' beziehen sich allerdings nur auf die innere Röhre; es wird aber doch zu Anfang gesagt, dass die äussere Retorte nur so viel grösser sein soll, als nöthig ist, um die zweite Röhre hineinschieben zu können. Man beachte auch, dass Telioux die Wärme auf die untere Blase einwirken lässt. Stände diese aber mit der atmosphärischen Luft in Verbindung, so würde das Wasser überhaupt nicht steigen; denn die Luft, welche bei völliger Abgeschlossenheit durch ihre Ausdehnung das Steigen bewirkt, würde in jenem Falle nach aussen entweichen. Aus Telioux' Figur darf man keine Schlüsse ziehen; sie ist in Hinsicht auf die Luftdichtigkeit ungenau gezeichnet. Ein praktischer Versuch hat uns ausserdem die Notwendigkeit, dass die äussere Retorte luftdicht sei, bestätigt.

HERON VON ALEXANDRIA,

KONRAD DASYPODIUS

UND DIE

STRASSBURGER ASTRONOMISCHE MUENSTERUHR.

VON

WILHELM SCHMIDT.

Am St. Johannistage 1574 wurde im Strassburger Münster, jenem altehrwürdigen Denkmal deutscher Baukunst, ein Kunstwerk eingeweiht, das zwei Jahrhunderte hindurch bewundert und gepriesen wurde, jene berühmte astronomische Uhr, welche Konrad Dasypodius im Verein mit David Wolckenstein aus Breslau und Tobias Stimmer nebst den Gebrüdern Habrecht aus Schaffhausen geschaffen hatte. Das Interesse für astronomische Dinge war im 16. Jahrhundert bedeutend. War es doch in diesem Nicolaus Copernicus vorbehalten, eine Weltordnung zu stürzen, die mehr denn anderthalb Jahrtausende fast unangefochten in Geltung gewesen war. Jenes Interesse beschränkte sich aber nicht auf die Männer der Wissenschaft, sondern muss auch in weitere Kreise gedrungen sein, wie eine Anzahl gerade in diesem Jahrhunderte angefertigter astronomischer Kunstuhren beweist. Es gab solche ausser in Strassburg auch in Cassel (aus dem Jahre 1561), Dresden (1568), Marburg (1575) und Prag (1592)[1]. Dass sie sich noch dem Ptolemäischen Weltsystem[2]) anschliessen, wird den nicht wunder nehmen, der weiss, dass selbst Tycho Brahe sich von der Richtigkeit von Copernicus' heliocentrischem Systeme nicht hatte überzeugen könnnen. Bei der Strassburger astronomischen Uhr könnte allerdings leicht jemand eine unbewusste Ironie darin finden, dass ihr Urheber Dasypodius, kurz bevor er mit der Herstellung der Uhr beauftragt wurde, eine Schrift, die zu Copernicus in Beziehung stand[3]), veröffentlichte und ferner an dem Gewichtsthurme der Uhr 'des herrlichen und Gelehrten Mathematici Nic. Copernici warhafftige abconterfet' (so!) malen liess, ohne dass die Uhr selbst dessen epochemachendes System zum Ausdruck brachte.

1) Vgl. C. Alhard von Drach *Die zu Marburg im mathematisch-physikalischen Institut befindliche Globusuhr Wilhelms IV. von Hessen als Kunstwerk und astronomisches Instrument.* Marburg 1894, S. 6. 11.

2) Dies ist von der Casseler bestimmt überliefert. Mit der letzteren stimmt die Dresdener überein. Auch die Strassburger gründete sich auf das Ptolemäische System, wie der Sonnenzeiger auf dem Astrolabium zur Genüge darthut; denn er dreht sich inmitten der Planetenzeiger in einem Jahre in dem Thierkreise.

3) *Hypotyposes orbium coelestium congruentes cum tabulis Alfonsinis et Copernici seu etiam tabulis Prutenicis* editae a Cunrado Dasypodio. Argent. 1568. Vgl. J. G. L. Blumhof *Vom alten Mathematiker Conrad Dasypodius.* Göttingen 1796, S. 20.

Konrad Dasypodius (zu deutsch 'Rauhfuss oder Has') war der Sohn des Schweizer Humanisten Petrus Dasypodius, den wir zuletzt in Strassburg finden. Die Lebensjahre seines Sohnes Konrad umfassen die Zeit von 1530 bis 1600. Konrad Dasypodius war an der Akademie in Strassburg als Professor der Mathematik thätig, studierte eifrig die antiken Mathematiker, von denen er selbst mehrere, unter anderen Euklid wiederholt (1564, 1570 f.), im Druck erscheinen liess, und war in Wort und Schrift beflissen, das Studium der Mathematik zu heben. Von 28 Schriften des Konrad Dasypodius, welche Blumhof anführt, weisen 20 schon im Titel auf die Beziehung zu der antiken exakten Wissenschaft hin, und unter den übrigen dürften auch noch mehrere in ihrem Inhalte sich an die klassische Wissenschaft anlehnen. Dasypodius beschäftigten nicht bloss die Mathematiker, wie Apollonius, Theodosius, Serenus, Diophantus, Pappus ausser Euklid, sondern auch die Astronomen wie Autolykos, Ptolemäus und Hypsikles, der Optiker Damianos, die Mechaniker wie Ktesibios, Philon von Byzanz, Athenaeus und Heron von Alexandria. Von Autolykos gab Dasypodius 1572 die beiden Schriften *Περὶ κινουμένης σφαίρας* 'Ueber die Bewegung einer Kugel' und *Περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων* 'Vom Auf- und Untergang der Fixsterne' heraus, zu Ptolemäus schrieb er Scholien. Von Heron aus Alexandria veröffentlichte er im Anschluss an das 1. Buch von Euklids Elementen 'vocabula quaedam geometrica'[1]), ebenso 8 Jahre später 'Hieronis (= Heronis) Alexandrini nomenclaturae vocabulorum geometricorum translatio'[2]). Dasypodius kennt ferner aus eigener Lektüre die Belopoiika (Geschützbau), die Dioptra (Nivellirinstrument), die Pneumatik (Druckwerke), die Automaten (Automatentheater), den Barulkos (Hebewinde) Herons. Dass er sie wirklich studirt hat, beweisen viele Stellen über den Inhalt der genannten Schriften in der Abhandlung, welche er seiner Beschreibung der Strassburger Münsteruhr vorausschickt[3]). Da

1) *Euclidis Elementorum liber primus.* Item *Heronis Alexandrini vocabula quaedam geometrica:* antehac nunquam edita, graece et latine. Argentinae 1571. Das sind die Ὅροι oder Definitionen des Heron. Vgl. F. Hultsch *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae.* Berolini 1864, S. IX.

2) Der genauere Titel lautet: *Oratio Conradi Dasypodii de disciplinis mathematicis.* Eiusdem *Hieronis* etc. *vocab. geom. translatio.* Eiusdem *lexicon mathematicum* ex diversis collectum antiquis scriptis.

3) Diese Beschreibung ist in einer deutschen und lateinischen Ausgabe vorhanden, von denen die deutsche etwas ausführlicher ist. Die Titel lauten: Cunradi Dasypodii *Warhafftige Ausslegung und Beschreybung des Astronomischen Uhrwercks zu Strassburg.* Strassburg 11. Mai 1580. Die eigentliche Beschreibung der Uhr ist hiernach wieder abgedruckt in der *Elsassischen und Strassburgischen Chronicke von Jacob von Königshoven* herausgeg. von D. Johann Schiltern. Strass-

Dasypodius auch Herons mechanisch-physikalische Werke schon um 1571 gelesen haben wird, aber der griechische Text erst 1693 zum ersten Mal gedruckt ist und die älteste vollständige (lateinische) Uebersetzung der Pneumatik von Commandini erst 1575, die älteste (italienische) Uebersetzung der Automaten von Baldi erst 1589 im Druck erschienen, so leuchtet ein, dass Dasypodius über Herons mechanisch-physikalische Werke etwas Handschriftliches besessen haben muss. War dies eine Uebersetzung oder der Originaltext? Es ist wahrscheinlich, dass Dasypodius sich um Heronhandschriften bemühte. Wenigstens schrieb er an den erwähnten Commandini, einen gelehrten, aber in Vorurtheilen befangenen Arzt aus Urbino. Als guter Katholik hielt dieser es für unthunlich, sich einem schmutzigen Ketzer gefällig zu erzeigen; er fürchtete sich dadurch zu beflecken (vgl. *Giornale de' letterati d'Italia* XIX, 180: 'non giudicò bene l'uomo Catolico il contaminarsi con l'amicizia di persona imbrattata e lorda dal fango dell' Eresie'!)[1]). Vielleicht sah Commandini in Dasypodius auch einen Concurrenten. Im Besitz von Heronhandschriften war derzeit auch Petrus Ramus, jener aufrichtige Verehrer deutscher Gelehrsamkeit, der 1572 ein Opfer der Bartholomäusnacht wurde[2]). Das bezeugt er selbst mit folgenden Worten: 'Studiose vel curiose potius Heronis opera nobis exquisita sunt, tandemque e variis bibliothecis collecta graece et manu descripta *πνευματικὰ* (Druckwerke) integra, *αὐτοματοποιητικὰ* (Automatentheater) multis locis corrupta, fragmenta quaedam geodaetica: alia vero pleraque Heronis praedicantur, ut de machinis bellicis earumque figuris eleganter descriptis *περὶ βελοποιΐας* (Geschützbau) etc.' Mit diesem Gelehrten, den Dasypodius vielleicht 1569

---

burg 1698. Die lateinische Beschreibung schliesst sich an die Universitätsnachrichten des Jahres 1580: Cunradi Dasypodii *Heron mechanicus seu de mechanicis artibus atque disciplinis.* Eiusdem *Horologii astronomici Argentorati in summo templo erecti descriptio.* Argent. 6. Juni 1580. Mit letzterer Schrift befasst sich auch J. L. Heiberg *Nogle Eftervirkninger af graesk Mechanik* in den Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i Aaret 1886, S. 9—14. (Auf die Heiberg'sche Abhandlung wurde ich aufmerksam durch Herrn Oberschulrat Professor Dr. F. Hultsch in Dresden-Striesen.) Eine poetische Beschreibung der astronomischen Uhr giebt der unglückliche Tübinger Professor Frischlin bereits ein Jahr nach Vollendung des Werkes: *Carmen de astronomico horologio Argentoratensi scriptum a* M. Nicodemo Frischlino. Argentorati 1575.

1) Denn Konrad Dasypodius war wohl Anhänger der reformirten Lehre. Sein Vater war wenigstens mit Ulrich Zwingli befreundet, ward von diesem an die Züricher Schola Carolina berufen und unterrichtete später dessen Söhne. Dem Italiener mochte die zur evangelischen Lehre übergetretene Stadt Strassburg überhaupt als Hochburg der Ketzerei erscheinen.

2) Vgl. Petri Rami *scholarum mathematicarum* libri unus et triginta. Frankfurt 1627, S. 33. Heiberg a. a. O. S. 10.

persönlich kennen lernte, als Ramus auf seiner Reise durch Deutschland Strassburg berührte, stand Dasypodius in gelehrtem Briefwechsel. 'Dasypodius nobis etiam familiaribus literis notus,' schreibt Ramus in den Schol. math. S. 64. Auch an ihn wird sich Dasypodius wegen Handschriften gewandt haben, obwohl das nicht ausdrücklich berichtet wird und infolgedessen auch nicht bekannt sein kann, mit welchem Erfolge. Trotzdem könnten wir, auch ohne bestimmtere Nachrichten, vermuthen, dass Dasypodius einen griechischen Herontext besessen haben muss. In der Einleitung zu der oben erwähnten Schrift 'Oratio de disciplinis mathematicis' kündigt er ein Unternehmen an, welches sich zur Aufgabe stelle, eine Anzahl mathematischer und physikalischer Schriften des Alterthums in einem vierbändigen Werke zu vereinigen. Diese Sammlung ist zwar niemals erschienen, aber es ist kein Zweifel, dass Dasypodius seine Vorbereitungen dazu getroffen hatte. Er spricht ausdrücklich von der Nothwendigkeit einer 'Bibliotheca variis variarum linguarum manuscriptis graecis latinisque antiquis exemplaribus instructissima [1])'. Der vierte Band insbesondere sollte enthalten: *ὀργανοποιητικὰ* (damit sind wahrscheinlich des Athenaeus Schrift *Περὶ μηχανημάτων* (Kriegsmaschinen) und Biton's *Κατασκευαὶ πολεμικῶν ὀργάνων καὶ καταπελτικῶν* (Herstellung von Kriegsmaschinen und Geschützen) gemeint, vgl. unten S. 182), *βελοποιητικά* (ohne Zweifel Herons Schrift vom Geschützbau), *πνευματικὰ ὑδραυλικά* (beides umfasst Herons Druckwerke), *αὐτοματοποιητικά* (Herons Automatentheater), *ἀρχιτεκτονικά* [2]). Erwähnt sei

---

1) In seinem ungedruckten Gesuche um Versetzung in den Ruhestand vom 25. October 1597, welches in Strassburg im Collegium Wilhelmitanum aufbewahrt wird und mir dank der Güte des Hrn. Dr. Erichson (s. unten S. 182, Anm. 5) vorliegt, erklärt er, seinem Nachfolger gern mit seiner 'Bibliotheca, quam ad haec studia mediocriter instructam habeo', zu Hilfe kommen zu wollen.

2) Es ist nicht ganz sicher, was damit gemeint ist; vermutlich waren es die in der erwähnten Schrift von Dasypodius ins Lateinische übersetzten Excerpte, welche R. Schöne *Damianos Schrift über Optik*. Griechisch und Deutsch. Berlin 1897, S. 22—30 als Auszüge aus Geminos bezeichnet, welche aber noch F. Hultsch *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae*. Berolini 1864, S. 249, 14—252, 22 als Heronisch galten, weil ihre Ueberlieferung sich oft an Heronische Schriften anschliesst. Vgl. R. Schöne, S. X. Bemerkenswert ist jedenfalls, dass die erwähnten Auszüge sich mit architektonischer Perspective beschäftigen, wie auch das am Schlusse derselben stehende Bruchstück *Τί τὸ σκηνογραφικόν* (Was ist Skenographie?), welch letzteres Dasypodius anscheinend im zweiten Bande geben wollte, aber auch schon a. a. O. S. 18 lateinisch übersetzt hat. Uebrigens hat Dasypodius auch die übrigen Excerpte (Hultsch a. a. O. S. 246, 16—249, 12 aus Geminus, 252, 24—276, 14 aus Proklos mit einigen Auslassungen und 276, 16—279, 8 aus Anatolius (278, 19 *τὸ ἀρχιτεκτονικόν*!) übersetzt und giebt sie alle für Heronisch aus.

noch, dass der dritte Band ausser anderem 'Dioptrica', ohne Zweifel Herons Schrift *Περὶ διόπτρας* (s. unten S. 182), enthalten sollte[1]). Dasypodius beabsichtigte auch den erwähnten Schriften Figuren beizugeben und zwar reconstruirte. Dass er damals aber wirklich bereits eine griechische Heronhandschrift besass, welche fast alle mechanisch-physikalischen Schriften Herons enthielt, beweist eine weitere Notiz in der Vorrede der erwähnten Schrift 'de disciplinis mathematicis': omnia quae ab eodem Hierone scripta sunt intelligentur, ut sunt *πνευματικά, ὑδραυλικά, διοπτρικά, κλάσματα καὶ αὐτοματοποιητικὰ* et alia cum huius tum aliorum authorum scripta, quae penes me habeo et in lucem ederem, si consiliis opera auxiliisve magnorum virorum iuvarer'. Hier begegnet uns zum ersten Mal der Ausdruck *κλάσματα*. Er kehrt wieder in der historischen Einleitung des 'Heron mechanicus' in folgendem Zusammenhange: 'Pneumatica et clasmata (sc. Hero) ita tractat, ut, siquis saltem ea quae de vacuo proponit legat, summo et ingenio et doctrina excellenti eum praeditum fuisse deprehendat'. Schon aus dem Zusammenhange könnte man wohl entnehmen, dass 'pneumatica et clasmata' sich auf ein Werk beziehen müssen. Aber was sind die clasmata (= *κλάσματα*)? Nichts anderes als Fragmente. Es ergiebt sich nämlich aus der Ueberlieferungsgeschichte der Heronischen Pneumatik, dass in irgend einer älteren Handschrift der Pneumatik eine ganze Reihe von Capiteln durch Ausfall mehrerer Quaternionen ausgelassen war[2]). Diese gekürzte Pneumatik liegt in vielen handschriftlichen Exemplaren vor. In einigen anderen stehen wieder nur die *κλάσματα*, eben die in der gekürzten Pneumatik fehlenden Abschnitte. Wieder in einer anderen kleinen Gruppe von Handschriften sind am Schlusse der gekürzten Pneumatik die genannten Fragmente sei es unmittelbar, sei es hinter anderen dazwischen stehenden Werken zugefügt worden. Zu den wenigen Handschriften, die also zwar die vollständige Pneumatik, aber, um mit Dasypodius zu reden, als 'pneumatica und clasmata' enthalten, gehörte bis zu ihrer Verbrennung im Jahre 1870 auch die Handschrift C III 6 des evangelischen Seminars in Strassburg. Zum Glück sind Beschreibungen derselben von Vincent[3])

1) Die Dioptra wird auch in der neuen griechisch-deutschen Heronausgabe der Bibliotheca Teubneriana im dritten Bändchen von Herrn Dr. H. Schöne in Berlin herausgegeben werden, während Herons Pneumatik und Automaten im ersten Bändchen stehen, dessen Erscheinen unmittelbar bevorsteht. Die Belopoiika nebst der Mechanik und der Katoptrik wird auf Grund neuer Vergleichungen das zweite Bändchen bringen.

2) Vgl. die Einleitung zu Heronis op. I der Bibliotheca Teubneriana.

3) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale* XIX, 2. Paris 1858. S. 172 und 481.

und Wescher[1]) sowie ihre Lesarten durch Friedrich Haase[2]) erhalten. Die Strassburger Handschrift enthielt danach folgende Schriften: Herons *Πνευματικά*, *Βελοποιητικά*, *Περὶ διόπτρας*, dann folgten Schriften des Athenaeus, Biton (s. oben S. 180) und ein von Wescher als Heronisch bezeichneter Abschnitt, welcher vermuthlich mit den oben S. 180, Anmerk. 2 besprochenen Stücken identisch ist. Hieran reihen sich *Τινὰ κλάσματα* und *Περὶ αὐτοματοποιητικῆς*. Den Schluss bildete Euklids Katoptrik. Wir sehen, dass die Handschrift lauter Dinge enthielt, welche Dasypodius in seinem Sammelwerke herausgeben wollte[3]). Zu dieser inneren Beziehung gesellt sich schliesslich auch noch ein äusseres Zeugniss. Die Handschrift enthielt unter dem Deckel den Vermerk: 'Mathiae Berneggeri ex biblioth. Dasypod. 1613.'[4])

Als ich das Resultat der vorstehenden Untersuchung Sr. Excellenz Hrn. Wirkl. Geh. Rath Richard Schöne mittheilte, äusserte dieser, wenn dem so sei, so rühre wahrscheinlich auch die Wolfenbüttler Handschrift August. 68, 2, welche eine lateinische Uebersetzung von Herons Dioptra mit perspectivischen, also reconstruirten Zeichnungen enthält, von Dasypodius her, wie er immer vermuthet habe. Trotzdem die Schriftzüge des Dasypodius mit denen der Handschrift nicht übereinstimmen[5]), ist dennoch eine innere Möglichkeit für die Abfassung der lateinischen Uebersetzung durch Dasypodius dadurch gegeben, dass sie in ihren Lesarten nach Mittheilung des Hrn. Dr. H. Schöne mit der Strassburger, freilich auch mit einer Pariser Handschrift, stimmt. Ich glaube jene Vermuthung nun meinerseits noch durch folgende Erwägungen stützen zu können. Gegen das Ende der fraglichen Handschrift findet sich von derselben Hand, welche den Text geschrieben hat, auf dem Rande (Fol. 54v) ein kritisirender Hinweis auf Fig. 54 von Bessonus *Theatrum instrumentorum et machinarum*. Dieses Buch ist erst 1578 in Lyon erschienen. Also muss die Handschrift

1) *Poliorcétique des Grecs*. Paris 1867. S. XXXV.

2) Die Haase'schen Collationen sind jetzt im Besitze Seiner Excellenz des Herrn Wirklichen Geheimen Rathes und Generaldirectors der Königlichen Museen in Berlin, Professors Dr. R. Schöne. Dessen bekannte Liberalität ermöglichte mir die Benutzung der Haase'schen Collationen, die mir auch in diesem Augenblicke für die Pneumatik und die Automaten noch vorliegen.

3) 'Catoptrica' waren von Dasypodius für den zweiten Band vorgesehen. Er hatte übrigens Euklids Katoptrik schon einmal im Jahre 1557 herausgegeben.

4) Nach Anm. 3 könnte Dasypodius die Handschrift schon im Jahre 1557 besessen haben. In diesem Jahre trat er die Professur an.

5) Herr Dr. Erichson, Director des Collegium Wilhelmitanum in Strassburg, hatte die Liebenswürdigkeit, zwei eigenhändige Schriftstücke des Konrad Dasypodius (von 1562 und 1597) zum Vergleich zu übersenden.

nach dieser Zeit entstanden sein. Jedenfalls wusste, nach einer Randbemerkung auf Fol. 44ʳ der Urheber derselben, dass die berühmte Heronische Dreiecksformel[1]) sich bei Heron dem Jüngeren wiederhole[2]), der dort allerdings mit Heron aus Alexandria identificirt wird, ferner bei Jordanus Nemorarius (13. Jahrh.), Pediasimus (14. Jahrh.), Tartalea (Tartaglia † 1557), Nonnesius (Nunnez? † 1577)[3]) und dass Freigius, dessen sowohl anderen als auch Konrad Dasypodius und David Wolckenstein gewidmete 'quaestiones geometricae et stereometricae' 1583 in Basel erschienen[4]), mit Unrecht behaupte, sie sei nicht von Heron überliefert. Auch kannte der Bearbeiter das 21. Kapitel der Kesten des Julius Africanus, das ihm bei der Aufgabe, von einem Ufer aus die Breite eines Flusses zu messen (Dioptra, Cap. 9, S. 210 Vinc. und ebenda S. 408), wegen des gleichen Vorwurfs in Erinnerung kommt. Ebenso muss dem Uebersetzer die Schrift des Heron aus Alexandria über die Automatentheater bekannt gewesen sein. Denn zur Dioptra, Cap. 17, S. 240, 11 (*σχοινίον εὖ ἐκτεταμένον καὶ προβεβασανισμένον*), wo von einem gut ausgezogenen und vorher auf die Probe gestellten Seile die Rede ist, erinnert sich der Schreiber einer Stelle der Automaten (Heron. op. I, 344, 12 ff. = S. 245 Thévenot), an welcher ein zweckentsprechendes Verfahren beschrieben ist. Daher auf Fol. 32ᵛ die Randbemerkung: 'id quomodo fiat docet (sc. Hero) in automatopoeeticis'[5]). Die Handschrift ist nicht etwa Abschrift einer älteren lateinischen Uebersetzung, sondern die Uebersetzung ist, wie ihr Titel besagt, nach dem Griechischen gemacht (e Graeco in Latinum conversus). Auch finden sich an manchen Stellen Verbesserungen in der Art, wie wenn jemand sein Manuscript behufs Drucklegung nochmals selbst durchcorrigirt oder corrigiren lässt, so auf Fol. 2ʳ eine dreifache Correctur für die Uebersetzung der Worte S. 174, 10, 11, *ἐξέσται τοῖς βουλομένοις ἐντυγχάνουσι κρίνειν τὴν διαφοράν*. Ferner sind für das Räderwerk von Herons Wegmesser (Hodometer) nicht weniger als drei

1) In Herons neuentdeckten Metrika ist die Formel in einer von der Dioptra abweichenden Recension überliefert. Siehe Band III der neuen Heronausgabe ed. H. Schöne. (In Vorbereitung.)

2) Vgl. Martin *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie* in den Mémoires présentés par divers savants à l'academie des inscriptiones et belles-lettres. Paris 1854, S. 438, 439.

3) Gewöhnlich heisst Nunnez lateinisch Nonius. Ein Nonius de arte navig. wird auch wiederholt in der Handschrift erwähnt. Das ist auf alle Fälle Nunnez, dessen Schrift '*de arte et ratione navigandi*' zuerst 1546, dann 1566 und 1573 erschien.

4) Vgl. Kästner, *Gesch. der Mathematik*. Göttingen 1797, II, 738.

5) Dass der Urheber dieser Randbemerkung grosses Interesse an der erwähnten Sache nahm, leuchtet ein. Vgl. dazu unten S. 188. 191.

verschiedene Entwürfe vorhanden, von denen zwei wieder durchgestrichen sind. So viel ist also wohl sicher, dass wir es hier nicht mit einer gewöhnlichen Abschrift, sondern mit der Arbeit eines Gelehrten des 16. Jahrhunderts zu thun haben, der ausser anderen Heron und auch Pediasimus kannte, wie Dasypodius; denn auch des Pediasimus gedenkt Dasypodius in der Vorrede zu seiner bekannten 'Oratio etc.'

Nehmen wir einmal an, die Uebersetzung rühre wirklich von Dasypodius her, so bliebe die Frage zu beantworten, auf welche Weise sie nach Wolfenbüttel kommen konnte. Die Handschrift gehört zu den von Herzog August dem Jüngeren, dem verdienstvollen Gründer der Wolfenbüttler Bibliothek, erworbenen. Dieser hatte ständig einen Agenten in Strassburg, das war in den Jahren 1620—1634 der Professor Joachim Cluten, der ihm abgesehen von der Mittheilung wichtiger politischer Ereignisse, auch hin und wieder den Ankauf von Büchern vermittelte. Darüber giebt eine stattliche Reihe wohlerhaltener Briefe Clutens (Handschrift 88 Nov.) an den Herzog Aufschluss[1]). Bereits in diesen Briefen ist wiederholt von einem mathematischen Catalogus die Rede, den Cluten am 3. Juni 1621 (Fol. 21^r) bestimmt erklärt, über acht Tage absenden zu wollen. Es wird zwar nicht gesagt, ob es sich um Handschriften oder Bücher handelt. Aber es geht doch daraus hervor, dass dem Cluten bekannt war, wie sehr sich der Herzog auch für mathematische Dinge interessirte. Mehrere Male wird in Clutens Briefen auch Mathias Bernegger erwähnt, dem 50 Rthll. übergeben werden sollen (Fol. 211^r); wofür, ist nicht bekannt. Dieser Bernegger, ein angesehener Gelehrter, Professor der Akademie in Strassburg, Uebersetzer einer Schrift Galileis und Herausgeber trigonometrischer Tafeln, muss aber damals schon für den Herzog Bücher besorgt haben. Wenigstens findet sich auf einem Briefe vom 26. Februar 1632 (Fol. 211^r, von des Herzogs Hand?) eine Randnotiz, nach welcher ihm ein Buch übersandt werden soll, 'so Berneggerus hat'. Letzterer vermittelte nach Clutens Tode für den Herzog den Ankauf von dessen Bibliothek, von welcher über die Hälfte 1637 nach Braunschweig und später nach Wolfenbüttel kam. Zugleich wurde Bernegger bis zu seinem Tode (also 1636—1640) Clutens Nachfolger als Agent des Herzogs. Nach Bernegger's Tode versah dessen Schwiegersohn Joh. Freinsheim diese Stellung bis 1642. Beide erhielten ebenso wie Cluten ein Jahrgehalt (annuum salarium) vom Herzog.

Nun liegt es gewiss nicht so fern zu vermuthen, dass Dasypodius, wie schon 'Hieronis nomenclatura', auch die anderen Schriften Herons für sein

---

1) Vgl. auch Jacob Burckhard *Historia bibliothecae Augustae*. Lipsiae 1744, S. 195.

mathematisches Sammelwerk lateinisch bearbeitete, um sie in seiner Ausgabe dem griechischen Texte zu leichterem Verständnis hinzuzufügen. Ist dem so, so war es möglich, dass Bernegger, der, wie uns bekannt (s. oben S. 21), aus der Bibliothek des Dasypodius die griechische Heronhandschrift erworben hatte, auch die lateinische Bearbeitung sich verschaffte, und da letztere für ihn selber neben dem griechischen Exemplare nicht solchen Werth haben mochte als für den von einer 'summa codices manuscriptos undique colligendi cupiditas' (Burckhardt a. a. O. S. 226) erfüllten Herzog, welcher derzeit überhaupt kein Exemplar von Heron besass, so hatte er die beste Gelegenheit, durch Ueberlassung dieser mit nicht unschönen technischen Reconstructionen ausgestatteten Handschrift sich seinem fürstlichen Auftraggeber und Gönner, von dessen Interesse für mathematische Dinge[1]) er wusste, gefällig zu erzeigen. Sollte es nun nach diesen Auseinandersetzungen wahrscheinlich sein, dass die Wolfenbüttler Dioptra von Dasypodius stammt, so würde daraus gefolgert werden müssen, dass Dasypodius in technischen Dingen nicht unerfahren gewesen ist. Denn in des Dasypodius griechischer Handschrift der Dioptra befand sich nach Mittheilung des Herrn Dr. H. Schöne eine Lücke, welche in der lateinischen Bearbeitung zwar als solche kenntlich gemacht, aber auch zugleich in sachkundiger Weise ergänzt ist. Wir werden uns dessen später wieder erinnern, wollen aber zuvor das Werk im Umriss skizziren, welches mehr als alle litterarische Thätigkeit dem Dasypodius ein Andenken bei der Nachwelt gesichert hat.

Das ist die Strassburger astronomische Münsteruhr[2]). Wir geben eine kurze Beschreibung ihrer äusseren Einrichtung.

---

1) Des Herzogs Interesse für mathematische Dinge wird unter anderem dadurch bestätigt, dass er später den berühmten, um 600 n. Chr. entstandenen Codex Arcerianus kaufte, welcher inhaltlich in so naher Beziehung zu Heron steht, dass mehr als ein Gelehrter die im Codex Arcerianus überlieferten römischen Agrimensoren geradezu aus Heron schöpfen lässt.

2) Ein schöner Kupferstich des Strassburger Hohenlohe-Museums aus dem Jahre 1574 zeigt uns deutlich das Aeussere der Uhr des Dasypodius. Der Stich stand uns in Braunschweig dank der Liebenswürdigkeit des Hrn. Directors Dr. Seyboth zur Verfügung. Die beabsichtigte Reproduction liess sich leider nicht ausführen, da der Stich sich zu einer Wiedergabe durch Autotypie nicht eignet. Um aber das Verständniss der Beschreibung der Uhr doch etwas zu erleichtern, haben wir uns entschlossen, eine Zinkotypie der heutigen Uhr beizugeben. Denn das äussere Gehäuse der Uhr ist noch heute in der Schwilgué'schen Uhr (1838—1842) im wesentlichen dasselbe wie in der des Dasypodius. Vgl. Schwilgué, *Description abrégée de l'horloge astronomique de la Cathédrale de Strasbourg.* Strasbourg 1847. 3e édition, S. 22. Eine getreue Nachbildung der heutigen Uhr in trefflicher Heliogravüre giebt A. Stolberg in den *Studien zur deutschen Kunstgeschichte* Heft 18: *Tobias*

Abgesondert lag vor dem ganzen Werke ein Himmelsglobus[1]) zur Darstellung der täglichen Drehung des gestirnten Himmels. Die Zahl der Fixsterne (1022) ist die Ptolemäische. Die Kugel drehte sich in 24 Stunden automatisch um sich selbst. Sie wurde getragen von einem nicht mehr vorhandenen Pelikan, welcher nach der Absicht des Dasypodius ein Abbild der Ewigkeit sein sollte, während er sonst das Sinnbild aufopfernder Liebe ist. Der Pelikan hatte aber noch den praktischen Zweck, einige innere Bewegungsvorrichtungen, nämlich Zahnräder und die Achsen des Himmelsglobus aufzunehmen und zu verbergen[2]). Wie die Verbindung mit dem übrigen Werke hergestellt wurde, ist im einzelnen nicht bekannt. Den Globus hatte Dasypodius selbst aus 'Tuch, Papier, Leym, Kreyd und anderer Materie' unter Beihilfe von Tobias Stimmer angefertigt. Der Durchmesser des Globus betrug drei Werkschuh, wobei er sich an eine entsprechende antike Vorschrift hielt[3]).

Hinter dem Globus befand sich in der Mitte des Sockels der immerwährende Kalender, bestehend aus zwei beweglichen Ringen und einer unbeweglichen Scheibe, auf welch letzterer eine Karte von Strassburg und den benachbarten Rheingegenden dargestellt war. Der äussere Kalenderring gab die 365 Tage des Jahres an, welche rechts (in der Richtung nach dem Beschauer) Apollo mit einem Pfeile zeigte, während links gegenüber Diana den entsprechenden Tag nach einem halben Jahre andeutete. Der Kalenderring drehte sich einmal im Jahre von links nach rechts, sein Durchmesser betrug 10 Werkschuh, seine Breite einen. Ein (grosses) hölzernes Rad für die Bewegung des Kalenderreifens sowie eine Anzahl (kleinerer) nicht montirter Räder und Getriebe dazu sind noch im Frauenhause zu Strassburg vorhanden, wie Herr Münsterbaumeister Arntz[4]) die

---

Stimmers Malereien an der astronomischen Münsteruhr zu Strassburg. Strassb. 1898. Es wurde uns von der Verlagsfirma J. H. E. Heitz in Strassburg gütigst gestattet, sie zur Reproduction auf der am Schluss des Heftes beigefügten Tafel zu benutzen. Dafür wissen ihr Verleger und Verfasser nicht wenig Dank.

1) Er steht jetzt im Frauenhause zu Strassburg. Siehe Anm. 4.

2) Vgl. Heron mechanicus, Blatt G^v (Rückseite) letzte Zeile und N. Frischlin a. a. O. Blatt C III^r (Vorderseite), Zeile 19.

3) Siehe Heron mechanicus Blatt G, Zeile 7—9: 'quam quidam ex antiquis et probatis scriptoribus volunt tantam esse debere, ut diameter eius ad minus trium sit pedum, quanta nostri globi magnitudo est.'

4) Ich fühle mich Herrn Arntz für seine werthvollen brieflichen Mittheilungen über den jetzigen Bestand und Befund der Uhr des Dasypodius zu grossem Danke verpflichtet, dem ich gern hiermit öffentlich Ausdruck gebe. Auch hatte Herr Arntz die Liebenswürdigkeit, mir für einige Zeit eine dem 'Stift Unser-Frauen-Werk' gehörige photographische Aufnahme des noch vorhandenen montirten Räderwerks zur Benutzung zu überlassen.

Güte hatte mir mitzutheilen. Der zweite[1]) innere, drei Werkschuh breite, bewegliche Ring, welcher sich in hundert Jahren einmal von rechts nach links drehte, enthielt auf 16 abgeteilten concentrischen Kreisen die Jahreszahlen für ein Jahrhundert (1573—1673) nach christlicher Zeitrechnung und in Jahren seit Erschaffung der Welt, die Frühlings-Tag- und Nachtgleichen (zugleich die Präcession der Tag- und Nachtgleichen, wenigstens nach Heron mech. G III^r), die beweglichen Feste, die Schaltjahre u. drgl.

Ueber dem immerwährenden Kalender waren zur bildlichen Darstellung der sieben Wochentage in einer niedrigen Nische die sieben Wochenplaneten Mars, Mercur, Jupiter, Venus, Saturn und (wegen des Ptolemäischen Systems) die Sonne und der Mond auf einer drehbaren Scheibe so aufgestellt, dass allemal nur der Planet hervortrat, welcher dem betreffenden Tage den Namen gab, also Mars am Dienstag, Mercur am Mittwoch u. s. w., am Sonntag aber Phöbus Apollo und am Montag Diana[2]).

Oberhalb der Planeten ragt über den oberen Rand des Sockels ein Zifferblatt mit Viertelstunden- und Minuteneintheilung[3]) hervor. Daneben sitzt auf der einen Seite ein Genius, welcher beim Stundenschlage sein Scepter hob und damit die Stunden zählte, während der andere stündlich nach dem Glockenschlage eine Sanduhr umkehrte. Das Räderwerk für die letztere Vorrichtung ist erhalten.

Im Mittelgaden befindet sich das Astrolabium[4]), eine Scheibe mit sieben sich von einander unabhängig und ungehindert bewegenden Zeigern, welche den jeweiligen Stand der sieben Ptolemäischen Planeten im Thierkreise, der einen kleineren Kreis innerhalb der Scheibe bildete, anzeigten. Der Zeiger für den Mond brauchte zu seiner Umdrehung einen Monat, der für die Sonne, Mercur und Venus je ein Jahr, für Mars 2 Jahre, für Jupiter 12 Jahre und für Saturn 30 Jahre[5]). Auf dem äusseren Rande des Astrolabiums waren die ganzen[6]) und die halben Stunden angegeben.

1) Diesem zweiten Ringe entspricht der Lage nach bei Schwilgué die azurblaue breite Ringscheibe in der Mitte.

2) An diesen 'Wochentagen' hat Schwilgué anscheinend nichts oder doch nichts Wesentliches geändert.

3) Das ist bei Schwilgué ein modernes Zifferblatt mit Stunden- und Minutenzeiger.

4) Das hat Schwilgué durch ein Planetarium nach Copernicanischem System mit unbeweglicher Sonne in der Mitte ersetzt.

5) Vgl. Warhafft. Ausleg. S. 15. Die Umdrehungszeiten sind abgerundet, allerdings bei einigen Planeten im Vergleich zur heutigen Rechnung wenig genau.

6) Das Räderwerk zur Bewegung des Schlagwerks der ganzen (und der Viertelstunden) ist erhalten. Der Lage nach waren bei Dasypodius die Stunden verzeichnet, wo bei Schwilgué der Thierkreis steht, also auf dem äusseren Rande.

Der Stundenzeiger (Drachenzeiger) bewegte sich in 24 Stunden einmal um die Scheibe. Die 24 Stunden zerfielen in zweimal 12 Stunden. Die Mitte des Astrolabiums zierte eine Erdkugel, welche auch die Zeiger enthielt. Das zum Astrolabium gehörige Räderwerk stand dahinter.

Ueber dem Astrolabium sah man die Sternscheibe mit dem Monde. Der Mond, durch eine Scheibe[1]) mit vergoldeter Figur dargestellt, verschwand zur Zeit des Neumonds hinter der durch zwei Halbkreise abgegrenzten unteren Hälfte der Scheibe und kam nach und nach wieder hervor, bis er bei Vollmond die ganze Scheibe zeigte. Das Räderwerk für diese Sternscheibe ist, wenn auch ohne Gestell, erhalten.

In dem oberen halbrunden Vorbau befand sich unten ein drehbarer horizontaler Kreisring ('Radd') mit vier die menschlichen Lebensalter[2]) darstellenden Figuren, von denen ein Knabe mit einem Beckenschlage das erste Viertel einer Stunde, ein Jüngling mit zwei Schlägen das zweite, ein Mann mit drei das dritte und ein Greis mit vier das letzte Viertel anzeigte. In dem Stockwerke darüber standen rechts und links von einer Glocke die Figuren Christi und des Todes ebenfalls auf einem horizontalen Kreisringe ('Radd'). Beim Stundenschlage trat Christus mit Kreuz und Palmzweig zum Zeichen der Erlösung vor, während der Tod[3]) zurückwich. Dann drehte sich aber der Ring plötzlich nach der entgegengesetzten Richtung, und der Tod ging wieder vor und gab die der Stunde entsprechenden Glockenschläge. Von den erwähnten Reifen ist nichts mehr vorhanden.

Der Thurm zur Linken des Beschauers enthielt die Gegengewichte, welche an hanfenen Schnüren (Frischlin: 'funes cannabaei') hingen. Vielleicht gingen auch noch nach einzelnen Walzen Schnüre. Weder Schnüre noch Gegengewichte sind erhalten[4]).

Das Räderwerk ist aus eisernen Stirnrädern und Kron- oder Kammrädern von sehr verschiedenem Durchmesser und sehr verschiedener Zahnzahl und kleineren Getrieben zusammengesetzt. Die Räderübersetzung ist in ausgiebigem Maasse verwandt. Die eisernen Achsen sind sowohl horizontal als vertical.

---

1) Das ist bei Schwilgué jetzt ein Mondglobus, bestimmt, die Mondphasen sichtbar zu machen.

2) Die vier Lebensalter hat Schwilgué mit einigen Aenderungen beibehalten.

3) Den Tod hat Schwilgué zu den Lebensaltern versetzt und an seine Stelle die 12 Apostel treten lassen, welche 12 Uhr Mittags, wie allbekannt, vor ihrem Herrn und Meister vorüberziehen und sich vor ihm verneigen.

4) Ich übergehe den Hahn und das Glockenspiel, weil ersterer von Dasypodius aus dem noch älteren Werke übernommen ist und letzteres ganz von David Wolckenstein stammt. Uebrigens ist das Räderwerk für beides erhalten.

Was nun die technische Einrichtung der Uhr betrifft, so liegt es nahe, anzunehmen, dass diese ganz und gar dem Habrecht aus Schaffhausen anzurechnen sei, wenn man weiss, dass Dasypodius in erster Linie Gelehrter war und dass andrerseits Habrecht nach Dasypodius' eignem Zeugnisse schon anderweitig Uhrwerke angefertigt hatte. Darum nennt z. B. das „*Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrien*" VI, 183[7] geradezu den Habrecht als Urheber der astronomischen Uhr, ohne irgendwie des Dasypodius zu gedenken. Ich glaube aber, dass damit dem Dasypodius Unrecht geschieht. Nach unserer Auffassung hat sich Dasypodius auch um die technische Einrichtung gekümmert. Z. B. hinsichtlich der Räderübersetzungen waren doch gewiss genaue Berechnungen erforderlich, um zu wissen, wie gross die verschiedenen Durchmesser der Räder oder wie gross die Zahl der Zähne an den verschiedenen Uebertragungen sein musste, um das eine Mal eine Umdrehung in hundert Jahren, ein anderes Mal in 30, in 12 oder in kürzerer Zeit herbeizuführen. Um dies festzustellen, genügten wohl nicht die Kenntnisse des praktischen Technikers, da mussten die theoretischen des 'mechanici logici', wie Dasypodius sich nennt, aushelfen. Wir sind daher nicht der Meinung, dass sich die Mitwirkung des Dasypodius lediglich auf die astronomischen und kirchlichen Daten beschränkt habe.[1]) Nun sind die Gebrüder Habrecht nicht etwa ihres bedeutenden Rufes wegen aus Schaffhausen nach Strassburg geholt, sondern sie haben sich selbst durch Schaffhausener Stipendiaten dem Dasypodius empfehlen lassen, der von ihrer Kunstfertigkeit noch nichts weiss, aber erklärt, es 'mit ihnen gewagt zu haben'. Den Plan zu der Uhr entwirft dann Dasypodius allein. Kann man sich denken, dass er alle die erwähnten Dinge anordnete, ohne eine Vorstellung von einem entsprechenden Mechanismus zu haben? Erst nachdem Dasypodius von Oswald Schreckenfucks (so!) in Freiburg seinen 'Abriss' hat begutachten lassen, werden die Habrecht gefragt, ob sie sich das zu machen unterstehen, was Dasypodius 'an(ge)geben und erfunden'. Auch die ganze Ausführung des Werkes überwacht Dasypodius, unterstützt von David Wolckenstein, selbst während einer schweren Krankheit wird nicht 'das Geringste' ausgeführt, worüber Dasypodius nicht erst befragt wäre. Dazu kommen noch folgende Aeusserungen des Dasypodius, Warhafft. Aussleg. S. 17: 'das (= dass) solches werck nicht gering betrachtens erfordert hat, auch nicht auss dem Uhrenmacher allein her flüsset, sonder auss der Astronomey unnd aller schwerichsten und höchsten stücken diser

1) Es sei gestattet, auf die kunstvolle Marburger Globusuhr als auf einen analogen Fall hinzuweisen. Der Mechanismus wurde zwar praktisch von dem Uhrmacher Hans Buch ausgeführt, aber ersonnen von Eberhard Baldewein. Vgl. Alhard von Drach a. a. O. S. 15.

kunst, auch keinem Uhrenmacher oder Handtwercksman, der die Astronomey nicht auss rechten grundt gestudiert, erlernet und erfahren hat, müglich sein kan und mag, solches Astronomisch Uhrenwerck erfinden angeben, anordnen, und zum ende zubringen." Sodann spricht Dasypodius a. a. O. S. 13 ausdrücklich von der 'underweisung deren so daran gearbeit unnd als handtwercks leüt nôtig zu disem Astronomischen Uhrwerck gewesen.' Denn nach Heron mech. H II^{v} waren die 'opifices' in den Künsten unerfahren, welche die selbstthätigen Bewegungen, die Zeigervorrichtungen u. s. w. betrafen (artium, ex quibus automata, gnomonica, pneumatica, sphaerica desumpta fuerunt, ignari erant). Dass die erwähnte Unterweisung sich aber thatsächlich auch auf solche technische Dinge wie das Räderwerk bezogen haben muss, beweist eine Stelle aus Frischlin, wo er den Isaak Habrecht feiert:

. . . tu gyris addere certos
Doctus ab Astronomo dentis rite omnia solus
Ictibus innumeris operosa incude parasti.

Damit ist unzweideutig gesagt, dass Habrecht die Zahnräder nach der Anweisung des Astronomen, also des Dasypodius, geschmiedet und mit einer bestimmten Anzahl Zähne versehen habe.

Aus dem allen geht das eine zur Genüge hervor, dass Dasypodius sich auch um die technische Einrichtung gekümmert und etwas davon verstanden haben muss, wie wir auch oben (S. 185) technische Kenntnisse bei ihm glaubten voraussetzen zu dürfen. Dass Habrecht dabei seine eigenen praktischen Erfahrungen mit verwerthet haben wird, ist zu natürlich, als dass man das in Abrede stellen dürfte. Dafür aber, dass die Idee und die allgemeinen Principien des Mechanismus nicht von Dasypodius herrühren könnten, muss der Beweis erst noch erbracht werden.

Dürfen nun die vorstehenden Ausführungen einigen Anspruch auf Wahrscheinlichkeit erheben, so sind wir auch berechtigt zu fragen, woher Dasypodius seine technischen Kenntnisse hatte. Schon in der Mitte des 16. Jahrhunderts waren freilich Räderuhrwerke mit Schlagwerken nichts Seltenes. Wir würden uns darauf beschränken müssen, in derartigen Vorrichtungen das Material zu sehen, aus dem Dasypodius seine Kenntnisse der Mechanik gewonnen hätte, wenn er nicht selber in seiner lateinischen Beschreibung der Uhr, seinem Heron mechanicus — an sich schon sehr bezeichnend! — sich wiederholt auf antike Mechaniker beriefe. Die eine Vorrichtung erklärt er, der antiken *γνωμονική* (gnomoniké, Zeigervorrichtungen)[1],

1) Vgl. Procl. in I. Eucl. elem. ed. Friedl. 41, 25 *ἡ γνωμονικὴ περὶ τὴν ὡρῶν καταμέτρησιν ἀσχολουμένη διὰ τῆς τῶν γνωμόνων θέσεως* 'die Gnomonik, welche

eine andere der σφαιροποιΐα (sphairopoiïa)[1]), eine dritte der αὐτοματοποιητική (automatopoietiké, selbstthätige Bewegungsvorrichtungen) entnommen zu haben. Dass damit Herons Automatentheater (Περὶ αὐτοματοποιητικῆς) gemeint sind, dürfte nach unseren früheren Ausführungen niemand ernstlich in Zweifel ziehen. Auf Heron weisen schliesslich auch in der 'Warhafft. Ausleg.' S. 1 die Worte hin: 'Zu dem so hat Heron Alexandrinus das redderwerck, die gewicht, mass und was dergleichen, also beschriben, auch in das werck gericht an uhren, an anderen dergleichen wercken, das solches handtwerck der gar alten[2]) eins ist, und nicht newlich erfunden'.

Was konnte nun Dasypodius aus Heron für seine Zwecke lernen?

Bei seinen Automatentheatern, sowohl dem fahrenden als dem stehenden (vgl. Heron. op. I, 347, 21. 357 = S. 245. 248 Thév.) spricht Heron vielfach von Gegengewichten, welche sich in einem senkrecht auf einem Unterbau stehenden, kastenartigen Behälter befanden, ähnlich wie bei der astronomischen Uhr. Bezüglich der Schnüre erscheint beachtenswert, dass Heron in der Beschreibung der Automatentheater (Heron. op. I, 345, 23 = S. 245 Thévenot, s. oben S. 183) ausdrücklich betont, man solle keine Schnüre aus Sehnen nehmen, weil sie sich je nach der Veränderung der Luft zusammenzögen oder dehnten. Diese Vorschrift hat Dasypodius beachtet, denn nach Frischlin waren die nicht mehr vorhandenen Schnüre aus Hanf[3]). Ferner sind Heron Zahnräder geläufig, z. B. in der Pneumatik bei der sich selbst regulirenden Lampe (Heron. op. I, 162 = S. 197 Thév.) oder beim stehenden

---

sich mit der Stundenmessung mit Hilfe Einsetzens der Zeiger (an der Sonnenuhr) beschäftigt'.

1) Bei der Himmelskugel beruft sich Dasypodius auf Archimedes. Vgl. Procl. ibid. 41, 16 ἡ σφαιροποιΐα κατὰ μίμησιν τῶν οὐρανίων περιφορῶν, οἵαν καὶ Ἀρχιμήδης ἐπραγματεύσατο 'die Kunst, Himmelsgloben zur Nachahmung des Umlaufs der Gestirne herzustellen, eine Kunst, welche schon Archimedes ausübte' und Papp. collect. 1026, 9—11 ed. F. Hultsch, Κάρπος δὲ πού φησιν ὁ Ἀντιοχεὺς Ἀρχιμήδη τὸν Συρακόσιον ἓν μόνον βιβλίον συντεταχέναι μηχανικὸν τὸ κατὰ τὴν σφαιροποιΐαν 'Kárpos aus Antiochia aber sagt irgendwo, Archimedes aus Syrakus habe nur ein Buch über Mechanik verfasst, nämlich das, welches von der Anfertigung von Himmelsgloben handelt' und dazu den Aufsatz von F. Hultsch *Ueber den Himmelsglobus des Archimedes*. Ztschr. f. Math. u. Phys. Hist. lit. Abth. XXII, 1877, S. 106 f.

2) Vgl. noch *Warhafft. Ausleg.* Vorrede: 'Aber ob unsere Handtwercks leüt so künstlich seyen als der Heron, Archimedes und andere, das ist gar nicht zuzugeben.'

3) Es ist übrigens die Bemerkung von S. Günther *Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterthum*, S. 265, Anm. 6 über Herons Kenntniss der erwähnten hygrometrischen Thatsache dahin zu vervollständigen, dass Philon Mech. Synt. IV, 72, 20 ed. R. Schöne, bereits die Einwirkung der Luftveränderung auf die Thiersehnen gekannt hat.

Automaten ein Sternrad zur automatischen Bewegung eines hämmernden oder zimmernden Armes (Her. op. I, 422 = S. 265. 266 Thév.). Wichtig ist besonders die mehrmalige Anwendung der mechanischen Uebersetzung, von denen ein Beispiel in Herons Automatentheatern (Heron, op. I, 398 = S. 291 Thév.), drei andere in dessen Dioptra S. 306—316, 330—334 ed. Vinc. bezw. Papp. collect. VIII, 1060—1068 ed. Hultsch vorkommen, die letzteren drei bei Zahnrädern.[1]) Dioptra, Cap. 35 (316 Vinc.) beschreibt einen selbstthätigen Distanzmesser[2]) für Schiffe. Ein Flügelrad setzt eine Schraube ohne Ende in Drehung, diese eine gezahnte Welle (Rad) mit daran befestigtem gezahntem Triebrad für eine zweite derartige Welle. Das mit dieser verbundene Getriebe setzt wieder eine dritte gezahnte Welle mit gezahntem Triebrad in Bewegung und letzteres eine vierte gezahnte Welle mit äusserer Zeigervorrichtung. Das erste Zahnrad hat 81 Zähne, das damit verbundene Triebrad 9, das zweite Zahnrad 100 Zähne und sein Getriebe 18, das dritte 72 Zähne mit Getriebe von 18 Zähnen, das vierte 100 Zähne. Eine Umdrehung des vierten Zahnrades mit dem Zeiger ergiebt also $\frac{100}{18} \cdot \frac{72}{18} \cdot \frac{100}{9} \cdot 81 = 20\,000$ Umdrehungen des Flügelrades oder, da dieses mit einer Umdrehung 5 Schritte zurücklegt, 100 000 Schritte. Das äussere Zifferblatt mit dem Zeiger, welches in 100 Grade geteilt war, zeigte also mit jedem Grade eine Entfernung von 1000 Schritten oder einer römischen Meile an[3]). Ein anderes Beispiel bildet der Barulkos (Hebewinde, Dioptra, Cap. 37 = Mechanik I, 1), welcher mit Hilfe von Zahnräderübersetzungen ein Gewicht von beispielsweise 1000 Talenten unter Aufwendung einer Kraft von nur 5 Talenten hebt. Die Uebersetzung wird in diesem Falle nicht nach der Zahl der Zähne, sondern nach dem Verhältniss der Durchmesser[4]) berechnet, von denen der des Getriebes bis auf das letzte immer fünfmal kleiner ist als der mit ihm verbundenen gezahnten Welle. Für die Berechnung wird das Hebelgesetz zu Grunde gelegt. Da die zu bewegende Last 1000 Talente beträgt, so ergiebt sich für die Kraft[5]) x_1, welche an der ersten

1) Auch in der S. 168, 1 erwähnten Heronischen Mechanik findet sich die Zahnräderübersetzung ausführlich erläutert. Indessen kannte Dasypodius natürlich Herons Mechanik nicht, mit Ausnahme der auch griechisch überlieferten Abschnitte.

2) Der Distanzmesser Herons erinnert in seiner Einrichtung sehr an den Woltemann'schen Strommesser.

3) Es wird dabei natürlich die Stärke des Stromes überall als gleichmässig vorausgesetzt.

4) Die Zähne der ineinander greifenden Wellen und Getriebe stehen natürlich in gleichem Verhältnisse, wie ihre Durchmesser.

5) Es bezeichnen x_2, x_3, x_4 die Kräfte, welche an den anderen Zahnrädern angreifen.

gezahnten Welle angreift, das statische Moment $5x_1 = 1000$, weil $x_1 : 1000 = 1 : 5$, oder $x_1 = 200$; entsprechend für die zweite Uebersetzung $x_2 : 200 = 1 : 5$ oder $x_2 = 40$, für die dritte $5x_3 = 1 \cdot 40$ oder $x_3 = 8$. Für die vierte und letzte Uebersetzung ist das Verhältniss der Durchmesser aber $8 : 5$ [1]). Daraus folgt die Gleichung $8x_4 = 8 \cdot 5$ oder $x_4 = 5$. Und damit ist bewiesen, dass bei der erwähnten vierfachen Uebersetzung in den angegebenen Verhältnissen eine Kraft von 5 Talenten einer Last von 1000 Talenten das Gleichgewicht hält und dass es nur noch eines kleinen Ueberschusses von Kraft bedarf, um die Reibung zu überwinden und die Last emporzuziehen.

Wir erinnern uns jetzt, dass Dasypodius bei der astronomischen Uhr Räderübersetzungen in ausgiebigem Masse verwandt hat, mit Zahnrädern von ungleicher Zahnzahl und Wellen und Getrieben von ungleichen Durchmessern, und verwenden musste. Denn er hatte Umdrehungen von ungleicher Dauer (Viertelstunden, Stunde, Tag, Woche, Jahr, von 2, 12, 30 und 100 Jahren) auszuführen, und die Räderübersetzung dient ja nicht bloss zum Heben von Lasten, sondern ist auch geeignet, eine Achsendrehung zu beschleunigen oder zu verlangsamen, wie man aus dem ersten Heronischen Beispiele erkennen kann. Nun sind freilich Räderübersetzungen schon im Mittelalter, z. B. im Anfange des 15. Jahrhunderts, wahrscheinlich auch schon im 14. Jahrhundert, praktisch angewendet[2]). Aber ich fürchte, dass die mittelalterlichen Vorrichtungen lediglich auf praktischen Versuchen beruhen, dass also z. B. das gegenseitige Verhältniss der Durchmesser bei einer Räderübersetzung oder die Schwere des Gegengewichts nicht durch Berechnung[3]) gefunden wurde, wie das sicher für die grossen Dimensionen der Strassburger astronomischen Uhr erforderlich war. Das war für jene Zeit nicht gut möglich, weil man nicht wusste, dass das Hebelgesetz auch auf das Wellrad Anwendung finde. Die Kenntniss dieser Thatsache, welche von Heron im Anschluss an Archimedes mit Bewusstsein verwertet wird[4]), scheint im Mittelalter verloren gegangen zu sein, und erst Ubaldo del Monte, Galileis Lehrer, hat die erwähnte Thatsache 1577 wieder ans Licht gestellt, als er die einfachen Maschinen auf den Hebel zurück-

1) In Herons Mechanik I, 1 ist dieses Verhältniss 2 : 1. Danach ist $2x_4 = 8$ oder $x_4 = 4$, und es bleibt ein Ueberschuss von einem Talente, der zur Ueberwindung der Reibung dient.

2) Vgl. Th. Beck *Historische Notizen* XIII, Tafel XXI. XXII im *„Civilingenieur“* Bd. XXXVIII, Heft 8.

3) Eine Berechnung nach der Zahl der Zähne findet sich bei Cardanus *de rerum varietate* (1557) S. 636—643 und *de subtilitate* (1560) S. 43. Ueber die Beziehungen des Cardanus zu Heron s. unten S. 210 Anm. 1.

4) Vgl. ausser Herons Mechanik (Bd. II der neuen Heronausgabe) auch Herons Autom. (Heron, op. I, 399, 21).

führte.[1]) Wir sehen also, dass Dasypodius für die Mechanik seiner Uhr aus Herons Schriften etwas Wichtiges lernen konnte.

Schliesslich sei darauf hingewiesen, dass die Uhr des Dasypodius mehrere Kreisringe verwendete, darunter einen mit den Figuren der vier Lebensalter. Einen solchen drehbaren Ring mit Figuren (Bacchantinnen), die sich im Kreise um den Tempel des Dionysos drehen, hat auch Heron bei seinem fahrenden Automatentheater. Ob Dasypodius sich hier an Heron anlehnt, kann indessen bezweifelt werden, da eine ähnliche Vorrichtung sich schon in der ältesten Münsteruhr aus dem Jahre 1352 befand, nämlich 'ein rad, auff welchem die drey Kônig stunden'. Von dem Ringe für jene vier Figuren ist nichts mehr erhalten. Auch ist unbekannt, wie er in Drehung versetzt wurde.

Das sind im wesentlichen die Beziehungen, welche das Werk des Dasypodius zu Heron, wenn nicht hat, so doch haben könnte. Beriefe sich Dasypodius nicht selber auf Heron, so würde es kaum jemand wagen, einen antiken Mechaniker mit der berühmten Strassburger astronomischen Münsteruhr in Verbindung zu bringen. So aber glaubten wir, dazu berechtigt zu sein.

1) Vgl. Heller *Geschichte der Physik* I, 389.

HERON VON ALEXANDRIA

IM 17. JAHRHUNDERT.

VON

WILHELM SCHMIDT.

Es ist ausser Frage, dass das Studium der Schriften der Alten den ersten Impuls zur neueren Naturforschung gegeben hat.

Poggendorff.

Schon zur Zeit der Renaissance übten die physikalischen Schriften Herons von Alexandria auf die Gelehrten keinen geringen Reiz aus. Das beweist die fast unübersehbare Zahl griechischer Handschriften, welche wir z. B. von der Pneumatik haben.[1]) Man hat daher sicher im Jahre 1575[2]) das Erscheinen von Commandinis lateinischer Uebersetzung mit Freuden begrüsst. Und das lebhafte Interesse für die Heronische Pneumatik giebt sich nicht nur in den wiederholten Auflagen dieser lateinischen Bearbeitung (1583, 1680) kund, sondern auch in dem Erscheinen einer Anzahl italienischer Uebersetzungen (Aleotti 1589,[3]) 1647; Giorgi 1592, 1595), dem sich 1688 kurz vor der einzigen Veröffentlichung des griechischen Textes (1693) eine deutsche, ebenso wie meist die italienischen von Commandini abhängige Uebersetzung des Agathus Cario[4]) anschloss. (Vergl. Heron. op. I, Einleitung.)

Zu einer Schrift über Druck- und Saugwerke wurde durch Heron im Anfange des 17. Jahrhunderts Giambattista della Porta angeregt. Ihr Titel lautet: *Pneumaticorum libri tres.* Neapoli 1601. Das Werk wurde 1606 von einem Spanier, Juan Escrivano, einem Schüler Portas, ins Italienische übersetzt und mit Zusätzen Portas versehen ('vi ho aggiunto di più tutte quelle cose che ho inteso a bocca da V. S.'). Portas Pneumatik ist nicht etwa eine Uebersetzung der Heronischen Pneumatik, wie man

1) S. das Nähere Heron. op. I § 2. (Das Erscheinen der neuen griechisch-deutschen Heronausgabe der Bibliotheca Teubneriana steht bevor.)

2) Einzelne Capitel Herons waren 1501 von Georg Valla in eignem Namen lateinisch veröffentlicht.

3) Mit einigen selbsterfundenen, aber sich im Princip an Heron anlehnenden Wasserkünsten.

4) Im Anhange 'Von allerhand Mühl-, Wasser- und Grottenwercken aus Salomon de Cous'. Dieser Anhang hat anscheinend S. Günther *Abriss der Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Alterthum* S. 265, Anm. 7 zu dem Irrthume verleitet, dass S. de Caus († 1630) Heron 1688 ins Deutsche übersetzt habe. (Nach Jöcher ist A. Cario Pseudonym für den Württemberger Tobias Nislen.)

irrthümlich[1]) gemeint hat, sondern ein selbständiges Werk, welches freilich auf Heron, nicht ohne eine Reihe kritisirender Bemerkungen, zurückgeht. Die letzteren sind nicht überall zutreffend, wenngleich sie im Laufe des 17. Jahrhunderts vielfach nachgesprochen sind. Escrivano meint, dass Porta erst der Pneumatik Norm und Methode gegeben habe, nachdem man bis dahin, seiner Auffassung nach mit Unrecht, Heron aus Alexandria auf diesem Gebiete für massgebend erachtet habe (Herone tenuto insino ad hora principalissimo in questa materia).

Einzelne Heronische Experimente führt 1617 der bereits früher erwähnte Robert Fludd vor (*Utriusque Cosmi historia* Oppenheim I. Macrocosmus). Herons gedenkt auch Kaspar Ens in seinem '*Thaumaturgus mathematicus.* Coloniae. 1636' S. 205. Es finden sich aber nur wenig Druckwerke bei ihm, die zu Heronischen in Beziehung stehen. Nach Schott (s. unten S. 199) S. 12 hat Ens eine Arbeit des Jesuitenpaters Leurechon benutzt, der 1624 anonym eine '*Récréation mathématique*'[2]) geschrieben hatte.

Da die Heronischen Druckwerke zum grossen Theile in das Gebiet der unterhaltenden Physik fallen, so konnte auch der Jesuit Daniel Schwenter, Professor der Mathematik und orientalischen Sprachen in Altorf, 1636 manche in seinen '*Deliciae physico-mathematicae oder mathematischen und philosophischen Erquickstunden*' verwerten, die freilich erst nach dessen Tode erschienen sind und theilweise auch auf Leurechon zurückgehen sollen. Dies wird also der 'französische Author' sein, den Schwenter wiederholt erwähnt. Auch der zweite Teil dieses Werkes, 1651 'zusammengetragen durch Georg Philip Harsdörffern' aus Nürnberg, bringt einzelnes aus Herons Pneumatik.

Nicht minder interessirte sich Athanasius Kircher, Jesuit und Professor der Mathematik und orientalischen Sprachen in Würzburg und später am Collegio Romano, noch heute allgemein bekannt durch das 'Museo Kircheriano', für Heron. Er führt an mehreren Stellen Heronische Vorrichtungen in seinem grossen Sammelwerke '*Oedipus Aegyptiacus.* Romae 1643' an, indem er zuweilen kritische Bemerkungen daran knüpft. Was Kircher in seinem Werke '*de arte magnetica.* Romae 1654' S. 419—430 von hydraulischen Maschinen anführt, ist wohl auch zum grossen Theile durch Heron beeinflusst.

Wir nennen ferner den Minoritenpater Marin Mersenne, Descartes'

---

1) In diesem Irrthume befinden sich z. B. Martin *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie.* Paris 1854. S. 44 und A. de Rochas *La science des philosophes et l'art des thaumaturges dans l'antiquité.* Paris 1882 S. 81. Ebenso S. Günther a. a. O.

2) Diese Schrift stand mir nicht zur Verfügung.

vertrauten Freund, der in den '*Cogitata physico-mathematica.* Parisiis 1644', z. B. in dem darin enthaltenen '*Tractatus mechanicus*' Herons Barulkos (Hebewinde mit Räderübersetzung) unter Beifügung einer Zeichnung behandelt. In den '*Hydraulica pneumatica*', wo man besonders Bezugnahme auf Heron erwarten könnte, wird Herons allerdings kaum gedacht.

Eingehender beschäftigt sich mit Heron ein drittes Mitglied der Gesellschaft Jesu, Kaspar Schott, Professor der Mathematik und Physik in Würzburg, Kirchers und Guerickes Freund, in seiner 1657 erschienenen '*Mechanica hydraulico-pneumatica.*' Schott behauptet S. 51, dass er lange nach einer griechischen Heronhandschrift gesucht habe, aber vergeblich. Das scheint uns kaum glaublich, da in Italien überall griechische Heronhandschriften waren und sind. Schott begnügt sich daher wie auch alle anderen mit Commandinis Uebersetzung und glaubt, dabei mehrere angebliche Irrthümer Herons auf Commandinis Rechnung setzen zu sollen.

Auch Salomon de Caus, dem die Franzosen die Erfindung der Dampfmaschine zuschreiben wollen (vgl. Poggendorff *Geschichte der Physik* S. 446 f.), hat sich anscheinend, wenn auch in geringerem Umfange mit Heron befasst.[1]) Da Caus als Ingenieur und Baumeister in Diensten des Kurfürsten von der Pfalz stand und für diesen die Anlage von allerlei Grotten und Wasserkünsten geleitet hat, so hat er vielleicht auch in dieser Hinsicht von Heron Anregungen empfangen und nicht bloss hinsichtlich der Dampfmaschine, obgleich sich aus dem 'Hortus Palatinus'[2]) im einzelnen nichts nachweisen lässt.

Es ist bemerkenswerth, dass gerade zu Anfang des 17. Jahrhunderts die Wasserkünste in fürstlichen Gärten eine grosse Rolle spielen, nicht bloss in Heidelberg, sondern z. B. auch in Tivoli. Und wer kennte nicht die noch vorhandenen Wasserkünste der von Giacomo della Porta erbauten Villa Aldobrandini oberhalb Frascati, Wasserkünste, welche um 1603 Giovanni Fontana zum Ergötzen der Mit- und Nachwelt geschaffen hat? Es ist nicht unwahrscheinlich, dass auch hierzu in letzter Instanz Heron die Anregung gegeben hat.

Unter den Männern der Wissenschaft beschäftigte Porta und Schott zunächst die Lehre vom Vacuum, welche Heron (1. Jahrh. n. Chr.) nach-

---

1) Sein Werk ist betitelt: *Les raisons des forces mouvantes avec diverses machines tant utiles que plaisantes.* Frankfurt 1615. Mir lag leider nicht das ganze Werk, sondern nur einige Auszüge daraus vor.

2) *Hortus Palatinus* a Friderico Rege Boemiae Electore Palatino Heidelbergae exstructus Salomone de Caus architecto 1620. Francofurti. De Rochas weist a. a. O. S. 158 auf eine Vorrichtung des de Caus hin, welche eine Bewegung des Wassers durch die Sonnenwärme herbeiführt, ähnlich wie bei Herons Thermoskop.

weislich (vgl. H. Diels *Ueber das physikalische System des Straton.* Sitzgsber. d. kgl. Acad. d. Wiss. Berlin 1893 S. 110) dem Peripatetiker Straton aus Lampsakos (3. Jahrh. v. Chr.), dem Physiker κατ' ἐξοχήν, entlehnt hat. Heron nimmt danach mit letzterem ein feinvertheiltes Vacuum mit ebenso feinvertheilten Molekülen an im Gegensatz zu Aristoteles, der jedes Vacuum gegenüber Demokrit geleugnet hatte. Die entsprechenden Ausführungen nehmen bei Heron einen breiten Raum ein (Heron. op. I, 1—29 = S. 145 —152 Thévenot). Hervorzuheben dürfte daraus sein, dass Heron (a. a. O. I, 16—19 = S. 149 Th.) bezw. sein Gewährsmann Straton zum Beweise für das Vorhandensein des Vacuums ein mit peinlicher Vorsicht unternommenes Experiment vorführt. Danach wird man die landläufige Meinung (s. Poggendorff *Gesch. d. Phys.* S. 10), dass das Experiment den Alten 'so gut wie gänzlich unbekannt war', doch etwas einschränken müssen. Von Herons Argumenten für das Vacuum tadelt Porta besonders, dass nach Heron beim Mischen von Wein und Wasser (a. a. O. I, 27, 15. 16 = S. 152 Th.) der Wein in die Vacua des Wassers treten solle. Das sei nicht richtig, weil die Flüssigkeit ums Doppelte steige, wenn man z. B. eine gleiche Quantität Wein und Wasser mische (Porta Pneum. I 6 S. 8). Ebensowenig gefällt Porta Herons Beweis von dem Durchgange des Lichtes durchs Wasser (I, 27, 7—14). Porta (S. 9) leugnet aber nicht etwa das Vacuum, sondern erkennt es nur unter gewissen Bedingungen an.

An Herons Heber (Pneum. I, 1 S. 29 = S. 152 Th.) konnten Porta (I, 12 S. 19. 20), Schott S. 93, Schwenter S. 479 und Ens S. 77 natürlich nichts aussetzen, da Heron sehr wohl bekannt ist, dass die äussere Hebermündung tiefer liegen muss als der innere Flüssigkeitsspiegel. Dass Heron, Porta und Schwenter das Steigen der Flüssigkeit auf den horror vacui zurückführen, wird niemand wunder nehmen, wohl aber, dass Schott noch nichts von Torricelli, dessen bekannter Versuch ins Jahr 1643 fällt, über den Luftdruck gelernt hat. Daher glaubte Porta (und mit ihm Schwenter, Mersenne und Schott) mittels einer besonderen Vorrichtung das Wasser 'aus tiefen Thälern über die höchsten Berge' leiten zu können, ein Irrthum, in dem sich auch Leonardo da Vinci befand (vgl. Beck *Historische Notizen* S. A. aus dem *Civilingenieur* XXXIX, 8. Heft S. 16 f.). Aber Schott hätte schon klüger sein können. Zwar erklärt Porta bezeichnenderweise, dass die Sache um so schwieriger sei, als die Alten sich nicht darüber geäussert hätten (tanto id difficilius erit, quanto minus de his a maioribus nostris (Escrivano: dagli antichi) sit traditum). Und dennoch trotz eines verächtlichen Seitenblicks auf Heron, der überhaupt nicht helfen könne (S. 44: 'extat Heronis illud quod retulimus et falsum indicavimus') hat Portas Vorrichtung eine unverkennbare Aehnlichkeit mit Heron. Pneum. I, 31

S. 145 (s. unten Taf. 2, Fig. 1), nur dass Porta das trinkende Thier, welches im Innern eine Hebervorrichtung mit einem trichterförmigen Eingusse enthält, mit dem Berge vertauscht hat und dass dementsprechend bei Heron die Vorrichtung functionirt und bei Porta nicht. Auch darin polemisirt Porta gegen Heron (Pneum. I, 2 S. 37, 16) nicht glücklich, dass er leugnet, dass ein oben in einen Heber gebohrtes Loch die Flüssigkeit auseinander reissen könne (Porta II, 13. 14).

Dass nach Heron. Pneum. I, 2 S. 33, 25 die Flüssigkeit im Zustande der Ruhe eine kugelförmige Oberfläche bilde, welche mit der Erde gleichen Mittelpunkt hat, wie auch Archimedes in seiner Hydrostatik (*Περὶ ὀχουμένων* Kap. 2 'Ueber die schwimmenden Körper') und schon früher Aristoteles de coelo B 287^{b}, 13 lehrt, findet Schotts (S. 68. 88) Billigung. Auch Porta Pneum. I. 9 S. 14 scheint dieser Auffassung zuzustimmen.

In Bezug auf die communicirenden Gefässe (Heron I, 2 S. 35 = S. 54 Th.) stimmt Schott S. 75 mit Heron überein.

Ein besonderes Interesse hatte für die damalige Zeit auch der Kapsel- oder Glockenheber (Pniktós diabétes 'versteckter Heber', Her. I, 3 S. 41 = S. 156 Th.), schon von Philon (3. Jahrh. v. Chr.) als 'canalis latens' in seiner Pneumatik (Her. I, 480) erwähnt. Der innere Schenkel dieses Hebers (Fig. 2) wird durch einen Hohlraum gebildet, welcher sich zwischen der inneren und der umschliessenden Röhre befindet. Schott widmet ihm eine längere Beschreibung S. 95, auch Schwenter S. 498. Bekannt ist er auch Fludd Macrocosm. S. 202 und Kaspar Ens S. 55.

Dass die Heber, der gebogene und der Kapselheber, ohne Ansaugen von selbst zu fliessen beginnen, wenn die Flüssigkeit über ihren höchsten Punkt steigt (Her. I, 13 S. 83 = S. 167 Th.), weiss nicht nur Schwenter S. 499, sondern auch Schott S. 96. 183 und Ens S. 55. Schott fügt noch hinzu, dass dies in dem Garten eines Herrn Aynscombe in Antwerpen bei einem Springbrunnen zur Nachahmung von Ebbe und Flut benutzt worden sei.

Bekanntlich ist nach Torricelli (1641) die Ausflussgeschwindigkeit von der Druckhöhe abhängig. Will man daher eine stets gleichmässige Ausflussgeschwindigkeit erzielen, so muss man Vorkehrungen treffen, um die Druckhöhe constant zu erhalten. Ich brauche an Mariottes Gefäss nicht zu erinnern. Einem ähnlichen Zwecke dient die in Fig. 3 dargestellte Heronische Vorrichtung (Her. I, 4 S. 45 = S. 157 Th.), wo die constante Druckhöhe beim Ausflusse aus einem Heber durch einen mit der abnehmenden Flüssigkeit zugleich sinkenden Schwimmer herbeigeführt wird, eine Vorrichtung, an welcher Schott S. 97 nichts auszusetzen hat. Die erwähnte Einrichtung hat Heron in Fig. 4 noch dahin umgestaltet (Her. op. I, 5 S. 47

= S. 158 Th.), dass sich in jedem beliebigen Augenblicke die Druckhöhe ändern, d. h. vergrössern oder verringern und dadurch der Ausfluss beschleunigen oder verlangsamen lässt. Auch dies ist Schott (S. 98) aus Heron bekannt.

Heron beschreibt I, 6 S. 55 = S. 160 Th. eine Vorrichtung, welche es ermöglichen soll, einen Heber ohne Ansaugen durch ein luftdicht an die äussere Hebermündung gehaltenes, mit Wasser gefülltes Gefäss, das man sich entleeren lässt, zum Ausfluss zu bringen. Dies erklärt Porta II, 3 S. 37 für unmöglich, und Schott S. 38 spricht es ihm nach, (derselben Meinung ist de Rochas, a. a. O. S. 107. 108 Anm.) während ein von uns angestellter praktischer Versuch sehr wohl die Möglichkeit des von Heron beschriebenen Vorganges dargethan hat. Dabei hat sich auch gezeigt, dass es nicht erforderlich ist, was jene verlangen, dass das äussere überstehende Ende des Hebers länger als der innere Heberschenkel bis zum Wasserspiegel sei.

Das sogenannte Sieb der Vestalin (Her. I, 7 S. 57 = S. 161 Th.), (welches gewissermassen als Stechheber dient) nämlich eine am Boden durchlöcherte Hohlkugel mit einer Oeffnung oben, sei ein sehr geläufiges Kunststück, berichtet Schott S. 303. Das beweist auch die wiederholte Erwähnung bei Schwenter I, 494 und Harsdörffer II, 490. Hier lautet die gestellte Aufgabe 'Wasser in einem Siebe zu tragen'. Die Sache ist übrigens älter als Heron und findet sich schon bei Philon Cap. 11 und noch früher. Ebenso erregte das Interesse Schotts S. 315 und Harsdörffers S. 478 dieselbe Vorrichtung mit einer oder mehreren Scheidewänden und mehreren Luftlöchern, indem sie so geeignet war, verschiedene Arten von Flüssigkeiten aufzunehmen und nach Belieben ausfliessen zu lassen.

Die Zauberkanne (Her. I, 9 S. 67 = S. 162. 163 Th.), welche mit Hilfe eines einzigen im hohlen Henkel befindlichen Luftloches $\varkappa$ (Fig. 5) bald aus dem Raume über der Scheidewand $\gamma\delta$ Wasser, bald zusammen ein Gemisch des Wassers mit dem Weine aus $\gamma\beta\delta$, schliesslich reinen Wein ausfliessen lassen soll, hat zwar Harsdörffer S. 499 keinen Anstoss erregt, wird dagegen von Porta III, 4 S. 49 und Schott S. 318 als praktisch unmöglich bezeichnet, weil thatsächlich eine Vermischung von Wein und Wasser durch die siebartigen Löcher bei ε unvermeidlich ist. Vorausgesetzt, dass dieses Capitel dem Heron und nicht, wie jemand versucht sein könnte zu vermuthen, einem Interpolator angehört, kann Heron die Sache nicht praktisch ausgeführt haben. Er hätte sonst sehen müssen, dass unter den obwaltenden Umständen stets eine Mischung ausfliesst.

Eine Compressionspumpe ist bei Heron Pneum. I, 10 S. 75 beschrieben (Fig. 6, der Apparat ist eine Verbindung von Heronsball und

Compressionspumpe). Die Luft trat bei τ ein, indem der Kolbenstengel $\psi\omega$ noch etwas über τ zurückgezogen wurde, ohne indessen ganz herauszutreten. Der niedergehende Kolben drängte die Luft durch das sich nur nach innen öffnende Ventil in die Kugel. Im Princip steht der Apparat vielleicht Boyles Compressionspumpe nicht allzu fern (vgl. Poggendorff *Gesch. d. Phys.* S. 474), an eine Abhängigkeit des letzteren von Heron ist freilich nicht zu denken.

Auf Heron Pneum. I, 15 S. 89 = S. 169 Th. u. ä., wo infolge Wasserdrucks durch ausströmende Luft in der Pfeife bei $\varkappa$ ein Ton erzeugt wird (Fig. 7), geht auch Fludds ähnlicher Versuch im Macrocosmus S. 190 zurück.

Die Heronische Einrichtung Pneum. I, 16 S. 91 = S. 169. 170 Th., bestimmt, mittels Wasser- und Luftdrucks den Gesang von Vögeln hervorzurufen, die aber aufhören zu singen, wenn sich eine in der Nähe befindliche Eule (Fig. 8) zu ihnen hinwendet, hat ohne Zweifel zu einer ähnlichen Vorrichtung (des Salomon de Caus?) Anlass gegeben, wie sie bei Agathus Cario S. 50 des Anhangs beschrieben ist. Hier ist der Vorwurf 'eine lustige Machina, darauf etliche Vögel singen, wann sich ein Kautz zu ihnen wendet, und schweigen, wann er sich von ihnen wiederum abwendet'. Die Beschreibung beginnt mit den Worten: 'Dieses Werck ist von Herone Alexandrino vorgestellet worden, aber doch nicht so vieler Hand Vögel, wie allhier'. Porta (S. 58) meint bei dieser und ähnlichen Vorrichtungen Herons, dass sie nicht functionirten. Denn sei der Druck des einströmenden Wassers sehr stark, so treibe er ohne weiteres das Wasser wieder durch den Heber hinaus, sei er schwach, so würden die Pfeifen nicht ertönen.

Die „Krüge von Kana" benennt Schott S. 221, an das bekannte Wunder anknüpfend, die von Heron Pneum. I, 23 S. 117 = S. 176. 177 Th. beschriebenen Krüge (Fig. 9). Giesst man durch den Trichter τ Wasser in das Gefäss $\gamma\delta$, so treibt die darin enthaltene Luft, durch die Röhre $\mu\nu\xi o$ gedrängt, den im Gefässe $\varepsilon\zeta$ befindlichen Wein durch den Heber $\pi\varrho\sigma$ nach aussen. Die Forderung Schotts S. 221 Anm., dass $\tau\upsilon$ länger sein müsse als $\pi\varrho$, wenn der ganze Wein aus $\varepsilon\zeta$ auslaufen solle, hat übrigens Heron erfüllt, obwohl es vielleicht nicht nothwendig war.

Eine sehr einfache Vorrichtung, welche nach Heron Pneum. I, 32 S. 149 = 185 Th. an den Eingängen ägyptischer Tempel stand, ist das Weihbecken, welches nach Drehung des Rades Weihwasser spendete, sobald die Ausflussöffnung des Beckens mit den Löchern τ, π (Fig. 10) in dem beweglichen Rohre $\nu\xi$ und dem unbeweglichen $\lambda\mu$ correspondirten. Kircher Oedip. Aegypt. II, 336 und Schott S. 258 beschreiben den Apparat

ausführlich, jedoch hat Kircher, dem Schott folgt, die Abflussvorrichtung eher zum Nachtheil als zum Vortheil der Sache geändert.

Schwenter beschreibt S. 544 „ein Vass, darauss man drey unterschiedliche Getränck zäpffen kan, welche man durch einen einigen Spund fůllet und durch ein einige Rőhrn wider ausslauffen lässet". Diese Vorrichtung findet sich auch schon bei Bessonus *Theatr. instrum.* prop. XIX und Ens S. 143. Es ist wahrscheinlich, dass sie durch die allerdings praktischere Vorrichtung Herons Pneum. I, 33 S. 154 = S. 186. 187 Th. veranlasst ist, welche auch drei verschiedene Flüssigkeiten (in die Kammern μ, ν, ξ, Fig. 11) aufnimmt und gesondert, aber durch dasselbe Ausflussrohr $\gamma\beta$ ausfliessen lässt. Drei Kugeln von verschiedener Grösse, in den hohlen Kegelstumpf $\zeta\vartheta$ gelegt, dienen dazu $\gamma\beta$ so weit zu drehen, dass je nach der Flüssigkeit, die abgezapft werden soll, das correspondirende Loch unter die entsprechende Kammeröffnung zu liegen kommt. De Rochas erwähnt a. a. O. S. 141 Anm. 1, dass dieser verstellbare, dreifach durchbohrte Hahn wahrscheinlich Papin die Idee des bekannten Vierweghahnes eingegeben habe ('il a probablement inspiré à Papin l'idée du robinet à plusieurs fins proposé par cet ingénieur pour la machine à haute pression'). Indessen findet sich die doppelte Durchbohrung des Hahnes nach Poggendorff Gesch. d. Phys. S. 475 schon 1685 bei Wolferd Senguerd aus Leyden. Ob dieser wenigstens das Princip einer doppelten Durchbohrung aus Heron entnommen hat, ist aber schwer zu sagen, vielleicht sogar unwahrscheinlich. Denn im einzelnen weichen die Durchbohrungen sehr von einander ab.

Es scheint eine ziemlich verbreitete Meinung zu sein, dass die in den physikalischen Lehrbüchern erwähnten Heronsbrunnen und Heronsball in Herons Schriften gar nicht vorkämen.[1]) Das ist aber ein Irrthum. Beide Vorrichtungen finden sich in verschiedenen Formen. Um mit dem Heronsball zu beginnen, so zeigt Her. Pneum. II, 2, S. 213 = S. 196 Th., seine einfachste Form (Fig. 12). Man hält die oben spitz ausgezogene Röhre mit einem Finger zu, giesst seitwärts eine Flüssigkeit ins Gefäss, bläst hinein und verschliesst den Hahn. Lässt man dann den Finger los, so wird die Flüssigkeit durch den Druck der comprimirten Luft ausgespritzt. Diesen einfachen Heronsball beschreibt Schott S. 208 nach Heron. In Verbindung mit mehreren Figuren, von denen wir die eine mit einer Flöte, die andere mit einem verschliessbaren Schlauche ausgestattet sehen, ist Her. Pneum. II, 15, S. 243 = S. 205. 206 Th. ein Heronsball

1) Dieser Meinung sind z. B. Martin a. a. O. S. 46, M. Cantor, *Die römischen Agrimensoren*, Leipzig 1875, S. 18; Heller, *Gesch. d. Phys.*, S. 122 und S. Günther, *Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Altertum*, München 1894, S. 265.

beschrieben, ebenso zwecks automatischer Nachfüllung einer Lampe II, 23, S. 271 = S. 223 Th. Mit einer Compressionspumpe verbunden ist der Heronsball Pneum. I, 10 (s. oben S. 203 und Fig. 6). Auch die Feuerspritze (Heron. op. I, 28, S. 130—137 = S. 180—182 Th.) beruht ja auf dem Princip des Heronsballs (Taf. 3, Fig. 13).

Einen einfachen Heronsbrunnen dagegen, bei welchem die Luft durch den Druck einer Wassersäule comprimirt wird, zeigt Fig. 14 (Taf. 3) in Her. Pneum. I, 37, S. 170 = S. 190. 191 Th. In der Basis ist die obere Kammer $\alpha\delta$ durch das Loch ν, welches nach dem Eingiessen luftdicht verschlossen wird, mit Wasser gefüllt. Dann giesst man ins Becken Wasser, welches in die Kammer $\gamma\beta$ läuft und die hier befindliche Luft nach $\alpha\delta$ drängt. Durch ihren Druck wird darauf das Wasser von $\alpha\delta$ in die sehr enge Röhre $\varkappa\lambda\mu$ gepresst und zum Ausfluss gebracht. Einen zweiten Heronsbrunnen erkennen wir in Fig. 15 (Taf. 2, Her. Pneum. II, 22, S. 265 = S. 222 Th.). Die Basis des Kandelabers enthält in dem oberen Raume $\alpha\beta\varepsilon\zeta$ Wasser. Wird das Ventil unterhalb der Scheidewand geöffnet, so fliesst das Wasser nach $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und drängt die hier befindliche Luft durch die Röhre $\mu\nu$ nach dem Oelbehälter $\varkappa\lambda$. Hier drückt dann die comprimirte Luft das Oel in die Röhren $o\xi$ und π und von dort in das Bassin der Lampe. Diese beiden praktischen Verwendungen des Heronsbrunnens sind schon Porta Pneum. II, 5, S. 29. 30 bekannt, der dann im Anschluss an den Satyrbrunnen (Porta Pneum. III, 2, S. 45. 46) eine etwas complicirtere Einrichtung giebt und dabei erwähnt, dass die Vornehmen oft bei gastlichen Gelagen die Einrichtung des Heronsbrunnens benutzten, um wohlriechendes Wasser (unguentatas aquas) hervorsprudeln zu lassen, und dass andererseits Kranke in grosser Fieberhitze ihre Freude daran hätten, wenn sie sähen, wie Wasser damit ausgesprengt werde. Besonderes Interesse für den Heronsbrunnen zeigt Schott, der S. 108 den Satyrbrunnen[1]) (allerdings ohne die Figur des Satyrs), S. 50ff. die Lampe und S. 192 einen anderen, dem ersten ähnlichen Heronsbrunnen, schliesslich S. 194—200 noch einige besondere Arten erwähnt. Schwenter beschreibt S. 490 die Vorrichtung unter der Ueberschrift, 'dass man einen Wasserfaden von sich selbs hochspringend machen könne und ein Mass Wasser eine gantze Stund springe' und betont zum Schluss: 'Diese Erfindung ist sehr lustig bey einer Gasterey, dann man solches mit Wein füllen und ausslauffen lassen kan, welcher in der grösse eines Fadens mit lust anzuschawen seyn wird'. Auch Salomon de Caus und Athanasius Kircher führen nach

1) Die Figur mit dem Schlauche soll nach Heron ein junger Satyr sein, unsere Zeichnung giebt einen Silen. S. Her. op. I, 171 Anm.

Schotts Zeugniss den Heronsbrunnen nach Heron an, ebenso schon früher Cardanus *de subtilitate.*[1]) Porta und Schott verlangen beim Satyrbrunnen nicht ohne Grund, dass die Röhre $\eta\vartheta$, bezw. die Druckhöhe des eingegossenen Wassers (Fig. 14) länger sei als die Steighöhe des ausgespritzten Wassers $\varkappa\lambda\mu$; denn theoretisch ist zwar die Höhe des Wasserdrucks der Steighöhe gleich, in der Praxis muss sie aber wegen der zu überwindenden Reibung und des Luftwiderstandes grösser sein, als die Flüssigkeit emporgetrieben werden soll.[2]) Beim Kandelaber soll dementsprechend statt der blossen Ventilöffnung eine Röhre fast bis an den Boden $\gamma\delta$ führen und noch länger sein als die Röhre ξo. Indessen kann das Ventil so bleiben, wenn nur die Druckhöhe des Wassers die Steighöhe des Oels überwiegt.[3]) Da der griechische Text an einigen Stellen fehlerhaft und auch sonst Commandini's Uebersetzung nicht ganz correct ist,[4]) so machte diese Lampe schon im Ausgange des 16. Jahrhunderts einem Bekannten Galileis, Alvise Mocenigo, Schwierigkeiten. Galilei, von ihm um Auskunft gebeten, antwortet ihm am 11. Januar 1594 aus Padua in einem Schreiben,[5]) welches heute in der 'Biblioteca Ambrosiana' zu Mailand aufbewahrt wird. Galilei schreibt:

Dalle parole di V. S. Ecc.^ma e dalla fabbrica assai confusa posta da Herone al N. 7, vengo in cognizione quella essere la Lucerna, della quale Ella de-	Aus den Worten Eurer Excellenz und aus der sehr unklaren Einrichtung, welche Heron zu N. 7[6]) giebt, erkenne ich, dass das die Lampe ist, deren Construction Sie wünschen; doch habe ich sie mehrere

1) Hieronymi Cardani Mediolanensis medici *de subtilitate* libri XXI. Basileae 1560. S. 39: 'Machina Heronis' = Heronsbrunnen.

2) Die Figur, welche sich an Heron's handschriftliche Figur anlehnt, hätte das besser gleich in der Zeichnung zum Ausdruck bringen sollen. Es hindert uns übrigens nichts, uns die Lage des Schlauches etwas tiefer, etwa unterhalb der Brust, zu denken. Dann functionirt der Apparat vortrefflich, wie eine praktische Ausführung uns wiederholt gezeigt hat.

3) In der nach den Handschriften reconstruirten Figur ist das freilich nur zu Anfang der Fall. Um das ganze Oel durch den Wasserdruck zum Ausfluss zu bringen, müsste eine kleine Aenderung in einigen Dimensionen vorgenommen werden.

4) Dass Commandini fälschlich 'Docht' (*ἐλλύχνιον* ellýchnion) statt 'Lampe' (*λύχνος* lýchnos) übersetzt, hat Schott richtig erkannt, Porta aber übersehen. Denselben Fehler hat ferner Galilei mit Commandini gemein, so dass es scheint, als ob auch Galilei keine griechische Handschrift eingesehen habe. Wenn wir hier die Beziehungen Galilei's, der ja doch vorwiegend auch dem 17. Jahrhundert angehört, zu Heron etwas ausführlicher erörtern, als es vielleicht dem Thema angemessen erscheinen könnte, so befürchten wir dennoch keinen Tadel.

5) Abgedruckt bei Venturi *Memorie e lettere inedite finora o disperse di Galileo Galilei.* Modena 1818. S. 12.

6) Worauf diese Nummer sich bezieht, ist nicht bekannt, vermuthlich auf Mocenigos Brief.

sidera la costruzione; però l'ho più volte letta e finalmente non so dalle sue parole trarne tal senso, che non mi resti qualche confusione. Ma non volendo interamente obbligarci a tutte le sue parole, mi pare che voglia inferire una fabbrica simile all' infrascritta.

Male gelesen und weiss schliesslich (doch) nicht aus seinen (Herons) Worten einen solchen Sinn zu entnehmen, dass mir keine Unklarheit bliebe. Aber ohne uns gänzlich an alle seine Worte binden zu wollen, scheint es mir, dass er eine ähnliche Vorrichtung einführen will wie die unten beschriebene.

Darauf giebt Galilei eine Beschreibung des Leuchters in einer freien, von Commandini abweichenden lateinischen Fassung, welche in den Bemerkungen zu den Figuren von Band I der neuen Heronausgabe wieder zum Abdruck kommen wird. Die von Galilei gegebene Beschreibung und Figur trifft im wesentlichen das Richtige. Man kann sogar im einzelnen für den griechischen Text (s. Heron. op. I Einleit.) noch eine Verbesserung daraus entnehmen. Galilei schliesst seinen Brief mit den Worten:

Questo è quanto per ora mi par di poter raccorre dalle parole d'Herone, come ho detto di sopra, assai confuse: e l'ho voluto mandare a V. S. Ecc.^{ma}, acciocchè avvertito dal suo giudizio possa con altra occasione cavarne forse miglior costrutto; ancorchè la fabbrica esplicata eseguisce quanto promette la proposta.

Das ist was man für jetzt mir scheint aus den Worten Herons erschliessen zu können, die, wie ich oben gesagt habe, sehr unklar sind. Und ich habe es Eurer Excellenz übersenden wollen, damit Sie, von Ihrem eigenen Urtheile unterwiesen, bei anderer Gelegenheit vielleicht eine bessere Einrichtung daraus ableiten können, obschon die beschriebene Vorrichtung leistet, was sie in Aussicht stellt.

Wir möchten wünschen, dass der Text in der neuen Bearbeitung, wenngleich er nicht tadellos ist, doch nicht mehr so viel Schwierigkeiten biete wie damals.

Heftigen Widerspruch hat Herons saugender Glascylinder Pneum. II, 14, S. 239 ff. = S. 204. 205 Th.[1]) erfahren, zuerst von Porta, dann von Schott und in neuerer Zeit von de Rochas. In Heron's Vorrichtung (Fig. 16), welche im Grunde einen unterbrochenen Heber darstellt, sind die Räume $\alpha\delta$, $\gamma\beta$, $\varepsilon\zeta$ gleich gross; $\alpha\delta$ wird durch μ mit Wasser gefüllt, $\gamma\beta$ durch die Röhre ξo, welche bis dicht an den Boden von $\gamma\beta$ reicht. Oeffnet man die Ausflussröhre ν, so fliesst des Wasser aus $\gamma\beta$ ab, die

1) Heron's Thermoskop Pneum. II, 8 haben wir oben S. 171 erörtert. Ich trage hier nur nach, dass Fludd sein Thermoskop bereits zweimal im Macrocosmus S. 31 und 204 ohne Gradeintheilung beschreibt.

Luft aus $\varepsilon\zeta$ wandert nach $\gamma\beta$, und aus $\alpha\delta$ steigt die Flüssigkeit nach $\varepsilon\zeta$. So ist Herons Meinung. Porta dagegen behauptet S. 25, dass die horizontale Ausflussröhre ν durch eine verticale ersetzt werden müsse, welche so viel nach unten überrage, dass der Ueberstand gleich $\varkappa\lambda$ sei. Auch Schott meint S. 37, dass nur wenig Wasser aus $\alpha\delta$ aufsteigen werde, wenn man nicht nach Porta die Sache ändere. Schliesslich stellt de Rochas S. 165, Anm. 2, eine Gleichung auf, durch welche er zu beweisen sucht, dass der Ausfluss ν als verticale Röhre so lang sein müsse, als die Höhe zwischen der Scheidewand der Basis und dem Niveau der Flüssigkeit in dem Glascylinder am Ende der Operation, wenn die in $\beta\gamma$ enthaltene Flüssigkeit völlig ausfliessen solle. Ob die erwähnten Ausstellungen berechtigt sind, liesse sich am besten experimentell darthun; leider waren wir selbst nicht in der Lage, das Experiment auszuführen. Wir haben aber einige Zweifel an der Berechtigung der erwähnten Forderungen.

Poggendorff schreibt in seiner Geschichte der Physik S. 530: 'Besonders haben die Werke des Hero dazu beigetragen, die Kenntniss von der Spannkraft des Wasserdampfes zu erhalten und zu verbreiten'. Das ist zweifellos richtig. Aber schon die Ausdehnbarkeit der Luft zog die Aufmerksamkeit der Physiker auf sich. Sie soll uns daher zunächst beschäftigen. So wird von Heron Pneum. I, 38, S. 174—179 = S. 191, 192 Th. eine Vorrichtung beschrieben, bei der durch den Druck erwärmter Luft aus einer geschlossenen Kugel Wasser in ein Gefäss $\nu\xi$ (Fig. 17) gedrängt wird. Das Gefäss erlangt in Folge der dadurch vermehrten Schwere das Uebergewicht, sinkt, dreht die nach unten verlängerten Thürangeln oder Drehpfosten einer Tempelthür und öffnet die beiden Thürflügel. Erlischt das Feuer und zieht sich die Luft in der Kugel und dem Altar wieder zusammen, so fliesst das Wasser aus dem Gefässe $\nu\xi$ zurück, dieses hebt sich, die Angeln drehen sich nach der entgegengesetzten Richtung, und die Thüren werden geschlossen. Diese Vorrichtung benutzt Fludd 1617 in seinem Macrocosmus S. 32, um zu beweisen, dass beim Mangel des feurigen Elementes (absentiā igneae naturae) alle Dinge in ihren früheren Zustand zurückkehren, und ebendort S. 203 zum Beweise, dass die durch die Wärme verdünnte Luft Wasser aus dem Innern der Erde auf ihre Oberfläche treiben könne. Beide Male bezieht sich Fludd auf Heron und zwar nach Commandini; doch beschränkt er sich auf die Vorgänge in dem Altare, der Kugel und dem Gefässe, ohne der dadurch herbeigeführten Bewegung zu gedenken. Auch Athanasius Kircher thut der Heronischen Vorrichtung im Oedip. Aegypt. II, 335 ausführlich Erwähnung und verknüpft damit eine wenig passende Reminiscenz aus Heron's Automatentheater. Ebenso interessirt sich Schott dafür S. 246.

Zu demselben Zwecke wird von Heron Pneum. I, 39, S. 179 ff. = S. 193 Th. der Druck erwärmter Luft benutzt, indem sie, in einen Lederschlauch $\varkappa$ (Fig. 18) geleitet, diesen aufbläst und dadurch ein Gewicht λ hebt. In Folge dessen lässt die Spannung einer daran gebundenen Kette nach, die Pfosten einer Thür drehen sich, und die Thürflügel werden geöffnet. Zieht sich bei der Abkühlung die Luft wieder zusammen, so faltet sich der Schlauch zusammen, das Gewicht sinkt, und die Thürflügel werden geschlossen. Dieses Experiment führt Harsdörffer S. 538 und 539 an mit dem Hinweis, dass aus Heron ein 'Herr von Urfe eben diese Erfindung abgesehen und in seine Astree (?) gebracht' habe.

Ein drittes Experiment mit erwärmter Luft hat Heron Pneum. II, 3, S. 214—217 = S. 221 Th. Eine horizontale Scheibe, auf welcher tanzende Figuren stehen, wird durch die Reaction ausströmender Luft in Drehung versetzt (Fig. 19). Von dieser Erscheinung hat Heron allerdings keine klare Vorstellung, sondern nur eine dunkle Ahnung. Während in Wirklichkeit, wie bei der bekannten Segnerschen Turbine (1750), die Drehung dadurch erfolgt, dass in der Richtung der Oeffnung die ausströmende Luft keinen Druck ausübt, dagegen an der der Oeffnung diametral gegenüberliegenden Wandung der Druck wirksam bleibt und so ein Rückstoss in einer der Oeffnung entgegengesetzten Richtung erfolgt, meint Heron irrthümlich, dass die kreisende Bewegung durch ein Zurückprallen der ausströmenden Luft von der Wand des umschliessenden (durchsichtigen) Altars hervorgerufen werde. Athanasius Kircher hält die Heronische Vorrichtung für unmöglich und zeigt dadurch seine Unkenntniss über den erwähnten physikalischen Vorgang. Kircher ersann daher eine andere Vorrichtung, welche die niederströmende erhitzte Luft auf die in der äusseren Peripherie eines Rades angebrachten (schaufelartigen) Zacken drücken und so dieses Rad mit den Figuren in Drehung versetzen liess (Oedip. Aeg. II, 337). Dass Schott S. 247 f. Kircher alles gläubig nachschreibt, darf uns nicht wunder nehmen. Wenn Kircher noch hinzufügt, dass der ägyptische König Menes sich über diese Vorrichtung besonders gefreut haben solle und ihr damit ein hohes Alter zuschreibt, so ist dies wegen mangelnder Quellenangabe uncontrollirbar. Und Kirchers wissenschaftliche Zuverlässigkeit wird bekanntlich stark in Zweifel gezogen.

Am meisten hat die Physiker stets die Spannkraft des Dampfes interessirt. Die Techniker (z. B. M. Rühlmann, *Allgemeine Maschinenlehre* I, 394) sehen wohl auf Herons Dampfapparate mit vornehmer Geringschätzung herab und meinen, es habe Niemand daraus Nutzen ziehen können. Um so mehr freut uns daher Poggendorffs oben erwähnter (S. 208) Ausspruch. Dass es bei Heron physikalische Spielereien sind, soll nicht in

Abrede gestellt werden, aber dass diese Spielereien die Möglichkeit einer Bewegung durch Dampf vor Augen stellten, kann ernstlich Niemand leugnen. Dass keiner der bekannten älteren Versuche über die Ausnutzung der Dampfkraft zur Bewegung über das Bekanntwerden von Herons Pneumatik zurückgeht und mehr als einer[1]) unter ihnen nachweislich von Heron angeregt ist, darf doch nicht ausser Acht gelassen werden.

Pneum. II, 6, S. 221—223 = S. 222 Th. wird ein unmittelbarer Dampfstrahl benutzt, um einen Ball in der Luft schweben oder springen zu lassen (Fig. 20).

Allbekannt ist noch heute die Aeolipile (Fig. 21 und 21a). Der Name kommt bei Heron selbst nicht vor, sondern bei Vitruv I, 6, S. 24 ed. Rose (vgl. auch den lateinisch-deutschen Text in Heron. op. I, S. 490. 491). Vitruvs Vorrichtung weicht von der Heronischen ab. Heron leitet den Wasserdampf aus einem geheizten Kessel durch eine Röhre in die rotirende Kugel, während Vitruv das Wasser in die Kugel selbst thut, wie es irrthümlich Poggendorff, *Gesch. d. Phys.*, S. 16, und Frick-Lehmann, *Physikalische Technik* I, 655 von Heron annehmen. Die Drehung der Heronischen Aeolipile wird durch die Reaction des ausströmenden Dampfes herbeigeführt. Ob auch Vitruvs Aeolipile rotirte, ist sehr zweifelhaft; denn Vitruv spricht nur von einem heftigen Wehen ('vehementem flatum') der Luft, ohne die Drehung ausdrücklich zu erwähnen. Wenngleich Jemand nach dem Zusammenhange vermuthen könnte, dass Vitruv eine solche als selbstverständlich voraussetze, wofern er sich die Kugel als Abbild des nach antiker Vorstellung sich drehenden Himmelsgewölbes gedacht habe, so ist doch sehr wahrscheinlich, dass Vitruvs Vorrichtung auf Herons Figur 20 (ohne den Ball) hinausläuft. Das, was später Ens S. 123, Kircher de arte magnet. III, 2, 4, 2, Mersenne S. 141, Schwenter S. 458, Schott S. 237 u. a. unter Aeolipile verstehen, entspricht auch nicht der Vorstellung von der Aeolipile als Reactionsdampfkugel, sondern beruht auf Vitruv und stimmt im Principe mit Figur 20. Eine solche Vitruvsche

---

1) Die Versuche des 16. Jahrhunderts kommen wohl kaum in Betracht. In Betreff von Garays Dampfschiff (1543) ist die Ueberlieferung zu unsicher. Und Poggendorff S. 529 bringt auch Garay mit Heron in Verbindung. Cardano (Hieronymi Cardani Mediolanensis medici *de rerum varietate* libri XVII. Basileae 1557), der nach Poggendorff S. 529 die Aeolipile zur Bewegung benutzt haben soll — ich habe die Stelle leider nicht gefunden —, kannte schon Herons Belopoiika, Pneumatik und Automatentheater. Von diesen Werken schreibt er S. 1175: 'Omnia huius autoris (nämlich Herons) opera pulcherrima sunt'. Dieses Lob schränkt Cardano 1560 in der Schrift *de subtilitate* S. 1013 wieder etwas ein: 'cuius (nämlich Vitruvs) aemulus fuit Hero clarissimus inventis, sed parum utilibus'.

Aeolipile ist es auch, welche Branca[1]) verwendet, indem er den Dampfstrahl gegen die Schaufeln eines Rades strömen lässt. Die Maschine des Salomon de Caus, den Arago durchaus zum Erfinder der Dampfmaschine machen will, beruht dagegen auf dem Heronsballe (vgl. Poggendorff S. 447 und Rühlmann S. 396). Als erste Dampfmaschine pflegt die Geschichte der Physik bedingungsweise (Poggendorff S. 531) eine Vorrichtung von Giambattista della Porta zu bezeichnen, ich sage bedingungsweise, sofern es gestattet ist, auch jede primitive Vorrichtung, welche den Dampf zum Principe der Bewegung macht, als Dampfmaschine anzusehen.

Portas Vorrichtung steht nicht im lateinischen Texte seiner Pneumatik, sondern nur in der italienischen Uebersetzung des Escrivano S. 75 in demselben Capitel, in welchem auch Portas Thermoskop (s. oben S. 165) enthalten ist. Seine Absicht ist dabei zu erfahren, in wie viel Luft sich ein Theil Wasser auflöst (per sapere una parte di acqua in quanta di aria si risolve). Wird ein theilweise mit Wasser gefüllter Kolben erhitzt, so steigt der sich entwickelnde Wasserdampf in ein allseitig luftdicht verschlossenes Gefäss mit Wasser und drückt dieses durch eine aufwärts steigende Röhre hinaus.[2]) Nun hat ein Franzose, Namens Ainger (s. Libri IV, 354), behauptet, Portas Vorrichtung sei als eine grosse Vervollkommnung einer Heronischen Maschine anzusehen. Arago, der 1837 über die Geschichte der Dampfmaschinen mehrere Aufsätze veröffentlicht hat (s. Libri IV, 358), weist dies dagegen zurück. Porta rede an der Stelle überhaupt nicht von Heron und habe in keiner Beziehung eine Heronische Vorrichtung verbessern wollen. Wenngleich es nicht zutreffend ist, dass Porta, wie auch Ainger (vgl. oben S. 197) behauptet hatte, Herons Pneumatik übersetzt haben soll, so wissen wir doch zur Genüge, wie sehr Porta durch Heron beeinflusst worden ist. Wir dürfen daher, auch wenn Porta dies nicht ausdrücklich bemerken sollte, annehmen, dass er Heronische Vorrichtungen, die auch nur entfernt zu den seinigen in Beziehung stehen, gekannt hat. Auf eine bestimmte Heronische Vorrichtung beruft sich Ainger anscheinend nicht. Es liegt uns daher die Beantwortung der Frage ob, ob sich bei Heron Analogien zu Portas Dampfapparat finden. Eine eigentliche Dampfvorrichtung zur Hebung von Wasser oder irgend einer Flüssigkeit hat nun zwar Heron nicht, aber immerhin eine Vorrichtung, die Porta sehr wohl Anregung gegeben haben und die er mit

1) Man findet die auf die erste Periode der Geschichte der Dampfmaschinen bezüglichen Documente in übersichtlicher Weise bei Libri IV, 327—368 (in Bezug auf Cesariano, Porta, Rivault, Salomon de Caus, Branca) zusammengestellt.

2) Portas Figur ist bei Libri IV, 382 und im Längsschnitte bei Poggendorff, *Gesch. d. Phys.*, S. 580, wiederholt.

einer anderen Heronischen Vorrichtung (Fig. 20) in einen einzigen einfachen Apparat umgewandelt haben könnte. In der Pneum. II, 21, S. 262—265 = S. 211 Th. (Fig. 22) enthalten die Behälter $o\pi$ und $\varkappa\lambda$ Wein, der durch die Hebervorrichtungen $\tau\upsilon$, $\varrho\sigma$ nach aussen geleitet werden soll. Das geschieht durch erhitzte Luft, welche von δ nach ε, von da nach ξ und ϑ und hier durch kleine Schlitze in den Rohrwänden in die Weinbehälter geleitet wird. Zuvor soll indessen in die Röhren etwas Wasser gegossen werden. Es scheint danach wohl nicht völlig ausgeschlossen, dass in der Röhre auch etwas Dampf, wenn auch nur in geringer Quantität und mit geringer Spannkraft, sich entwickelte. Porta, dem diese Vorrichtung sicher aus Commandini bekannt war,[1]) konnte, um den Druck auf die Flüssigkeit zu erhöhen, leicht auf den Gedanken kommen, die beiden Heronischen Vorrichtungen mit Weglassung aller Nebendinge derart zu einer einzigen umzugestalten, dass er an das verkürzte Steigrohr ($\eta\vartheta$ bez. $\nu\xi$, Fig. 22) nach Fig. 20 einen Kolben mit Wasser über einem Feuerherde ansetzte. Dazu kommt ein Anklang in der Ausdrucksweise Portas an Heron. Statt zu sagen, dass das (bei Porta) dem Rohre $\varrho\sigma$ entsprechende Ausflussrohr 'fast bis dicht an den Boden reichen' solle, sagt Porta, es solle 'so weit vom Boden abstehen, als zum Durchfluss von Wasser genügt' (un canale tanto lontano dal fondo quanto basti a scorrer l'acqua), wie eben Heron sich fast immer auszudrücken pflegt, s. Heron op. I, S. 41,23. 73,1. 89,8. 93,1. 123,6. 137,27. 165,25. 169,10. 173,5 u. ö. Es ist daher nicht unmöglich, dass Portas Dampfapparat durch Heron beeinflusst ist. Aber Bestimmteres lässt sich nicht ermitteln. Interesse hatte man jedenfalls in der Zeit für die in Fig. 22 dargestellte Vorrichtung. Das beweisen Kircher im Oedip. Aegypt. II, 333 und Schott S. 245, welche beide den Apparat mit unwesentlichen Aenderungen ausführlich wiedergeben.

Einer kritischen Betrachtung ist schliesslich Herons Pneum. II, 16, S. 246—251 = S. 206. 207 Th. von Salomon de Caus nach Schotts Zeugniss S. 56 unterzogen worden. Nach Heron soll ein intermittirender Ausfluss aus ξ (Fig. 23) herbeigeführt werden. Zu dem Zwecke sind drei gebogene Heber im Gefässe $\alpha\beta$ angebracht, γ am Boden, δ in halber Höhe, ε in ganzer. Nach dem ersten Eingusse fliesst die Flüssigkeit zunächst durch γ aus. Unterbricht man den Ausfluss, so bleibt in ζ so viel Wasser zurück, dass die untere Oeffnung von γ geschlossen bleibt, während der Heber sonst mit Luft gefüllt ist. Diese verhindert auch beim zweiten Eingiessen einen Abfluss durch γ. Es fliesst also die Flüssigkeit nicht eher aus $\alpha\beta$ wieder ab, als bis die Flüssigkeit bis zum Scheitelpunkt von δ

1) Die figürlichen Darstellungen fehlen bei Commandini.

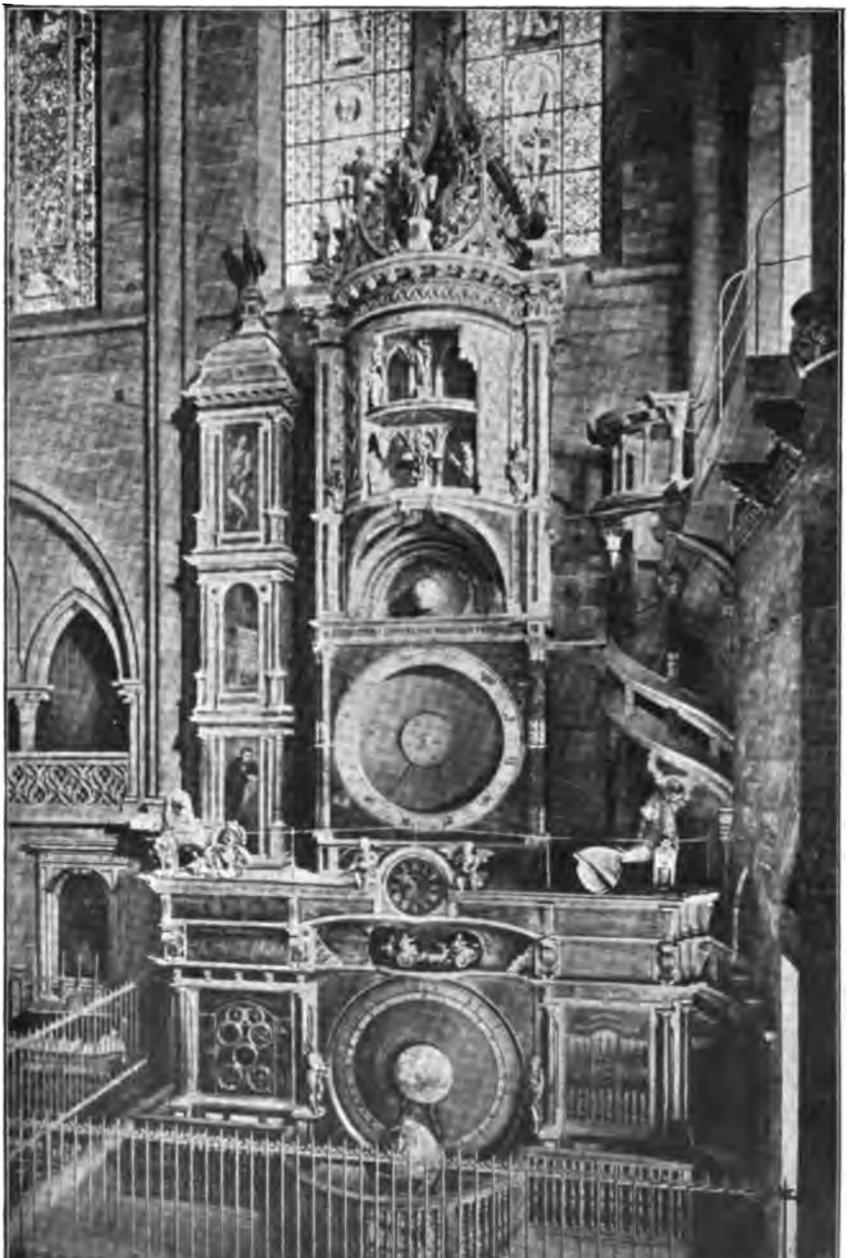
steigt. Aehnlich ist es mit ε. Nun behauptet Salomon de Caus, auch beim zweiten Eingiessen fliesse das Wasser durch γ ab, weil die in γ enthaltene Luft durch das Wasser aus der unteren Oeffnung hinausgedrängt werde. Dieser Behauptung stimmt Schott S. 57 unbedingt zu. Auch de Rochas (1882) hat, anscheinend unabhängig von den erwähnten Vorgängern, S. 168 Einspruch erhoben und eine modificirte Einrichtung vorgeschlagen. Aus wiederholten praktischen Versuchen glauben wir aber entnehmen zu sollen, dass Heron Recht hat, dass also durch die Heber γ und δ nichts ausfliesst, wenn die einen Mündungen im Wasser stehen und im Innern der Heber sich Luft befindet. Dabei ist es gleichgiltig, wie tief der äussere Heberschenkel im Wasser steht. Es scheinen uns danach auch die von de Rochas a. a. O. gegebenen Ansätze mit ihren Folgerungen nicht zutreffend zu sein. Ueberhaupt sieht es bei diesem letzten Beispiel fast so aus, als hätte der moderne Physiker die Sache auf Grund theoretischer Erwägung — de Rochas spricht von 'raisonnement' — behandelt, der antike Physiker dagegen auf Grund des Experimentes. Es wäre also das Verhältniss der Antiken und Modernen einmal umgekehrt, als man gewöhnlich annimmt.

Cantor a. a. O. S. 18 behauptet, ein bei Heron beschriebener intermittirender Brunnen entspreche keineswegs der gleichbenannten Vorrichtung unserer physikalischen Sammlungen. Cantor konnte dies mit vollem Rechte sagen, denn die Vorrichtung, welche er vermuthlich im Sinne hatte (Heron. Pneum. I, 19, S. 102—107 = S. 173f. Th.),[1]) ist, so wie er sie in der Pariser Ausgabe vorfand und wie sie in den Handschriften überliefert ist, kein intermittirender Brunnen im heutigen Sinne. Allein der griechische Text ist fehlerhaft, und es bedarf nur einer kleinen Verbesserung, nur der Aenderung eines einzigen Buchstabens, um die Vorrichtung zu einem wirklichen intermittirenden Brunnen zu machen. Denn das sollte er jedenfalls nach Herons Absicht sein. Und Heron ist vermuthlich durch Philon von Byzanz, von dem er sich auch sonst abhängig (s. S. 171) zeigt, dazu angeregt worden. Denn dieser hat unter den wenigen Apparaten seiner Pneumatik nicht weniger als vier, welche im Principe intermittirende Brunnen sind (s. Heron. op. I, 482—489), darunter einen, welcher der Heronischen Vorrichtung ziemlich nahe kommt. Am gefälligsten ist unter ihnen die Lampe mit dem constanten Niveau (Fig. 24). Es sei gestattet, sie zum Schlusse als Anhang anzureihen, da derartige Lampen gerade im 17. Jahrhundert besonderes

1) Sollte Cantor aber Herons Pneum. I, 20, S. 106—111 = S. 174. 175 Th. gemeint haben, so trifft sein Ausspruch auch jetzt noch zu.

Interesse erregten, wie z. B. bei Porta Pneum. S. 54. 55, Ens S. 10 Schott S. 290f. (dieser bezeichnet sie als eine Erfindung des Jesuit Grünberger), Schwenter S. 448f.[1]) Philons Lampe *ghz* (Fig. 24) wi durch die Zuflussröhren *be*, *cd* aus dem Behälter, der Kugel *a*, mit O gespeist. Der Zufluss hört auf, sobald das Oelniveau bis zu der im Inne der Lampe liegenden Mündung *k* der in die Kugel eingelöteten au steigenden Röhre *lmn* emporsteigt. Wird der Docht angezündet und O verbraucht, so bekommt *k* Luft. Diese dringt in die Kugel und trei durch ihren Druck so lange wieder Oel aus dem Behälter, bis *k* sic abermals schliesst. Indem sich dies je nach dem Oelverbrauche wieder holt, erhält sich das Niveau constant auf gleicher Höhe.

1) Die von Cardanus *de subtilitate* S. 18f. beschriebene 'lucerna mirabilis' ha eine abweichende Einrichtung.

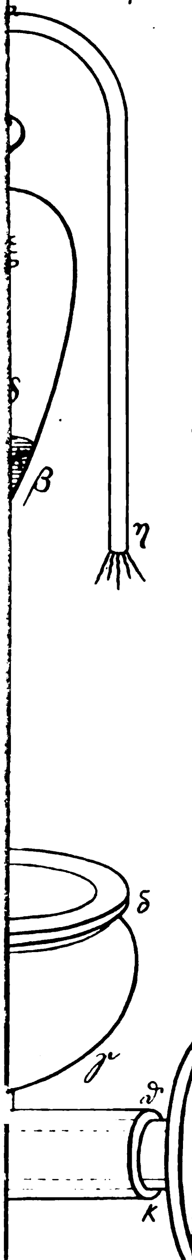


Phot. Jul. Manias. Heliogravure Obernetter, München.

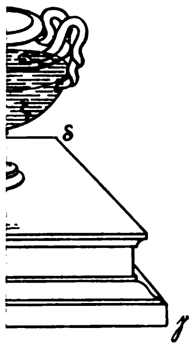
Aus: Stolberg, T. Stimmers Malereien a. d. astr. Münsteruhr.

DIE STRASSBURGER MÜNSTERUHR.

Tafel 2.



S. 203.



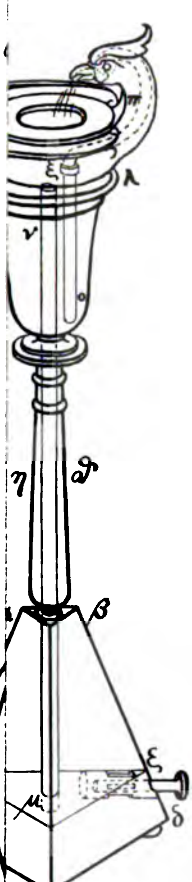


Fig. 15. S. 205.

Loria, Dr. **Gino**, Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Genua, die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie, in ihrer früheren und jetzigen Entwickelung. Historische Monographie. Unter Benutzung zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers ins Deutsche übertragen von Fritz Schütte. Mit einem Vorworte von Professor R. Sturm. [VI u. 132 S.] gr. 8. 1888. geh. n. ℳ 3.—

Das Buch führt dem Leser die hauptsächlichsten Untersuchungsrichtungen vor, liefert ein reichhaltiges Verzeichnis der bedeutenderen Veröffentlichungen und bietet so dem Anfänger ein Mittel, sich in dem unermeſslichen Gebiete der modernen Geometrie leichter zurechtzufinden, während sie die Vorgeschrittenen auf die Probleme hinweist, die der Erledigung harren. Sie erscheint hiermit in einer mehr zugänglichen Übertragung ins Deutsche, welche vom Verfasser vielfach verbessert und erweitert und in den Litteraturnachweisen vermehrt worden ist. Dieselbe gliedert sich in folgende neun Abschnitte: I. Die Geometrie vor der Mitte des 19. Jahrhunderts. II. Theorie der ebenen Kurven. III. Theorie der Oberflächen. IV. Untersuchungen über die Gestalt der Kurven und Oberflächen. Abzählende Geometrie. V. Theorie der Kurven doppelter Krümmung. VI. Abbildungen, Korrespondenzen, Transformationen. VII. Geometrie der Geraden. VIII. Nichteuklidische Geometrie. IX. Geometrie von *n* Dimensionen.

Rudio, Dr. F., Professor am Polytechnikum in Zürich, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Uebersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage versehen. Mit Figuren im Texte. [VIII u. 166 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 4.—

Nachdem durch die Arbeiten von Hermite, Lindemann u. a. das Jahrtausende alte berühmte Problem von der Quadratur des Zirkels seine Erledigung gefunden hat, dürfte es gerechtfertigt erscheinen, in einer historischen Zusammenfassung die Entwicklung desselben von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage zu verfolgen. Neben dieser Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels legt der Verfasser dem mathematischen Publikum zugleich in sorgfältiger Übersetzung diejenigen älteren Arbeiten vor, denen das Problem eine weithin erkennbare Förderung verdankt und welche in der Geschichte desselben geradezu als Marksteine zu bezeichnen sind, die Abhandlungen: *Κύκλου μέτρησις*, von Archimedes; De circuli magnitudine inventa, von Huygens; Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen, von Lambert; Note, où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et son quarré sont des nombres irrationnels, von Legendre.

Näheres siehe Teubners Mitteilungen 1892 Nr. 3, S. 76.

Stäckel, Paul, und **Friedrich Engel**, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gauss. [X u. 325 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 9.—

In dem Buche: „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre", das in demselben Verlage erschienen ist, hat Herr Rudio gezeigt, wie sich die Erkenntnis von der Unmöglichkeit der Quadratur des Zirkels allmählich entwickelt hat. Etwas Ähnliches wollen die Verf. für die Parallelentheorie leisten: sie wollen zeigen, wie man nach und nach zu der Einsicht gelangt ist, daſs das elfte Euklidische Axiom ein wirkliches Axiom, daſs es also unbeweisbar ist. Wie Rudio lassen auch sie die wichtigsten Autoren: Euklid, Wallis, Saccheri, Lambert, Gauſs selbst reden, indem sie ihre Betrachtungen wörtlich oder in getreuer Übersetzung mitteilen. Ein verbindender Text stellt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Autoren dar und bringt, wo es nötig ist, Erläuterungen und sonstige Bemerkungen. Auſserdem legen die Verf. Gewicht auf eine möglichst vollständige Zusammenstellung der übrigen Litteratur über den Gegenstand. Sie schlieſsen vorläufig mit Gauſs ab, weil Gauſs der erste ist, der die Vergeblichkeit aller Versuche, das elfte Axiom zu beweisen, vollkommen klar erkannt hat; die Fortsetzung bilden die „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie" derselben beiden Verfasser (s. unten).

Die Anordnung des Buches ist, von minder Wichtigem abgesehen, folgende: Es wird begonnen mit einer Zusammenstellung der Sätze Euklids, die zu dem elften Axiome in Beziehung stehen. In der Zeit von Euklid bis auf Wallis finden sich Äuſserungen über das Parallelenaxiom sehr spärlich; Wallis aber hat schon 1663 gezeigt, daſs es mit dem Axiome von der Existenz ähnlicher Figuren gleichbedeutend ist. Nach Wallis ist Saccheri zu nennen, der 1733 in seinem „Euclides ab omni naevo vindicatus" die zwei Hypothesen, die auſser der Euklidischen noch möglich sind, ziemlich weit verfolgt und ebenso wie später Lambert zu Resultaten gelangt, die man gewöhnlich Legendre zuschreibt. Von diesem Werke des Saccheri, auf das vor einigen Jahren Beltrami wieder aufmerksam gemacht

hat, wird das erste Buch mitgeteilt. Die Ideen Saccheris hat Lambert in einem 1766 niedergeschriebenen Aufsatze weitergeführt. Der Wunsch, diesen höchst merkwürdigen Aufsatz der Vergessenheit zu entreißen, ist ursprünglich die Veranlassung zu dem ganzen Unternehmen gewesen. Den Schluß des Buches bildet eine Sammlung aller Äußerungen über das Parallelenaxiom, die sich in den Werken und Briefen von Gauß finden.

Schließlich sei noch bemerkt, *daß alle die Abhandlungen, die mitgeteilt werden, einen ganz elementaren Charakter tragen und zu ihrem Verständnisse durchaus keine Kenntnis der höheren Mathematik voraussetzen.*

Stäckel, Paul, und Friedrich Engel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie herausgegeben von F. E. u. P. St. Mit vielen Figuren im Texte. In 2 Bänden. gr. 8. geh.

I. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, geometrische Abhandlungen, herausgegeben von Friedrich Engel, mit einem Bilde Lobatschefskijs. [Unter der Presse.]

II. Wolfgang und Johann Bolyai, geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel, mit einem Bilde Wolfgang Bolyais.

Für eine Fortsetzung des im Jahre 1895 erschienenen Buches der beiden Verfasser „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie“ kommen in erster Linie die Schriften Lobatschefskijs und der beiden Bolyai in Betracht, in denen die nichteuklidische Geometrie ihre erste Begründung und Darstellung gefunden hat und die in zwei getrennten Bänden herausgegeben werden sollen.

Der erste Band ist Lobatschefskij gewidmet. Die deutsch oder französisch geschriebenen Abhandlungen, die überdies leicht zugänglich sind, bleiben unberücksichtigt, da sie durch die russisch geschriebenen Abhandlungen, die in der Übersetzung mitgeteilt werden, entbehrlich werden. Diese russisch geschriebenen Abhandlungen, die bisher für die große Mehrzahl der Mathematiker gar nicht vorhanden waren, geben erst einen Einblick in das, was Lobatschefskij wirklich gewollt und geleistet hat. Insbesondere gilt das von der großen Abhandlung: „Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen“. Diese Arbeit ist geradezu ein Lehrbuch der Geometrie von den ersten Anfängen an; sie wird daher in ihrer ganzen Ausdehnung mitgeteilt, bis auf die beiden letzten Kapitel, da diese nur die Auflösung der ebenen Dreiecke in der gewöhnlichen Geometrie und die Auflösung der sphärischen Dreiecke zum Gegenstande haben. Die „Neuen Anfangsgründe“ sind 1835—38 erschienen; bei dem historischen Charakter des Buches durfte jedoch die erste Veröffentlichung Lobatschefskijs über den Gegenstand nicht fehlen. Es ist das die 1829—30 erschienene Abhandlung: „Über die Anfangsgründe der Geometrie“, die zu den „Neuen Anfangsgründen“ insofern eine erwünschte Ergänzung bildet, als sie noch ausführlicher auf die Berechnung der geometrischen Figuren eingeht. Dagegen erschien es unnötig, die drei andern russisch geschriebenen Abhandlungen aufzunehmen; denn die eine: „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale“ fällt ganz in das Gebiet der Analysis, und die beiden andern: „Imaginäre Geometrie“ und „Pangeometrie“ hat Lobatschefskij selbst in französischer Bearbeitung erscheinen lassen. Den beiden vorhin genannten Abhandlungen wird eine Lebensbeschreibung Lobatschefskijs folgen.

Der zweite Band beschäftigt sich mit Wolfgang und Johann Bolyai. Bei den Schriften dieser beiden, soweit sie hier in Betracht kommen, bildet zwar die Sprache kein Hindernis, sie sind aber trotzdem wenig verbreitet und überdies schon seit langer Zeit im Buchhandel nicht mehr zu haben; nur von der Appendix Johann Bolyais giebt es eine italienische, eine französische, eine englische und eine magyarische Übersetzung, merkwürdigerweise jedoch noch keine deutsche, denn die Bearbeitung Frischaufs vermag die Urschrift nicht zu ersetzen.

Es wird begonnen mit einer ausführlichen Lebensbeschreibung der beiden Bolyai, bei der eine Reihe wichtiger Mitteilungen des Baumeisters Franz Schmidt in Budapest verwertet werden kann. Es folgt die bis vor kurzem unbekannt gebliebene „Theoria parallelarum“ Wolfgang Bolyais, die dieser 1804 an Gauß gesandt hat, darauf, da die einzelnen Schriften nach der Zeitfolge ihrer Abfassung geordnet werden sollen, die „Appendix“ Johann Bolyais, und zwar in der Urschrift und in deutscher Übersetzung. Hieran schließt sich, aus dem ersten Bande des Tentamen entnommen, der „Generalis conspectus geometriae“ Wolfgang Bolyais, sowie einige Stellen aus dem zweiten Bande des Tentamen, alles ebenfalls in deutscher Übersetzung. Den Schluß bildet der geometrische Teil des 1851 erschienenen „Kurzen Grundrisses“ von Wolfgang Bolyai. Die in magyarischer Sprache geschriebenen Werke Wolfgang Bolyais sind nicht berücksichtigt, da alles Wesentliche bereits in den mitgeteilten Schriften enthalten ist.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. Früher herausgegeben von O. Schlömilch (1856—1896), B. Witzschel (1856—1859), M. Cantor (1859—1896), E. Kahl (1860—1892). Gegenwärtig herausgegeben von Dr. R. Mehmke und Dr. M. Cantor. 43. Jahrgang. 1898. 6 Hefte. gr. 8. n. *M* 20.—